Otrioの2人ゲームにおける先手必勝な盤面についての調査

寺村 舞童華[1,a)] 松崎 公紀[1,b)]

概要：Otrio とは，2〜4 人で行うボードゲームである．3×3 マスの盤面上に大・中・小のコマを置いていく．この時，コマはそれぞれ各大きさで 3 個ずつ持っており，各マスに 1 個ずつ置いていく．次のいずれかの条件を満たせば勝利となる．1. 同じマスに同色の大中小のリングを置く．2. 縦横斜めいずれかの直線上に大中小の順に同色のリングを置く． 3. 縦横斜めいずれかの直線上に同じ大きさの同色のリングを置く．本研究では，2 人ゲームで先手の初手に対する判定を行い先手必勝となる盤面を見つけることを目的とする．Otrio のルールを実装したプログラムで先手勝ちまたは後手勝ちを判定し，予め数手分コマを置いた状態から解析を行う．コマを置いたときの利点の評価値を設定し，その評価値が最も高いものを選択しコマを置いていく．調査の結果，先手が盤面の中央にコマを置いた場合先手必勝になることが分かった．

キーワード：Otrio, 2 人ゲーム，全探索

1. はじめに

Otrio[4] は，プレイ人数 2〜4 人で行う有限零和確定完全情報ゲームであり，Tic-Tac-Toe を 3 次元・4 色のコマに拡張したものと考えることができる．ルールが単純であるものの，3 次元（実際の盤上では 3 次元目はコマの大きさで表現される）であること，3 人以上のプレイが可能であることが興味深いゲームであり，情報処理学会プログラミング・シンポジウムの GPCC において 2019 年の問題として採用されている．本研究では，Otrio の解析に向けた第 1 歩として，2 人プレイの場合に限定して解析を行い，標準の Otrio のルールでは先手必勝であることなどを報告する．

ゲームの解決には，以下の 3 つのレベルが考えられる [2], [9].

超弱解決（ultra weakly solved） 初期局面の勝敗は分かっているものの，どのような指し手を選択すればよいかは分からない．

弱解決（weakly solved） 初期局面の勝敗が分かっており，その証明に必要な局面の最善手も分かっている．

強解決 (strongly solved) ゲームの全局面について勝敗と最善手が分かっている．

本研究の主要な貢献は，2 人プレイの Otrio が弱解決できたことである．具体的には，最初の 2 手のすべての組合せについて，先手勝ち・引き分け・後手勝ちのいずれであるかを列挙した．また，Otrio において重要な真ん中のコマを立ち入り禁止にした変種についても同様に列挙した．なお，本研究において作成したプログラムは Otrio の全ての局面に対し先手必勝・引き分け・後手必勝のどれであるかを現実的な時間で判定することができる．

本論文の構成は以下のとおりである．第 2 節では，Otrio のルールについて説明する．第 3 節では，Otrio の弱解決のために作成したプログラムについて説明する．第 4 節では，標準的な Otrio のルールのもとで勝ちプレイヤを判定した結果を示す．第 5 節では，真ん中のコマを立ち入り禁止にした場合において同様に判定した結果を示す．第 6 節で関連研究を述べ，第 7 節で本論文をまとめる．

2. Otrio のルール

Otrio は，プレイ人数 2〜4 人の零和確定完全情報ゲームである．本研究では，プレイ人数が 2 である場合についてのみ扱う．

盤面

盤面は 3 × 3 の大きさであり，各マスには大・中・小のコマをひとつずつ置くことができる．

初期状態

ゲームの初期状態では盤面上にコマはひとつもない．各プレイヤは 2 つの色のコマを持ち[*1]，それぞれの色について，大・中・小のコマが 3 つずつある．

[1] 高知工科大学
[a)] 235065a@gs.kochi-tech.ac.jp
[b)] matsuzaki.kiminori@kochi-tech.ac.jp

[*1] 販売されているゲームでは，赤・緑・青・紫の 4 色のコマからなる．本論文における図では，先手が黒実線と赤実線，後手が黒破線と赤破線のコマを持つものとする．

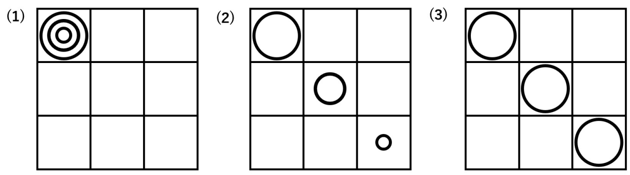

図 1　Otrio の勝利条件．(1)(2)(3) のいずれかのように同一の色のコマを置くことができれば，そのプレイヤの勝利となる．

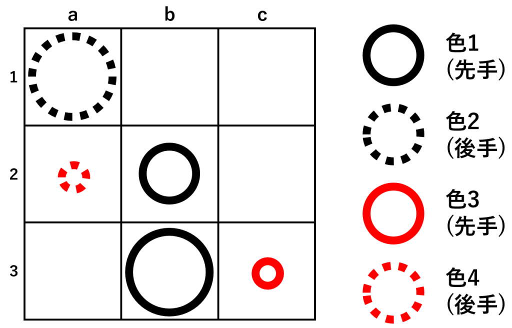

図 2　5 手（b2M, a1L, c3S, a2S, b3L）進めた後の盤面

手

プレイヤは交互に，以下の条件で自分の持っているコマを盤面に置く．

- 一度置いたコマは動かせない．
- 一つのマスには，同じ大きさのコマは複数置けない．
- 置くコマの色は，交互に変える．
- 大・中・小のいずれのコマを置くこともできる．
- もし，ある色のコマを置くことができない場合，そのプレイヤの手番はパスする．

勝利条件

あるプレイヤがコマを置いた際に以下のいずれかの条件（図 1）を満たしたとき，そのプレイヤが勝利する．

- 同じマスに同色の大・中・小のリングが揃っている．
- 縦・横・斜めのいずれかの直線上に，同色のリングが大・中・小の順（またはその逆）に並んでいる．
- 縦・横・斜めのいずれかの直線上に，同色の同じ大きさリングが並んでいる．

以上の勝利条件を満たすことなく，盤面上にそれ以上コマを置けなくなったならば引き分けとする．

棋譜の表記

本論文では，各プレイヤの手を順に記すことで Otrio の棋譜を表現する．ここで，各手は，横方向の座標（a，b，c），縦方向の座標（1，2，3），およびコマの大きさ（L（大），M（中），S（小））の 3 文字を並べたものである．例えば，棋譜 b2M, a1L, c3S, a2S, b3L の後の盤面を図 2 に示す．

3.　勝利判定プログラム

与えられた局面から始めたときに先手勝ち・引き分け・後手勝ちのどれになるかを判定するため，以下の 2 つのプログラムを作成した[*2]．

先手勝ち判定　「先手勝ち」または「引き分けか後手勝ち」のいずれであるかを判定する．

後手勝ち判定　「先手勝ちか引き分け」または「後手勝ち」のいずれであるかを判定する．

これらのプログラムの結果と最終的な判定との関係を表 1 に示す．また，これらのプログラムは，結果を得るまでに調べた局面数（探索局面数）も返すようにした．

表 1　プログラムの結果と最終的な判定

先手勝ち判定の結果	後手勝ち判定の結果	最終的な判定
先手勝ち	先手勝ちか引き分け	先手勝ち
引き分けか後手勝ち	先手勝ちか引き分け	引き分け
引き分けか後手勝ち	後手勝ち	後手勝ち

プログラムの高速化のため行った工夫は以下の 3 つである．なお，盤面の対称性を利用した探索範囲の絞り込みについては，作成したプログラムでは行っていない．

局面のキャッシュ

同一局面に対する重複する探索を避けるため，探索の際に出現したすべての盤面について，その結果と探索局面数を記憶し，結果を再利用するようにした．ただし，本論文中における探索局面数は，局面のキャッシュを利用しない場合のものと同数である．多くの開始局面に対して 10 GB のメモリで計算結果を得ることができたが，一部については最大 30 GB 使用できるようにして再実行した．

引き分けの判定

ゲームの終盤では，それ以降どのような手が選ばれても必ず引き分けとなる盤面が出現する．具体的には，全てのマスまたは直線について，どのプレイヤも勝利条件を満たせない場合である．20 手以降の局面において，必ず引き分けとなる盤面であるかを判定することで，必要な探索局面数が少なくなるようにした．

調べる手の優先順位付け

作成したプログラムでは，各プレイヤにとって良い手を先に調べることで，枝刈りがより効き，結果を早く得ることができる．本研究では，置こうとするコマと同一マスまたは直線上にある他のコマの状況に応じて，以下のスコアを与え，そのスコアの総和を手の評価値とした．

+10000	置けば勝利条件を満たす．
+100	相手のリーチを阻止する．
+10	自分がリーチをかける．
+2	自分が将来的に勝利条件を満たせる．
+1	相手が将来的に勝利条件を満たすのを阻止する．
−2	自分の将来的な勝利条件（別の色）を阻止する．
−100	自分のリーチ（別の色）を阻止する．
0	それ以外の場合．

[*2] 当初，1 つのプログラムで 3 通りのどれになるかを判定しようとしたが，計算時間が爆発して所望の結果を得ることができなかった．

表 2 先手の 1 手目についての判定結果（通常ルール）

棋譜 1 手目	結果	探索ノード数 ($\times 10^6$) (先手)	(後手)
a1L	引き分け	80.5	21.4
a1M	後手勝ち	36.1	278.2
b1L	後手勝ち	45.4	294.3
b1M	引き分け	45.8	74.3
b2L	後手勝ち	39.7	317.0
b2M	先手勝ち	570.7	40.4

4. Otrio の通常ルールにおける実験結果

表 2 は，先手の 1 手目について判定した結果を列挙したものである．

表 3 は，最初の 2 手の取りうる組み合わせ全てについて判定した結果を列挙したものである．

先手が盤面中央の中にコマを置いた場合先手勝ちとなり，そのほかの場所に置いた場合は後手勝ちまたは引き分けという結果になった．このことから，1 手目に盤面中央の中にコマを置くことで先手が勝つが置かなければ後手が勝つ手が存在することが分かった．先手の 1 手目について引き分け以上ならば先手の探索ノード数は小さく，先手勝ちならば大きい．これは，先手勝ちについて判定を行うとき後手の手を全て探索しているからである．

最初の 2 手の取りうる組み合わせ全てについて判定した結果，盤面中央の中にコマを 1 手目に先手が置いたとき，後手がどの場所に置いても先手勝ちとなることが分かった．これは，縦横斜めでリーチを作ることができるようになり，複数リーチをかけることが可能となる．よって，リーチをより多くつくることができるため後手が先手のリーチを防ぎきれなくなり先手勝ちとなると考えられる．また，先手の 1 手目に対して後手の 2 手目で b2M を置いた時後手勝ちとなり，後手が 2 手目で b2M 以外を置いた時先手勝ちになる．このことから，後手は 2 手目に b2M を置ける場合には必ず置かないといけないと考えられる．

5. 真ん中の円を立ち入り禁止にした場合の実験結果

表 4 は，先手の 1 手目について判定した結果を列挙したものである．

表 5 は，最初の 2 手の取りうる組み合わせ全てについて判定した結果を列挙したものである．

先手の 1 手目について判定した結果，先手のどの手についても引き分けという結果になった．

最初の 2 手の取りうる組み合わせ全てについて判定した結果，先手勝ちか引き分けしか存在しない．よって，真ん中の円を立ち入り禁止にした場合，後手が適切にコマを置くときは引き分けにすることができるが，どの手についても後手は勝利することができないということが分かった．

表 3 と表 5 を比較すると，真ん中の円を立ち入り禁止にした場合先手勝ちの探索ノード数が大きい箇所が多く存在していることから，通常ルールよりも後手が勝利することが難しいと考えられる．

6. 関連研究

はじめにで述べたように，ゲームの解決には超弱解決，弱解決，強解決の 3 つの段階がある．これまで様々なゲームが，弱解決または強解決されてきた．**表 6** はそのような弱解決または強解決されたゲームのいくつかについて，状態数と解決状況を示したものである．

Otrio と同様に Tic-Tac-Toe に類似したゲームのひとつに Qubic（3D Tic-Tac-Toe）がある．Qubic の盤面サイズを 3x3x3 にしたものは先手必勝であり，また両者が中央に置けない場合にも先手必勝であることが分かっている [1]．本研究で調査した Otrio の結果は，前者では共通するものの後者では異なり興味深い．盤面サイズ 4x4x4 の Qubic の場合については，Patashnik [5] により弱解決されている．

コマの色が 4 色ある Otrio では，状態数が比較的多い．9 マスそれぞれに 3 つの大きさのコマが置け，それぞれについて 5 通り（4 色または無配置）の可能性がある．さらに，8 通りの回転・鏡映対称性があることから，状態数の上限を $5^{27}/8 \approx 10^{18}$ と見積ることができる．その上で 表 6 を見ると，本研究で解決を試みた Otrio の状態数は 6x6 Reversi より大きく，Checker よりも小さい．このことから，本研究の主な貢献である，Otrio の弱解決ができたことは，妥当な結果であると考える．また，本研究のプログラムの計算時間は比較的小さいため，記憶容量についての問題を解決できれば強解決も可能ではないかと予想する．

7. おわりに

本研究では，2 人プレイの Otrio を解析し，弱解決することができた．具体的には，通常の Otrio と，真ん中のコマを立ち入り禁止とした変種のふたつについて，それぞれ最初の 2 手の全ての組合せが先手勝ち・引き分け・後手勝ちのいずれであるかを列挙した．

通常の Otrio では，容易に予想できるとおり，中央のマスに大きさ中のコマを置くことが勝利に大きく影響する結果を得た．また，判定プログラムの探索局面数から，先手勝ちか引き分けかが拮抗する初期配置をいくつか見つけることができた．一方，真ん中に大きさ中にコマを立ち入り禁止とした変種では，先手の 1 手目すべてに対し引き分けという結果を得た．また，通常の Otrio との比較において，変種では探索局面数が多くなる傾向があり，変種のほうが先手勝ちと引き分けが拮抗するバランスのよいゲームとなっていると考える．

Otrio は 3 人・4 人でのプレイが可能であり，特に 3 人プ

表 3　最初の 2 手の取りうる組み合わせ全てについての判定結果（通常ルール）

棋譜		結果	探索ノード数 ($\times 10^6$)	
1 手目	2 手目		(先手)	(後手)
a1L	a1M	先手勝ち	4.5	0.4
a1L	a1S	先手勝ち	11.0	1.6
a1L	b1L	先手勝ち	2.0	0.2
a1L	b1M	先手勝ち	2.5	0.5
a1L	b1S	先手勝ち	2.7	0.8
a1L	c1L	先手勝ち	3.4	1.0
a1L	c1M	先手勝ち	2.8	0.6
a1L	c1S	先手勝ち	2.1	0.4
a1L	b2L	先手勝ち	3.3	0.6
a1L	b2M	引き分け	80.5	7.7
a1L	b2S	先手勝ち	2.4	0.6
a1L	c2L	先手勝ち	3.1	0.4
a1L	c2M	先手勝ち	1.7	0.2
a1L	c2S	先手勝ち	3.3	0.3
a1L	c3L	先手勝ち	3.2	0.5
a1L	c3M	先手勝ち	1.4	0.4
a1L	c3S	先手勝ち	1.6	0.3
a1M	a1L	先手勝ち	14.7	1.6
a1M	b1L	先手勝ち	10.2	1.8
a1M	b1M	先手勝ち	30.5	1.8
a1M	c1L	先手勝ち	11.6	1.9
a1M	c1M	先手勝ち	11.9	1.7
a1M	b2L	先手勝ち	12.5	3.3
a1M	b2M	**後手勝ち**	36.1	278.2
a1M	c2L	先手勝ち	9.1	1.2
a1M	c2M	先手勝ち	14.1	1.5
a1M	c3L	先手勝ち	10.9	2.4
a1M	c3M	先手勝ち	21.0	0.7
b1L	a1L	先手勝ち	26.2	2.3
b1L	a1M	先手勝ち	34.4	2.3
b1L	a1S	先手勝ち	39.0	9.2
b1L	b1M	引き分け	132.3	4.1
b1L	b1S	先手勝ち	67.9	4.9
b1L	a2L	先手勝ち	17.0	1.3
b1L	a2M	先手勝ち	34.3	2.4

棋譜		結果	探索ノード数 ($\times 10^6$)	
1 手目	2 手目		(先手)	(後手)
b1L	a2S	先手勝ち	17.9	4.2
b1L	b2L	先手勝ち	23.7	2.4
b1L	b2M	**後手勝ち**	45.4	294.3
b1L	b2S	先手勝ち	30.0	2.4
b1L	3L	先手勝ち	31.4	4.0
b1L	a3M	先手勝ち	15.8	1.9
b1L	a3S	先手勝ち	16.9	4.6
b1L	b3L	先手勝ち	26.2	2.2
b1L	b3M	引き分け	133.2	1.5
b1L	b3S	先手勝ち	17.9	1.5
b1M	a1L	先手勝ち	26.7	5.1
b1M	a1M	先手勝ち	21.9	2.5
b1M	b1L	先手勝ち	22.5	4.3
b1M	a2L	先手勝ち	13.2	1.2
b1M	a2M	先手勝ち	17.1	1.3
b1M	b2L	先手勝ち	21.6	2.2
b1M	b2M	引き分け	45.8	17.4
b1M	a3L	先手勝ち	11.4	1.5
b1M	a3M	先手勝ち	7.1	0.8
b1M	b3L	先手勝ち	9.2	1.7
b1M	b3M	先手勝ち	9.1	0.6
b2L	a1L	先手勝ち	71.1	11.2
b2L	a1M	先手勝ち	115.1	9.2
b2L	a1S	先手勝ち	97.8	15.8
b2L	b1L	先手勝ち	120.2	11.6
b2L	b1M	引き分け	110.4	9.3
b2L	b1S	先手勝ち	75.3	8.0
b2L	b2M	**後手勝ち**	39.7	317.0
b2L	b2S	先手勝ち	62.8	3.7
b2M	a1L	先手勝ち	19.7	1.1
b2M	a1M	先手勝ち	11.6	1.6
b2M	b1L	先手勝ち	6.3	2.6
b2M	b1M	先手勝ち	13.6	0.8
b2M	b2L	先手勝ち	11.5	0.8

表 4　先手の 1 手目についての判定結果（真ん中の円を立ち入り禁止にした場合）

棋譜 1 手目	結果	探索ノード数 (×10^6) (先手)	 (後手)
a1L	引き分け	370.3	94.5
a1M	引き分け	81.1	115.9
b1L	引き分け	100.3	275.3
b1M	引き分け	200.2	155.0
b2L	引き分け	103.6	452.0

レイでの Otrio の解析は重要な今後の課題である．また，Otrio を強解決するために必要な計算コスト・記憶容量などをより厳密に見積ることも興味深い課題である．

参考文献

[1] 3D tic-tac-toe, https://en.wikipedia.org/wiki/3D_tic-tac-toe. Viewed on 27 Jun, 2019.
[2] Allis, V.: Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence, PhD Thesis, University of Limburg, Maastricht, The Netherlands (1994).
[3] Feinstein, J.: 6 × 6 Othello weakly solved, https://web.archive.org/web/20091101013931/http://www.feinst.demon.co.uk/Othello/6x6sol.html. Viewed on 27 Jun, 2019.
[4] Master, S.: Marbles Otrio, https://www.spinmaster.com/product_detail.php?pid=p21211. Viewed on 27 Jun, 2019.
[5] Patashnik, O.: Qubic: 4 x 4 x 4 Tic-Tac-Toe, *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 4, pp. 202–216 (1980).
[6] Schaeffer, J., Burch, N., Björnsson, Y., Kishimoto, A., Müller, M., Lake, R., Lu, P. and Sutphen, S.: Checkers Is Solved, *Science*, Vol. 317, No. 5844, pp. 1518–1522 (2007).
[7] 田中哲朗: ボードゲーム「シンペイ」の完全解析，情報処理学会論文誌， Vol. 48, No. 11, pp. 3470–3476 (2007).
[8] 田中哲朗: 「どうぶつしょうぎ」 の完全解析，情報処理学会研究報告ゲーム情報学，Vol. 2009-GI-22(3), pp. 1–8 (2009).
[9] 田中哲朗: ゲームの解決，数学，Vol. 65, No. 1, pp. 93–102 (2013).

表 5 最初の 2 手の取りうる組み合わせ全てについての判定結果（真ん中の円を立ち入り禁止にした場合）

棋譜 1 手目	棋譜 2 手目	結果	探索ノード数 ($\times 10^6$) (先手)	探索ノード数 ($\times 10^6$) (後手)
a1L	a1M	先手勝ち	128.0	3.6
a1L	a1S	引き分け	170.8	26.1
a1L	b1L	先手勝ち	14.5	3.0
a1L	b1M	引き分け	201.9	4.7
a1L	b1S	先手勝ち	37.0	1.7
a1L	c1L	引き分け	357.3	6.9
a1L	c1M	先手勝ち	43.3	2.2
a1L	c1S	引き分け	321.8	3.8
a1L	b2L	先手勝ち	7.1	1.4
a1L	b2S	先手勝ち	8.4	0.4
a1L	c2L	先手勝ち	9.1	1.6
a1L	c2M	先手勝ち	29.0	1.7
a1L	c2S	先手勝ち	6.7	1.0
a1L	c3L	先手勝ち	446.3	1.6
a1L	c3M	先手勝ち	62.9	1.2
a1L	c3S	引き分け	370.3	9.9
a1M	a1L	引き分け	106.1	4.5
a1M	b1L	先手勝ち	98.4	2.9
a1M	b1M	引き分け	142.3	6.1
a1M	c1L	引き分け	81.1	10.0
a1M	c1M	引き分け	227.2	3.4
a1M	b2L	先手勝ち	24.8	1.3
a1M	c2L	先手勝ち	34.7	2.4
a1M	c2M	引き分け	224.1	5.0
a1M	c3L	引き分け	106.5	6.5
a1M	c3M	引き分け	220.9	1.8
b1L	a1L	引き分け	97.5	4.7
b1L	a1M	先手勝ち	90.6	12.0
b1L	a1S	引き分け	100.3	4.1
b1L	b1M	引き分け	114.8	11.8

棋譜 1 手目	棋譜 2 手目	結果	探索ノード数 ($\times 10^6$) (先手)	探索ノード数 ($\times 10^6$) (後手)
b1L	b1S	引き分け	280.7	3.1
b1L	a2L	先手勝ち	65.3	8.3
b1L	a2M	先手勝ち	45.7	11.8
b1L	a2S	引き分け	281.1	8.8
b1L	b2L	先手勝ち	38.2	6.2
b1L	b2S	引き分け	385.4	1.8
b1L	a3L	引き分け	135.3	34.8
b1L	a3M	引き分け	304.1	10.6
b1L	a3S	引き分け	172.4	15.0
b1L	b3L	引き分け	303.6	4.9
b1L	b3M	引き分け	262.5	10.6
b1L	b3S	引き分け	194.5	6.1
b1M	a1L	引き分け	119.5	24.1
b1M	a1M	先手勝ち	70.0	3.2
b1M	b1L	引き分け	412.5	0.8
b1M	a2L	先手勝ち	13.5	2.5
b1M	a2M	先手勝ち	44.5	3.5
b1M	b2L	先手勝ち	9.3	2.7
b1M	a3L	引き分け	200.2	2.5
b1M	a3M	引き分け	480.9	1.6
b1M	b3L	引き分け	355.0	1.7
b1M	b3M	引き分け	494.0	2.5
b2L	a1L	引き分け	95.4	19.0
b2L	a1M	引き分け	194.1	8.8
b2L	a1S	引き分け	103.6	36.8
b2L	b1L	引き分け	384.7	6.6
b2L	b1M	引き分け	125.4	14.6
b2L	b1S	引き分け	226.8	9.3
b2L	b2S	引き分け	321.7	8.3

表 6　ゲームの状態数と解決．状態数は [9] より転載，もしくは，著者による計算

ゲーム	状態数	解決
Tic-tac-toe	10^3	強解決
シンペイ	10^8	強解決 [7]
どうぶつしょうぎ	10^8	強解決 [8]
Awari	10^{11}	強解決 [2]
6x6 Reversi	$\leq 10^{16}$	強解決 [3]
Otrio	$\leq 10^{18}$	(本研究)
Checkers	10^{20}	弱解決 [6]
Qubic	$\leq 10^{28}$ (?)	弱解決 [5]