1E-03

手札公開ババ抜きにおける必勝戦略

木谷　裕紀 †　　小野　廣隆 ‡
† 名古屋大学大学院情報学研究科　‡ 名古屋大学大学院情報学研究科

1　はじめに

全国的に認知度, 人気が高いトランプカードゲームの一つに「ババ抜き」というゲームがある.「ババ抜き」はルールが単純あり, 老若男女問わず遊ぶことができるゲームで「ジジ抜き」などの亜種があるほか, 海外の類似した遊びとして「Old Maid」などがある. これらのゲームは自分の手札と場に出された札以外知ることができない不完全情報ゲームであり, 最適戦略は存在しない. 近年, 将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に, 大貧民などの不完全情報ゲームの研究も進んでいる [?]. しかし, これらのゲームのプレイ戦略に関する研究はいくつか存在する一方で, ババ抜きはその単純さや選択肢の少なさからプレイ戦略に関する研究は知られてない. 本研究では手札を全て公開にして行うというルールに変更したトランプゲーム「ババ抜き」を「手札公開ババ抜き」として定義し, その最適戦略について考察する.

2　ババ抜きのルール

まず, ババ抜きを以下のようにモデル化する. ババ抜きはゲームの進行の際「ペアカード」のみ手札から捨てることが許されている. このペアカードは通常のババ抜きでは 2 枚 1 ペア, もしくは 4 枚 2 ペアで行われているが本論文では 2 枚 1 ペアとし, このペアの数を n とする. また, ババ抜きにおいては「ババ」と呼ばれるカード（多くの場合「JOKER」札にその役割を与える）があり, この札はペアを持たない札で手札から捨てることができない. この札を 1 枚とする. 以下ではこのペア n 組,「ババ」札として JOKER 札 1 枚の手札総数 $2n+1$ 枚からなる手札公開ババ抜きをモデル化する.

各プレイヤを $\{P_0, P_1, \ldots, P_p\}$($p$ は 2 以上の整数) とする. また, 通常札を $\{1, 2, ..., 2n\}$ とし, $2i-1$ と $2i$ は互いにペアとする $(i = 1, 2, ..., n)$. ペア同士の札をペア札と呼ぶ. また JOKER 札を $\{j\}$ とする. また各プレイヤの**手札集合**を $\{1, 2, \ldots, 2n\} \cup \{j\}$ の部分集合の形で与える. プレイヤに配布された札 (**手札**と呼ぶ) の数は必ずしも等しくなくてよい. またプレイヤに順番が来ている状態のことをそのプレイヤが**手番**であると表現し, 手番であるプレイヤを手番プレイヤと呼ぶ. この設定の下, 以下の形でゲームを進める.

- 適当な方法で札を配り, 手札にペアの札が存在するときそのペア札を 2 枚とも場に出す. これを手札にペアの札がなくなるまで繰り返す. 以降ゲーム中に手札にペア札が現れるたびにそのペア札を出していく.
- 手札がすべてなくなった場合そのプレイヤはゲームから離脱する.
- 循環する順番をきめ, 初期手番プレイヤを決める. その後, 初期手番プレイヤは最終手番のプレイヤの手札から 1 枚任意の札を選んでその札を手札に加える.
- 以降の手番のプレイヤは直前の手番プレイヤから手札を 1 枚選び手札に加える. なお, 直前のプレイヤが既にゲームに存在しないとき, その 1 つ前の手番プレイヤの手札から 1 枚選び手札に加える.
- 最初にすべての手札をなくしたプレイヤから上位の順位をつけていき, 最後まで手札が残っていたプレイヤが最下位となる.

以降では完全情報確定ゲームとしてこのババ抜きを行う. このババ抜きを「手札公開ババ抜き」とし, このゲームにおいてすべてのプレイヤの所持札, 所持位置が分かると仮定する.

3　二人, 三人で行う手札公開ババ抜き

二人で行う手札公開ババ抜きにおいて以下が成立する.

定理 1 二人プレイヤで行う手札公開ババ抜きにおいて JOKER 札を持っていないプレイヤは必勝戦略を持つ. また, その戦略は「JOKER 札以外のいずれかを選んで引く」である.

三人プレイヤの手札公開ババ抜きにおいて手番プレイヤに対して JOKER 札を持っているプレイヤがどの手番順序にあるかによって必勝戦略が定まることを示す. 以下ではまず各変数を定義する. プレイヤの順番を $P_0, P_1, P_2, P_0, \ldots$ とする. 以下ではプレイヤ P_i の番号 i は 3 による剰余つまり i mod 3 を表すものとする. プ

Winning strategy for open-hand variant BABANUKI
†Hironori Kiya　†Graduate School of informatics, Na University
‡Hirotaka ONO　‡Graduate School of informatics, Na University

レイヤ P_i とプレイヤ P_{i+1} が共に持つ手札の集合を X_i, プレイヤ i とプレイヤ P_{i+2} が共に持つ手札の集合を Y_i プレイヤ P_{i+1} とプレイヤ P_{i+2} が共に持つ手札の集合を Z_i とする．つまり $X_0(= Y_1 = Z_2)$ は P_0 と P_1 が共に持つ手札の集合であり, 同様に, $X_1(= Y_2 = Z_0)$ は P_1 と P_2 が, $X_2(= Y_0 = Z_1)$ は P_2 と P_0 が共に持つ手札集合である. 手札公開ババ抜きにおいては 2 枚 1 ペアでゲームが進み, ペアカードがそろった時点で手札は捨てられるため, JOKER 札を除くと, 1 プレイヤのみが 1 持つ手札及び 3 プレイヤが持つ手札は存在しない. 従って, 各プレイヤの手札集合を $H_i(i = 0, 1, 2)$ とすると, P_i が JOKER 札を持っていないときは $H_i = X_i \cup Y_i$ となる.

手番プレイヤと JOKER 札を持つプレイヤ (JOKER プレイヤ) の位置関係によって必勝プレイヤの有無が変化する. 手番プレイヤと JOKER プレイヤの位置関係は

(I) 手番プレイヤと JOKER プレイヤが異なり, 手番プレイヤの次に JOKER プレイヤがプレイする順のとき

(II) 手番プレイヤと JOKER プレイヤが異なり, 手番プレイヤは JOKER プレイヤから札を引く順のとき

(III) 手番プレイヤと JOKER プレイヤが同一のとき

の 3 通りがある．このそれぞれの場合における必勝戦略とその保持者を決定する定理を示すことができる.

例えば, (I) の状況における必勝戦略保持者は次の定理のように特徴付けがされる.

定理 2 手番プレイヤが P_0 であり, P_1 が JOKER 札を持っているとする．このとき P_0 が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである.

- $|X_0| = 1$, $|Y_0|$ が奇数, $|Z_0| > 0$.
- $|X_0| = 0$, $|Y_0|$ が 2 以上の偶数, $|Z_0| = 0$
- $|X_0| = 0$, $|Z_0| > 0$

P_1 が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである.

- $|X_0|$ が奇数, $|Y_0| > 1$, $|Z_0| = 0$

P_2 が必勝戦略を持つのは以下の場合のみである.

- $|X_0| > 0$, $|Y_0| = 0$
- $|Y_0| = 1$, $|Z_0| = 0$
- $|X_0|$ が偶数, $|Y_0|$ が奇数, $|Z_0|$ が偶数, $|X_0| \geq |Z_0|$
- $|X_0|$ が奇数, $|Y_0|$ が偶数, $|Z_0|$ が奇数, $|X_0| \geq |Z_0|$

(I) の条件において, 定理の条件に合わない場合, どのプレイヤも必勝戦略を持たないことに注意されたい．このことは, ゲームを通してどのプレイヤも必勝戦略を保持しないことを意味するわけでなく, 各手番の決定により, (未来の) 必勝戦略を保持するプレイヤが変化しうることを意味している.

以上から (I) だけでなく (II), (III) における必勝戦略保持者の特徴付けを行う定理はそれぞれ (I) とは別に示す必要があるが本稿では省略する.

4 四人で行う手札公開ババ抜き

本節では四人プレイヤで行う手札公開ババ抜きにおいて千日手局面が存在することを示す．千日手とはもともとは将棋の用語で同一局面に 4 回突入すると引き分け (連続王手である場合を除く) になるルールであり, 似たルールとしてチェスにおけるスリーフォールドレピティション (Threefold repetition) がある. 以下では同一局面に複数回突入すると引き分けになるルールとする. 本研究では, 四人プレイヤの手札公開ババ抜きにおける千日手局面が存在することを示す

補題 1 プレイヤ P_1, P_2, P_3, P_4 の順でゲームが進行し次の手番は A とする. このとき各プレイヤが順位をよりよくするための最善行動をとるとすると以下の手札配置のとき千日手となる.

- プレイヤ P_1 と P_3 は同一手札であり, その枚数は 2 枚とする.
- プレイヤ P_2 の手札は 2 枚であり, プレイヤ P_4 の手札は 3 枚である.

5 今後の展望

本研究ではババ抜きを完全情報化したゲームを定義しその性質について考察した．その結果 2 から 4 人で行う手札公開ババ抜きに関してその必勝戦略や特徴付けを行った．ババ抜きゲームは 1 位になることを目指すよりも最下位を回避することを目指す側面があるため必勝戦略の他にも「必ず最下位にならないための戦略」についても考察を深めていきたい.

参考文献

[1] 大渡 勝己. 大貧民の空場におけるパスの有効性の検証. 研究報告ゲーム情報学（GI） 2017-GI-37 巻, 11 号, pp.1-8