

圧縮センシングを用いた 測定系の帯域を超える信号の時間波形回復

藤澤 俊祐^{1,a)} 大岡 佳生¹ 深津 晋¹

概要: 物理測定では測定対象や計測装置などに起因して測定周波数の帯域が制限されるのが普通である。この帯域から外れた特定周波数における信号を検出する方法としてヘテロダイン検波がよく知られているが、より広帯域にわたる時間波形再生は、その重要性が認識されながらも十分には研究されてこなかった。本稿では物理測定における帯域の発生過程をモデル化し、帯域制限された信号から元の信号を復元する逆問題が悪条件であることを明らかにする一方、 ℓ_1 正則化を用いてこのような問題を解く手法を提案する。光強度変調器と低帯域検出器を用いて周波数帯域を回復し、時間波形を再生した具体事例をあわせて示す。

キーワード: 離散時間システム, LTI システム, 圧縮センシング

Beating the bandwidth limit of signal waveform recovery by compressed sensing

SHUNSUKE FUJISAWA^{1,a)} YOSHIKI O-OKA¹ SUSUMU FUKATSU¹

Abstract: Measurement frequency bandwidth occurs where physical measurements are relevant. Originating in an object under test and/or measuring instruments, it sets the upper limit of accessible frequencies. Heterodyning is an established technique that allows signal recovery at *selected* frequencies above this ceiling. Signal recovery at *any* frequencies, however, has been little explored despite its significance, and as such is a considerable challenge. By using a mathematical model to emulate the development of bandwidth during measurements, it is shown that recovery of bandwidth limited signals is essentially an inverse problem with a large condition number. A viable method to beat the bandwidth limit by solving an ℓ_1 norm minimization problem is proposed. Waveform recovery is demonstrated by implementing an amplitude modulator and a slow photodetector.

Keywords: discrete time systems, LTI system analysis, compressed sensing

1. はじめに

より小さな空間スケール、より速い時間スケールの現象を捉えることは物理測定の重要テーマである。空間スケールのみに着目すれば、例えば走査型トンネル顕微鏡 [1] などを用いることで個別の原子・分子の位置や動きを観測する技術が発展してきた。このような小さな空間スケールの物理現象から得られる信号は一般に非常に小さく、高いゲインで増幅して観測する必要がある。ところが増幅器のゲ

インと周波数帯域幅はトレードオフの関係にあり、一般に高いゲインで増幅するためには信号の速く変化する成分(高周波成分)が犠牲になる。この周波数帯域の制限に起因して走査型トンネル顕微鏡など高い空間分解能をもつ測定機器では高い時間分解能の実現が一般に困難とされてきた [2], [3]。

一方、測定の過程で周波数帯域が制限されるような状況下においても高周波信号の検出が可能な方法が知られている。ヘテロダイン測定は、信号の周波数に近い周波数の信号を乗算することで低周波の差周波成分を生成し、低域通過フィルタを用いてこれを選択的に抽出することで元の高

¹ 東京大学大学院総合文化研究科

^{a)} fujisawa-shunsuke@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

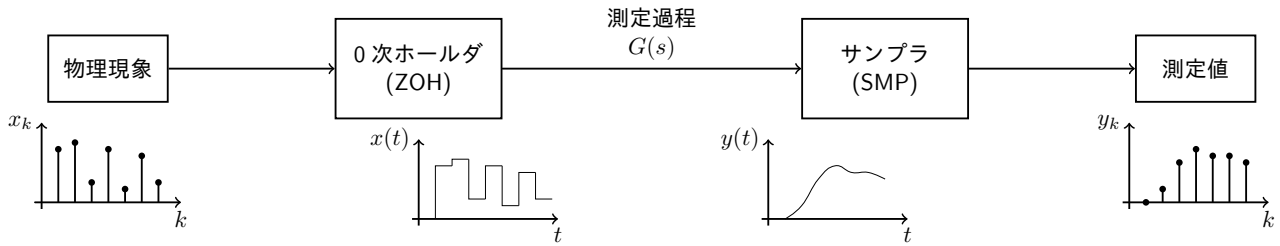


図 1 測定のモデル

周波信号の情報を再生する。

ヘテロダインは測定の帯域制限を克服するための有効な手段ではあるが、時間分解能を向上させる上ではいくつか問題がある。最も深刻なのは、周波数差が小さくなるように乗算する信号の周波数を選ぶため 1 回の測定で測定を完了させるには元の信号の周波数が既知でかつ狭帯域に周波数が分布している必要がある。乗算する信号の周波数を変化させながら複数回測定すればこの問題は回避されるものの最悪のケースでは極めて多くの信号を乗じる必要があり、測定が長期化する。これを回避するには、単一周波数ではなく様々な周波数成分を含むランダム信号を乗算すれば良いが、こんどは様々な周波数成分が不可逆的に混合する結果、元の信号の情報が弁別不能になる (悪条件の逆問題)。

このような悪条件問題に対し、物理現象が少数の変数のみで記述できる (「スパースである」) とする事前知識にもとづいて正しい解を推定する手法に圧縮センシング [4] がある。本研究では、見たい信号とランダム信号 (多くの周波数を持つ信号) の積に対して圧縮センシングを適用することにより測定の帯域制限を緩和し、広帯域にわたる信号の時間波形再生を試みた。

Notation

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ なる汎関数 $\mathcal{L}[f]: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を対応付ける変換 \mathcal{L} を Laplace 変換とし、その逆変換を \mathcal{L}^{-1} で表す。数列 $\{x_k\}$ に対して $\mathcal{Z}[x](z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$ なる関数 $\mathcal{Z}[x]: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を対応付ける変換 \mathcal{Z} を z 変換とし、 \mathcal{Z} の逆変換を \mathcal{Z}^{-1} で表す。ある関数に対する Laplace 変換や、ある数列に対する z 変換は誤解のない範囲で大文字を用いて書かれ、例えば $\mathcal{L}[f](s)$ を $F(s)$ と表記する。一方、 X 上の有界関数の集合を $L^{\infty}(X)$ で表し、ベクトル $\mathbf{x} \in K^n$ (K は \mathbb{R} または \mathbb{C}) の k 番目の要素を x_k で表す。

2. 帯域制限のある測定のモデル化

興味のある物理現象が時間変化する信号で表されるとする。これは本来、 t の関数として扱うのが妥当である。ところが本研究の目的はこの信号の復元にあるから任意の連続関数を許せば無限個のパラメータの推定が必要となり、計算機上では最早、実行不能になってしまう。そこで物理

現象を有限個のパラメータで記述するため仮想的に物理現象を離散的な系列 $\{x_k\}_{k=0,1,\dots,n-1}$ とみなす。さらにこれを要素ごとに並べたベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と同一視する。

入力は離散値として扱うが、測定における帯域制限は連続信号に対して生じる。したがって測定の過程は連続システム、すなわち t の連続関数である入力に対して同じく t の連続関数である出力が得られるように記述する。連続システムが線形時不変であるとき、出力と入力の Laplace 変換の比 (伝達関数) は入出力によらず一定になる。このモデルの測定過程も線形時不変として伝達関数を $G(s)$ とする。

帯域制限された出力信号は時間幅 T でサンプリングされ、離散的な系列 $\{y_k\}_{k=0,1,\dots,n-1}$ として観測されるが、これを要素ごとに並べたベクトル $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ と同一視する。入出力の系列の長さ n と離散化の時間幅 T は必ずしも一致する必要はないが、入力の離散化の幅は任意に決めてよいから実質的にこれらは同じであるとしてよい。

離散的な入出力と測定を表す連続システムとの間の接続は、0 次ホルダ (zero-order holder, ZOH) とサンプラ (sampler, SMP) によるホールディングとサンプリングによって記述する。具体的には 0 次ホルダによる変換 $f_{\text{ZOH}}: \mathbb{R}^n \rightarrow L^{\infty}([0, nT])$ とサンプラ $f_{\text{SMP}}: L^{\infty}([0, nT]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ をそれぞれ

$$\{f_{\text{ZOH}}(\mathbf{x})\}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \{u(t-kT) - u(t-(k+1)T)\},$$

$$\{f_{\text{SMP}}(x)\}_k = x(kT) = \int_0^{\infty} x(t)\delta(t-kT)dt$$

とする。ただし $T \in \mathbb{R}$ はホールディング・サンプリングの時間幅、 $u(t)$ は単位ステップ関数である。図 1 にこの測定のモデルの概念図を示した。

3. 測定モデルの解析

§2 でモデル化した系の入力 (物理現象に起源をもつ信号を意味するが、以下、簡単のため単に物理現象とよぶ) と出力 (測定値) の間にはステップ応答関数を $\{p_k\}_{k=0,\dots,n-1}$ として

$$y_k = \sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} (p_{k-k'} - p_{k-k'-1}) \quad (1)$$

の関係が成り立つ。ただし $\{p_k\}$ は時間幅 T のサンプリン

グによって離散化されている (導出法は付録参照)。言い換えれば $h_k = p_k - p_{k-1}$ は離散システムにおけるインパルス応答関数となり、測定過程はインパルス応答関数と入力の畳み込みによって表される。またこの関係は

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

を用いると $\mathbf{y} = H\mathbf{x}$ と書ける。このように測定値から入力の物理現象を推定する問題は、線形方程式を解くことに帰着される。

次に $G(s)$ で表される帯域制限と線形方程式の解の安定性について議論する。連立方程式の解が測定値ノイズの影響下でも安定に求められるかどうかは行列の条件数によって決まる。条件数とは行列 H の特異値 ($A^\dagger A$ の固有値) のうち最小と最大のものとの比 $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ であり、この値が小さいほど解が安定に求められる。

行列 H のような畳み込みを表す行列は Toeplitz 行列と呼ばれる。離散システムとの関係から盛んに研究されており [5], [6], [7]、特異値の分布について以下が知られている。

定理 1 (Toeplitz 行列の特異値の分布 [7])

$f(\omega) \in L^\infty([-\pi, \pi])$ とし、このフーリエ級数展開係数を $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ とする。すなわち $f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega}$ である。Toeplitz 行列 $T_n[f] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を $(T_n[f])_{ij} = c_{j-i}$ により定義する。 $f(\omega)$ がある実関数 $f_0(\omega)$ と $|R_0(\omega)| = 1$ の周期 2π の連続関数 $R_0(\omega)$ によって $f(\omega) = f_0(\omega)R_0(\omega)$ のように書けるとする。このとき、 $T_n[f]$ の特異値の列 $\{\sigma_k\}_{k=0, \dots, n-1}$ と $\left\{ \left| f\left(-\pi + \frac{2\pi k}{n-1}\right) \right| \right\}_{k=0, \dots, n-1}$ が $n \rightarrow \infty$ の極限で集合として一致する。すなわち順序の入れ替えを除いて 2 つの数列の要素が一致する。

上の定理における c_k は、式 (2) の行列ではインパルス応答関数 h_k にあたる。初期位相を無視すれば $f(\omega)$ はインパルス応答関数と角周波数 ω の正弦波の畳み込みと見ることができる。つまり $f(\omega)$ は角周波数 ω の正弦波を入力したときの出力すなわち周波数応答関数である。 ω の下限は 0 Hz で上限にあたる π は離散化の時間幅 T と関連づけられ $\frac{2}{T}$ Hz に対応する。これらをまとめると以下が得られる。

系 2

ある測定系に対してステップ応答関数 p_k を時間幅 T で n 点測定し、(2) の行列 H を作る。この測定系に周波数 f の正弦波を入力したときの出力の振幅を $A(f)$ とする。 $A(f)$ の 0 Hz から $\frac{2}{T}$ Hz の間を n 等分して離散化したものと行列 H の特異値は n が十分大きい場合、集合としてほぼ一致する。すなわち降順に並べたグラフ同士が一致する。

この関係を低域通過フィルタ (LPF) を用いた実験によ

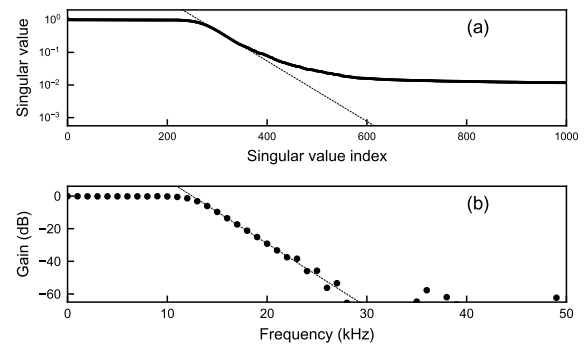


図 2 (a): 行列 H の特異値を降順に並べたもの ($n = 10000$ のうち最初の 1000 個)、(b): LPF の周波数応答関数. (a) の破線は 300 から 350 番目の特異値を log スケールで線形にフィッティングしたもの、(b) の破線は 15 kHz から 25 kHz までのデータを線形でフィッティングしたもの

て検証した結果を図 2 に示す。LPF に周波数 10 Hz、振幅 200 mV の矩形波を入力し、その応答を入力の上立ち上がりから $T = 1 \mu\text{s}$ 毎に $n = 10^4$ 点測定して行列 H を生成した。また、これとは別に LPF に 200 mV の正弦波を入力して周波数応答関数を求め、行列 H の特異値と比較した。(a) は LPF のステップ応答関数から畳み込みの行列 H を作って計算した特異値、(b) は LPF の周波数応答関数である。

系 2 のとおり周波数応答関数の 0 Hz から $\frac{2}{T} = 500$ kHz までの領域と行列 H の n 個の特異値とが対応していることがわかる。なお、特異値が $\sigma = 10^{-1}$ の点は振幅が $\frac{1}{10}$ で周波数応答関数上のゲイン -20 dB の点に対応する。LPF の周波数応答関数は DC で最大、周波数とともに単調減少するとみなして比較すべき特異値を降順に並べてある。特異値の最初の 1000 点と周波数応答関数の 0 Hz から 50 kHz の範囲を同じスケールで、 y 軸についても特異値の 10^{-1} とゲインの -20 dB が同じスケールに乗るように表示してある。小さな特異値の計算には困難がともなうためグラフ右側の形が (a) と (b) で違っているが、カットオフの点がほぼ一致する様子が見てとれる。

(a) の点線は行列 H の 300 番目から 350 番目の特異値を log スケールで $y = \exp(-0.0213x + 5.60)$ にしたがってフィッティングしたものである。同様に (b) の点線は 15 kHz から 25 kHz のデータを $y = -3.88x + 48.5$ にしたがって線形フィッティングした結果である。(a) のグラフの傾きを周波数応答関数の傾きに換算すると $0.0213 \times \frac{-20}{\ln 10 \times 0.05} = -3.70$ となり、(b) の直線の傾きにはほぼ等しいことがわかる。

本章では、帯域制限された測定値から元の信号を求める問題を線形方程式を用いて定式化し、方程式の安定性を司る条件数を求めるために特異値の分布について議論する。ここまでの議論により特異値は測定の周波数応答関数と酷似した分布にしたがうことが分かった。条件数が最大特異値と最小特異値の比で与えられることに注意すると、測定の帯域制限が起きるときに限ってこれは非常に大きな値

をとる。なぜならロールオフの発生によって制限帯域と通過帯域のゲインの比が極めて大きくなるからである。したがって帯域制限が起きるときには、測定された信号から物理現象を求める問題は、たとえ系のインパルス応答関数が測定可能な場合であっても悪条件となる。

4. 提案手法

上記のような悪条件問題は一般に逆行列法では解くことができない。これは系のインパルス応答関数の小さな特異値に対応する信号が減衰し、その結果、情報が欠落するからである。このように一部の情報にしかアクセスできず、一意な解が定まらない場合であっても安定に解が推定できる手法として圧縮センシングが知られている。

圧縮センシングは次のように定式化される。 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 、 $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ ($n < N$) のとき、線形方程式 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ は拘束条件が未知変数の数より多いため一意な解を持たない。ここで \mathbf{x} が変換 Ψ の下でスパース、すなわち $\Psi(\mathbf{x})$ の 0 でない要素が少ないと仮定する。このとき最適化問題

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} (\Psi(\mathbf{x}) \text{ の } 0 \text{ でない要素}) \text{ subject to } \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

を解くことにより、 \mathbf{x} の真の非零要素が十分に小さい時には真の解が一意に定まることが知られている。ただし、上の最適化問題の解を求めることは計算量的に困難である一方、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ を厳密に満たす拘束条件は厳しすぎることから本質的に同じ解を与える問題

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 + \lambda \|\Psi(\mathbf{x})\|_1 \right\}$$

を考える [8]。ここで l_1 、 l_2 ノルムはそれぞれ

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

である。なお、 λ は測定ノイズの正值パラメータである。

圧縮センシングにより線形方程式のスパースな解が安定に求まるためには行列 A が制限等長性を満たす必要がある [9]。一般に行列 A の各要素がガウス分布などのランダム性をもつと制限等長性が満たされることが知られている [10]。そこで今回、物理現象が起源の信号に事前にランダム信号 \mathbf{r} を乗算することを試みた。異なるランダム信号を用意して複数回測定を繰り返せば、測定から得られる情報量を増やすことも可能である。ランダム信号と物理現象起源の信号との乗算は、 \mathbf{r} の各要素を対角成分に並べた行列 $R = \text{diag}(\mathbf{r})$ と \mathbf{x} との積で表されることに注意する。

今回の問題は条件数が大きいだけで圧縮センシングが対象とする拘束条件の少ない問題とは質的に異なっているが、一意解が存在しない点が共通であることに鑑みて圧縮センシングによる問題解決を図った。具体的には、最適化問題

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 + \lambda \|\Psi(\mathbf{x})\|_1 \right\} \quad (3)$$

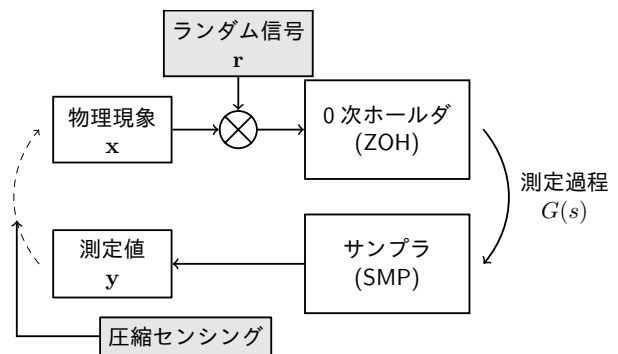


図 3 提案手法の概念図

を解くことにより悪条件下でもスパース性を持つ物理現象 \mathbf{x} を行列 ($\mathbf{H}\mathbf{R}$) から安定に求められることの検証を試みる。 Ψ に離散フーリエ変換、パラメータ λ に交差検証法 [11] を用いて予測精度の最大化を図る。

本研究では、測定の帯域制限を緩和し、入力信号（興味のある物理現象）の時間波形を再生するためのプロトコルとして以下を提案する（図 3 は概念図）。

- (1) 測定系のステップ応答を測定し、離散インパルス応答関数 h_k を求める。
- (2) ランダム信号 \mathbf{r} を生成し、これに乗じた物理現象起源の信号の測定値 \mathbf{y} を得る。
- (3) 式 (3) の最適化問題を解いて \mathbf{x} を推定する。

5. 検証実験

原理の検証実験には図 4(a) に示すようなファイバー光学系を用いた。通信波長帯レーザーの出力を信号発生器 (FG) とパルスパターン発生器 (PPG) に駆動される光強度変調器 (IM) を通過させることで入力信号とランダム信号をそれぞれ生成した。なお、PC は偏波コントローラである。

FG 出力を 30 MHz の三角波とし、PPG のランダム変調を行わない状態で測定されたフォトダイオード (PD) の信号を図 4(b) に示す。FG の高速変調にフォトダイオードは完全には追従せず、振幅が減衰するとともに出力に位相遅れが発生している様子が分かる。

次に FG 出力を固定して 1 GHz 擬似ランダムビット列 (PRBS) を PPG から発生し、最終段の光出力 (\mathbf{y}) を測定した。FG 出力 (\mathbf{x})、PPG 出力 (\mathbf{r}) および事前に測定しておいた系のインパルス応答関数 (h_k) を使い、 $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{x}$ の関係にしたがって \mathbf{y} を推定した結果を図 4(c) に示す。なお、入力信号の推定において定数のスケール調整を行なっている。§2 に示したモデルにしたがって実際の測定値が説明でき、ほぼ正しい推定ができていことが分かる。

同様の測定をランダム信号の値を変えながら 50 回繰り返し、PPG と PD の出力電圧を記録した。その結果をもとに式 (3) の最適化問題を解くことで強度変調されたレーザー光の強度を推定した。この結果を図 4(d) に示す。式 (3) のスパース性を導く変換 Ψ は離散フーリエ変換とし、最適化

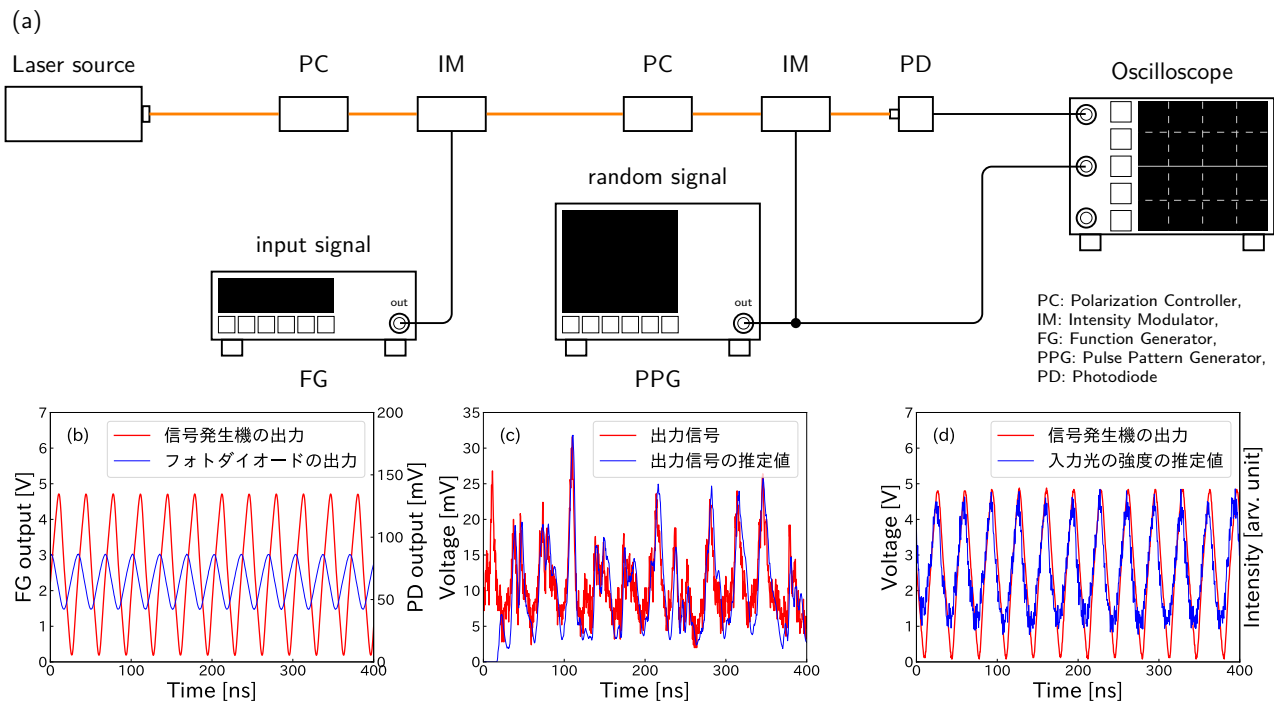


図 4 (a): 検証実験のセットアップ, (b): ランダム信号と乗算しない場合のフォトダイオードの応答, (c): ステップ応答関数から求めたランダム信号を乗じた光出力信号の推定値, (d): 提案手法を用いて推定した入力光強度。

問題を解く際には Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm(FISTA)[12]を用いた。提案手法を用いずにそのまま測定した場合には、PDの出力が変調の速度に追従できないため出力信号からはFGで変調された光強度は分からない。ところが提案手法ではFGからどのような変調が加えられたかをほぼ正しく推定できることが分かる。

6. まとめ

測定周波数帯域の制限を緩和する手法として興味ある物理現象にランダム信号を乗じて測定し、その結果に圧縮センシングを適用する方法論を提案した。測定値から物理現象そのものを復元する問題を線形方程式を用いて定式化するアプローチは前例がないが、このような純粋に数理的なアプローチが物理測定においても有用であることが示せた。

以上の結果を踏まえ、物理測定において高い時間・空間分解能を両立する測定の実現に向けて研究を鋭意進めている。一方、本手法は帯域制限を緩和する手法として汎用的が高いことから通信分野などへの応用展開が期待できる。

参考文献

[1] Binnig, G., Rohrer, H., Gerber, C. and Weibel, E.: Surface studies by scanning tunneling microscopy, Vol. 49, No. 1, p. 57 (1982).
 [2] Yoshida, S., Aizawa, Y., Wang, Z.-h., Oshima, R., Mera, Y., Matsuyama, E., Oigawa, H., Takeuchi, O. and Shigekawa, H.: Probing ultrafast spin dynamics with optical pump-probe scanning tunnelling microscopy, *Nature nanotechnology*, Vol. 9, No. 8, p. 588 (2014).

[3] Kemiktarak, U., Ndikum, T., Schwab, K. and Ekinici, K.: Radio-frequency scanning tunnelling microscopy, *Nature*, Vol. 450, No. 7166, p. 85 (2007).
 [4] Donoho, D. L. et al.: Compressed sensing, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 52, No. 4, pp. 1289–1306 (2006).
 [5] Grenander, U. and Szegö, G.: *Toeplitz forms and their applications*, Univ of California Press (1958).
 [6] Gray, R. M. et al.: Toeplitz and circulant matrices: A review, *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory*, Vol. 2, No. 3, pp. 155–239 (2006).
 [7] Parter, S. V.: On the distribution of the singular values of Toeplitz matrices, *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 80, pp. 115–130 (1986).
 [8] Elad, M.: *Sparse and redundant representations: from theory to applications in signal and image processing*, Springer Science & Business Media (2010).
 [9] Candes, E., Romberg, J. and Tao, T.: Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *arXiv preprint math/0409186* (2004).
 [10] Baraniuk, R., Davenport, M., DeVore, R. and Wakin, M.: A simple proof of the restricted isometry property for random matrices, *Constructive Approximation*, Vol. 28, No. 3, pp. 253–263 (2008).
 [11] Nakanishi-Ohno, Y., Haze, M., Yoshida, Y., Hukushima, K., Hasegawa, Y. and Okada, M.: Compressed sensing in scanning tunneling microscopy/spectroscopy for observation of quasi-particle interference, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 85, No. 9, p. 093702 (2016).
 [12] Beck, A. and Teboulle, M.: A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM journal on imaging sciences*, Vol. 2, No. 1, pp.

183-202 (2009).

付 録 式 (1) の導出

§2 のモデルにおける入力 \mathbf{x} と出力 \mathbf{y} の関係 (1) を導出する。0 次ホルダ通過後の信号 $\{f_{\text{ZOH}}(\mathbf{x})\}(t) =: x(t)$ の Laplace 変換を求めると

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}[u(t - kT)] - \mathcal{L}[u(t - (k+1)T)] \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-kTs} \end{aligned}$$

となる。測定の過程で $x(t)$ が帯域制限された信号を $y(t)$ と書けば、これは $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)]$ から計算される。ここで δ をディラックのデルタ関数として次の関係

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-kTs} &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \delta(t - kT) e^{-ts} dt \\ &= \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{n-1} x_k \delta(t - kT) \right] \end{aligned}$$

を用いると $y(t)$ は

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(1 - e^{-Ts})G(s)}{s} \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{n-1} x_k \delta(t - kT) \right] \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(1 - e^{-Ts})G(s)}{s} \right] * \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \delta(t - kT) \right) \end{aligned}$$

と書き表わせる。ここで $*$ は畳み込みの演算 $(f * g)(t) = \int f(t - t')g(t')dt'$ を表す。

時間幅 T のサンプリングから得られる測定値 \mathbf{y} は、

$$\begin{aligned} y_k &= \int_0^{\infty} y(t) \delta(t - kT) dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(1 - e^{-Ts})G(s)}{s} \right] (t - t') \\ &\quad \sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} \delta(t' - k'T) \delta(t - kT) dt dt' \\ &= \sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] (kT - k'T) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] (kT - (k'+1)T) \right\}. \end{aligned}$$

ここでステップ関数 $u(t)$ には $\mathcal{L}[u](s) = \frac{1}{s}$ の関係があるから $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] (t)$ は系に単位ステップを入力した時の出力 $p(t)$ である。 e^{-Ts} は時間 T の遅延を表すから $p(t)$ を時間幅 T でサンプリングしたものを $\{p_k\}$ とすれば

$$y_k = \sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} (p_{k-k'} - p_{k-k'-1})$$

が得られる。