情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report

Vol.2019-GI-42 No.8
2019/7/20

不偏ゲームにおける皇帝和とP局面長

末續 鴻輝[1,a)]

概要：不偏ゲームとは，偶然，運，伏せられた要素のないゲームであって，さらに，盤面に対して可能な着手がプレイヤによって異ならないゲームである．不偏ゲームの直和に関しては，G-value を用いた必勝判定がよく知られているが，本研究においては，不偏ゲームの皇帝和を定義し，その必勝判定を，G-value ではなく P 局面長と呼ばれるパラメータを用いて行えることを示す．本研究は前報で示した皇帝 Nim の理論の一般化となっている．

1. はじめに

組合せゲーム理論は，偶然や運に左右されないゲームの数学的構造について研究する理論であり，これまで多くの成果が発表されている．また，[1], [2] など，本理論を紹介する書籍もいくつも出版されている．本研究では，2 人ゲームのみを研究する．

組合せゲームは，偶然や運の要素が存在しないため，ゲーム木全体の構造がわかれば，終了局面から再帰的に遡ることで，いずれのプレイヤに必勝戦略が存在するかを判定することができる．しかし現実には，愚直にそのような手法を用いようとすると，計算時間や計算資源が膨大になり，必勝戦略を判定できないこともある．そこで，盤面を表現するパラメータから必勝者を素早く計算する方法があるかどうかが，興味の対象となる．

後述する Nim のように，局面に対する可能な着手が，プレイヤによって異ならないゲームを**不偏**（*impartial*）**ゲーム**と呼ぶ．これに対し，囲碁や将棋のように，不偏ゲームではないゲームのことは**非不偏**（*partizan*）**ゲーム**と呼ばれる．また，最終着手者を勝者と定義するゲームは，**正規形**（*normal*）と呼ばれる．逆に，最終着手者を敗者と定義するゲームは，**逆形**（*misère*）と呼ばれる．以下では，正規形の不偏ゲームのみを扱うこととする．よって，各ゲームにおいては，最終着手者が勝者となる．

正規形や逆形の不偏ゲームが有限手数で終了する場合，各局面においては先手のプレイヤか後手のプレイヤのいずれかに必勝戦略が存在することが知られている，以下では，先手に必勝戦略が存在する局面を**先手必勝局面**（N **局面**），後手に必勝戦略が存在する局面を**後手必勝局面**（P **局面**）と呼ぶことにする．以下の定理が成り立つことが知られている．

定理 1. 正規形の任意の不偏ゲームについて，先手必勝局面全体の集合 N と後手必勝局面全体の集合 P には，以下の関係が成り立つ．

- N に属する任意の局面から，一手で遷移可能な局面のうち少なくとも一つは P に属する．
- P に属する任意の局面から，一手で遷移可能な任意の局面は，N に属する．
- 任意の終了局面は P に属する．

逆に，正規形の不偏ゲームのすべての局面の集合を上記の条件が成り立つ N, P に分割できた場合，N は先手必勝局面，P は後手必勝局面全体の集合となる．

これまで，ゲームの**直和**として表されるゲームは，その構成成分の G-value と呼ばれる値を知ることで，必勝戦略を持つプレイヤを判定できると知られていた．本稿では，**皇帝和**と呼ばれる新たな和を定義し，やはり構成成分の性質を知ることで，全体の性質を知ることができると示す．

1.1 Nim

Nim は組合せゲーム理論において非常に基礎的なゲームの一つである．

ゲーム 1 (Nim). いくつかの石で構成される山が数山ある．プレイヤは，いずれかの山を選び，そこから好きなだけ石を取り去ってよい．

図 1 で，Nim の局面とプレイヤが山を選択する様子を表現した．また，Nim のゲーム木の例を，図 2 に示す．

Nim の局面を，それぞれの山の石の個数の対として表現する．すなわち，山が r 山あって，それぞれの石の個数が $n_1, n_2, \ldots, n_r$ であるとき，この局面を $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ と表すこととする．この局面が先手必勝局面か後手必勝局面

[1] 国立情報学研究所
NII, Chiyoda, Tokyo 101–8430, Japan
[a)] suetsugu.koki@gmail.com

Vol.2019-GI-42 No.8
2019/7/20

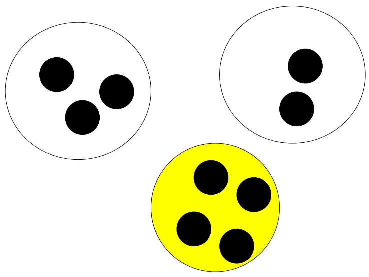

図 1　Nim の局面とプレイヤによる山の選択

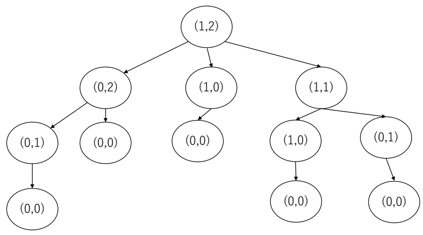

図 2　Nim の局面 $(1,2)$ のゲーム木

であるかは，これらのパラメータの**排他的論理和**で簡単に求めることができる．

定義 1. 非負整数 a, b に対して，$a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i$ とする $(a_i, b_i \in \{0,1\})$．排他的論理和（ニム和，XOR）$\oplus$ を，以下のように定義する．桁数が足りないときは，適宜 0 を補う．

$$a \oplus b = \sum_i 2^i((a_i + b_i) \bmod 2)$$

排他的論理和は結合律が成り立つので，三項以上の和も括弧を用いずに表記することとする．

例 1. $3 \oplus 6 = 11_2 \oplus 110_2 = 101_2 = 5$

例 2. $4 \oplus 5 \oplus 7 = 100_2 \oplus 101_2 \oplus 111_2 = 110_2 = 6$

なお，排他的論理和は，以下の性質を持つ．

補題 1. $n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ であるとする．任意の j に対して，$n'_j \neq n_j$ について，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_{j-1} \oplus n'_j \oplus n_{j+1} \oplus \cdots \oplus n_r \neq 0$ となる．また，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r \neq 0$ のとき，ある j に対してある非負整数 $n'_j < n_j$ が存在して，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_{j-1} \oplus n'_j \oplus n_{j+1} \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ となる．

排他的論理和を用いて，Nim の必勝者は以下のように求められる．

定理 2 (Bouton[3])**.** Nim の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ において，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ であるとき，かつその時に限り後手必勝局面である．

1.2　G-value

次に，ゲーム同士の**直和**を定義する．

定義 2. 二つのゲームの局面 g と h に対して，g と h を並行にプレイするゲームを考える．すなわち，局面として g と h のペア (g, h) が与えられ，プレイヤは g に対する合法手を着手し，g のある次局面 g' と h のペア (g', h) へと全体を変えるか，h に対する合法手を着手し，h のある次局面 h' と g のペア (g, h') へと全体を変えるかのいずれかを行うゲームである．このようなゲームを，g と h の直和ゲームと呼び，$g + h$ と表す．

ゲームの局面 g, h, j に対して，$(g + h) + j = g + (h + j)$ が成り立つ．従って，3 つ以上の局面の直和も，括弧を用いずに表す．

例 3. Nim の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ は，一山の Nim の局面の直和ゲーム $(n_1) + (n_2) + \cdots + (n_r)$ であると考えることができる．

正規形不偏ゲームの直和ゲームについては，構成成分それぞれの G-value と呼ばれるパラメータを調べることで，全体のゲームの性質を知ることが知られている．G-value は他に，Grundy 数，Sprague-Grundy 数，Nimber，エネルギーなどとも呼ばれている．以下に紹介する事実が，Sprague[4] と Grundy[5] によって，別々に見出された．

定義 3. ゲームの局面 g に対して，G-value $G(g)$ を以下のように定義する．

$$G(g) = \begin{cases} 0 & (g \text{ が終了局面}) \\ \mathrm{mex}(\{G(g') \mid g' \text{は } g \text{ の次局面 }\}) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ただし，mex は非負整数の集合に対して，その集合に属さない最小の非負整数を返す関数とする．

定理 3. g が後手必勝局面であるとき，かつそのときに限り，

$$G(g) = 0$$

定理 4. 二つのゲームの局面 g と h について，以下が成り立つ．

$$G(g + h) = G(g) \oplus G(h)$$

本定理によって示されている通り，不偏ゲームの必勝性を判定する際に G-value は非常に重要な役割を果たす．そのため，多くの先行研究において，様々なゲームの G-value の求め方が考察されている．詳しくは [1],[6] なども参照いただきたい．

2.　皇帝 Nim と皇帝和

著者は，前報 [6] において，皇帝 Nim を定義し，その後手必勝局面を示した．

ゲーム 2 (皇帝 Nim)**.** いくつかの石でできた山が，さらにいくつか集まってできた山脈がある．プレイヤは，いずれかの山脈を選び，そこから，好きなように石を取り除いて

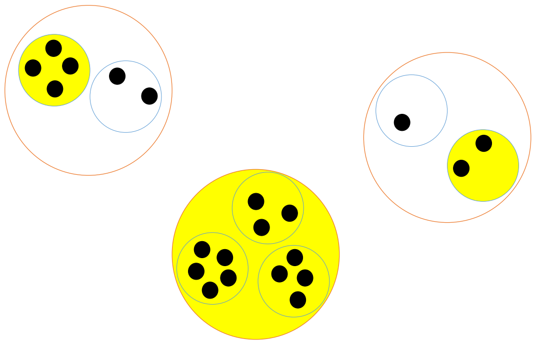

図 3　皇帝 Nim の局面とプレイヤによる山脈および山の選択

よい．また，選ばなかった山脈それぞれについて，高々一つの山を選び，好きに石を取り除いてよい．

図 3 で，皇帝 Nim の局面と，プレイヤが山脈及び山を選択する様子を表現した．

本ゲームの局面を，以下のように表記する．ここで，中括弧で囲われたそれぞれが，一つの山脈である．$(\{n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,r_1}\}, \{n_{2,1}, n_{2,2}, \ldots, n_{2,r_2}\}, \ldots, \{n_{s,1}, n_{s,2}, \ldots, n_{s,r_s}\})$

定理 5. 局面 $(\{n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,r_1}\}, \{n_{2,1}, n_{2,2}, \ldots, n_{2,r_2}\}, \ldots, \{n_{s,1}, n_{s,2}, \ldots, n_{s,r_s}\})$ は，以下の条件がすべて成り立つとき，かつそのときに限り，後手必勝局面となる．

$$n_{1,1} \oplus n_{1,2} \oplus \cdots \oplus n_{1,r_1} = 0$$
$$n_{2,1} \oplus n_{2,2} \oplus \cdots \oplus n_{2,r_2} = 0$$
$$\cdots$$
$$n_{s,1} \oplus n_{s,2} \oplus \cdots \oplus n_{s,r_s} = 0$$
$$(\sum_{1 \le j \le r_1} n_{1,j}) \oplus (\sum_{1 \le j \le r_2} n_{2,j}) \oplus \cdots \oplus (\sum_{1 \le j \le r_s} n_{s,j}) = 0$$

本稿においては，この定理を一般の不偏ゲームに拡張する．そのために，通常のゲームの直和に対して，**皇帝和**を以下のように定義する．

定義 4. 様々な不偏ゲームの局面 $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ が並行してならんでいる．プレイヤは自らの手番において，一つの局面を選び，そのルールに則り，一手以上の任意手数着手する．さらに，それ以外の任意の局面について，そのルールに則り一手だけ着手してもよい．そのようなゲームを，$(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ の皇帝和 $Em(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ とよぶ．

例 4. 皇帝 Nim は Nim の局面の皇帝和である．

ここでは，皇帝和の性質を記述するために，Ehrenborg と Steingrímsson[7] が定義した length of zero position を基に，P 局面長を以下のように定義する．

定義 5 (P 局面長)**.** ゲーム g が後手必勝局面であるとき，g の P 局面長 $Pl(g)$ を以下のように定義する．

$$Pl(g) = \begin{cases} 0 & (g \text{ が終了局面}) \\ \max(\{Pl(g')\} + 1) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ただし，g' は g から有限手数で遷移可能な後手必勝局面とする．

定理 6. ゲームの局面 $Em(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ が後手必勝局面となるのは，以下の条件をすべて満たすとき，かつそのときに限る．

- $g_1, g_2, \ldots, g_r$ はすべて後手必勝局面である．
- $Pl(g_1) \oplus Pl(g_2) \oplus \cdots \oplus Pl(g_r) = 0$

証明. 終了局面は明らかに条件を満たしている．定理 1 より，条件を満たしている場合，どのような着手を行っても条件を満たさなくなることと，条件を満たしていない場合，ある着手を行って条件を満たすようにできることを示せばよい．

まず，条件を満たしている場合，どのような着手を行っても条件を満たさなくなることを示す．いずれの構成成分も，後手必勝局面であるため，一手着手したら先手必勝局面に変わる．従って，皇帝和のルールに従いつつ，すべての構成成分を後手必勝局面にとどめるためには，一つの構成成分 g_i に複数手着手し後手必勝局面 g'_i に変え，それ以外の構成成分には着手しないことが求められる．しかし，P 局面長の定義より，$Pl(g'_i) < Pl(g_i)$ となり，よって補題 1 から，$Pl(g_1) \oplus Pl(g_2) \oplus \cdots \oplus Pl(g_{i-1}) \oplus Pl(g'_i) \oplus Pl(g_{i+1}) \oplus \cdots \oplus Pl(g_r) \neq 0$ となる．

最後に，条件を満たしていない場合，ある着手で条件を満たすようにできることを示す．$g_1, g_2, \ldots, g_r$ に対し，$g'_1, g'_2, \ldots, g'_r$ を以下のように定義する．もしも g_i が後手必勝局面ならば，$g'_i = g_i$．先手必勝局面ならば，g'_i は g_i から一手で遷移できる後手必勝局面とする．このとき，$Em(g'_1, g'_2, \ldots, g'_r)$ は $Em(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ から一手で遷移可能な局面である．$Pl(g'_1) \oplus Pl(g'_2) \oplus \cdots \oplus Pl(g'_r) = 0$ ならば条件を満たす．従って，$Pl(g'_1) \oplus Pl(g'_2) \oplus \cdots \oplus Pl(g'_r) \neq 0$ の場合を考える．このとき，補題 1 より，ある i と $p < Pl(g'_i)$ があって，$Pl(g'_1) \oplus Pl(g'_2) \oplus \cdots \oplus Pl(g'_{i-1}) \oplus p \oplus Pl(g'_{i+1}) \oplus \cdots \oplus Pl(g'_r) = 0$ が成り立つが，P 局面長の定義より，g'_i から有限手数である後手必勝局面 g''_i に遷移可能であって，$Pl(g''_i) = p$ を満たす．すると，$Em(g'_1, g'_2, \ldots g'_{i-1}, g''_i, g'_{i+1}, \ldots, g'_r)$ は $Em(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ から一手で着手可能な局面であり，かつ条件を満たす．　□

3. 様々なゲームの P 局面長

定理 6 において，ゲームの直和における G-value と同様に，ゲームの皇帝和における P 局面長が重要であることが示された．そこで以下では，主な不偏ゲームの P 局面長について紹介する．それぞれのルールや性質については，各出典や前報 [6]，参考書籍 [1] などをご確認いただければ幸いである．

3.1 Nim の P 局面長

定理 7. Nim の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ が後手必勝局面であるとき，その P 局面長は

$$\frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}{2}$$

となる．

証明. 定理 2 より，

$$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$$

である．合計数に関する帰納法で示す．

後手必勝局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ について，いずれかの山を 1 減らした場合，排他的論理和が 0 ではなくなる．ゆえに，そのような局面は先手必勝局面となる．

一方，二つの山から 1 ずつ減らした場合，後手必勝局面になるような減らし方が存在することを示す．$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ であるから，それぞれの数を 2 進展開した際に，それぞれの桁について，1 は偶数個存在する．1 が二つ以上存在する最も低い桁に注目する．n_i と n_j はその桁が 1 であると仮定する．条件より，それ以下の桁は任意の n_k について 0 となる．このとき，$(n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_r)$ について考えると，

$$\begin{aligned} &n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_{i-1} \oplus (n_i - 1) \oplus n_{i+1} \oplus \cdots \\ &\quad \oplus n_{j-1} \oplus (n_j - 1) \oplus n_{j+1} \oplus \cdots \oplus n_r = 0 \end{aligned}$$

であり，かつその P 局面長は

$$\begin{aligned} &\frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_i - 1 + \cdots + n_j - 1 + \ldots + n_r}{2} \\ &\qquad = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}{2} - 1 \end{aligned}$$

である．よってもとの局面の P 局面長は

$$\frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}{2}$$

以上であることがわかるが，帰納法の仮定より，これより大きくはならない． □

3.2 Moore's game の P 局面長

定理 8. $\mathrm{Nim_k}$[8] の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ が後手必勝局面であるとき，その P 局面長は

$$\frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}{k+1}$$

となる．

証明. Nim と同様である． □

3.3 Wythoff の P 局面長

定理 9. Wythoff[9] の後手必勝局面 (x, y) の P 局面長は

$$|x - y|$$

となる．

証明. 終了局面は明らかに条件を満たす．それ以外の場合について考える．Wythoff の局面 (x, y) が後手必勝局面のときは，切り捨て関数 [], 黄金比 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と，ある非負整数 n を用いて，$(x, y) = ([n\phi], [n\phi + n])$ ないし $(x, y) = ([n\phi + n], [n\phi])$ と表せることが知られている．このとき複数手で遷移可能な後手必勝局面 (x', y') は，ある非負整数 $n' < n$ を用いて $(x', y') = ([n'\phi], [n'\phi + n'])$ ないし $(x', y') = ([n'\phi + n'], [n'\phi])$ と表せ，帰納法の仮定より P 局面長は n' となる．また，$(x, y) = ([n\phi], [n\phi + n])$ のとき，2 手で局面 $([(n-1)\phi], [(n-1)\phi + n - 1])$ に遷移することができる（$(x, y) = ([n\phi + n], [n\phi])$ のときも同様）が，この局面の P 局面長は $n - 1$ である．よってもとの局面の P 局面長は $n = |x - y|$ となる． □

3.4 削除 Nim の P 局面長

定理 10. 削除 Nim [6] の後手必勝局面 (a, b) の P 局面長は

$$\frac{\max(a, b)}{2}$$

となる．

証明. $\max(a, b)$ に関する帰納法で証明する．終了局面においては明らかに成り立つ．後手必勝局面 (a, b) において，$\max(a, b) = a$ として一般性を失わない．ここで，二手着手することで，後手必勝局面 $(a - 2, 0)$ に遷移することができる．

よって，帰納法の仮定より，P 局面長が

$$\frac{\max(a-2, 0)}{2} = \frac{a}{2} - 1 = \frac{\max(a, b)}{2} - 1$$

となる局面に移行できる．一方，帰納法の仮定により，これより P 局面長が大きい後手必勝局面には遷移できない．よって，もとの局面の P 局面長は

$$\frac{\max(a, b)}{2}$$

となる． □

3.5 皇帝和の P 局面長

ゲームの皇帝和自体の P 局面長も考えることができる．

定理 11. $Em(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ が後手必勝局面のとき，その P 局面長は

$$\frac{Pl(g_1) + Pl(g_2) + \cdots + Pl(g_r)}{2}$$

となる．

証明. $Em(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ から複数手で遷移可能な後手必勝局面 $Em(g'_1, g'_2, \ldots, g'_r)$ について，任意の i に対して，$Pl(g'_i) \leq Pl(g_i)$ が成り立ち，かつある i については $Pl(g'_i) < Pl(g_i)$ となる．従って，$\frac{Pl(g_1)+Pl(g_2)+\cdots+Pl(g_r)}{2}$

に関する帰納法で証明することができ，Nim の場合の議論と同様にして，

$$\frac{Pl(g_1')+Pl(g_2')+\cdots+Pl(g_r')}{2}$$
$$=\frac{Pl(g_1)+Pl(g_2)+\cdots+Pl(g_r)}{2}-1$$

となるような後手必勝局面 $Em(g_1',g_2',\ldots,g_r')$ に，$Em(g_1,g_2,\ldots,g_r)$ から複数着手で遷移可能であることがわかる．よって，主張が示された．

□

4. まとめと今後の課題

本稿においては，不偏ゲームの皇帝和を定義し，その必勝性について P 局面長を用いて判定できることを示した．このことは，不偏ゲームの直和の必勝性について，G-value を用いて判定できることと対応しており，P 局面長が不偏ゲームにおいて G-value に匹敵する重要な概念であることを示唆している．このことは我々に新たな不偏ゲームに対する視点を与えてくれる．これまで様々なゲームについて G-value が議論されてきたが，今後は G-value だけでなく P 局面長を求めることも必要であると考えられ，本研究ではその起点として，いくつかの不偏ゲームについて P 局面長を求めることに成功した．

謝辞　本稿の執筆に際し，筑波大学大学院生の安福智明氏より助言を多数いただいたことを，ここに深謝する．

参考文献

[1] 佐藤文広：石取りゲームの数学　ゲームと代数の不思議な関係，数学書房 (2014).
[2] Siegel, A. N.: *Combinatorial Game Theory*, Graduate studies in mathematics, Vol. 146, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2013).
[3] Bouton, C. L.: Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Mathematics*, Vol. 3, No. 1/4, pp. 35–39 (1901).
[4] Sprague, R. P.: Über mathematische Kampfspiele, *Tôhoku Math. J.*, Vol. 41, pp. 438–444 (1935-36).
[5] Grundy, P. M.: Mathematics and games, *Eureka*, Vol. 2, pp. 6–9 (1939).
[6] 末續鴻輝：不偏ゲームの必勝局面判定における 2 進展開の様々な利用，情報処理学会研究報告，Vol. 2019_GI_41, No. 22, pp. 1–7 (2019).
[7] Ehrenborg, R. and Steingrímsson, E.: Playing Nim on a simplicial complex, *Electron. J. Combin.*, Vol. 3, No. # R9 (1996).
[8] Moore, E. H.: A generalization of the game called nim, *Annals of Mathematics*, Vol. 11, No. 3, pp. 93–94 (1910).
[9] Wythoff, W. A.: A modification of the game of Nim, *Nieuw Archief voor Wiskunde. Reeks 2*, Vol. 7, pp. 199–202 (1907).