

Bezier 曲線を生成元とする Voronoi 図の位相構造の決定

辻野弘章[†] 今井敏行[‡][†] 和歌山大学大学院システム工学研究科[‡] 和歌山大学システム工学部

1 はじめに

計算幾何学の中心課題の一つである Voronoi 図は、母点の勢力圏を表す。Voronoi 図は、郵便局問題や移動可能ロボットの経路探索、都市工学において建物の密集度の測定など幅広い分野で使用されている。通常の Voronoi 図では、障害物を避けた経路探索などでは母点を線分や多角形などの一般図形にしたいという必要がある。母点を一般図形とした Voronoi 図を一般化 Voronoi 図と呼び、母点のことを生成元と呼ぶこととする。一般化 Voronoi 図を求める際、点列近似による手法がよく使用されている。この手法では、生成元となる一般図形の辺上に多数の点を隙間なく敷き詰めることにより求める [1]。このような操作を行うことにより、生成元が点である場合の Voronoi 図のアルゴリズムを用いることができ、様々な多角形に対応する新たなアルゴリズムを考える必要がない。しかし、生成元上の多量な点で計算を行う必要があり、計算時間がかかるデメリットがある。そこで、一般化された Voronoi 図の位相構造のみを厳密に求めることにより、計算時間の高速化を図った手法がある。この手法における生成元を線分や円としたときのものはすでに研究されているため、本研究では、生成元を Bezier 曲線としたときの Voronoi 図へと拡張する。

2 準備

2.1 Voronoi 図

平面上に n 個の点 $P_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ が与えられたとき、点 P_i の勢力圏 $V(P_i)$ を点 P と点 P_i のユークリッド距離を表す $d(P, P_i)$ を用いて表すと以下の式 (1) のようになる [2]。勢力圏の隣接関係を位相構造と呼ぶ。

$$V(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P \mid d(P, P_i) < d(P, P_j)\} \quad (1)$$

この $V(P_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ による分割の図を Voronoi 図と呼ぶ。 $n = 30$ の時の Voronoi 図の例を図 1 に示す。

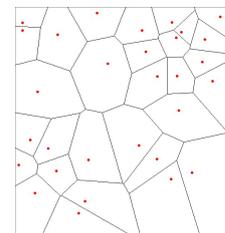


図 1: Voronoi 図の例

2.2 Bezier 曲線

Bezier 曲線は、制御点をつないだ折れ線をもとに作られ、 $t (0 \leq t \leq 1)$ でパラメータを付けられる曲線であり、グラフィックデザインソフトや広く工業製品などで使用されている曲線の表現法の一つである。非常に自由度の高い曲線で制御点を操作することで様々な曲線を描画できる。ベジェ曲線での次数 A は、制御点の個数 $- 1$ となる。図 2 に 3 次の Bezier 曲線の例を示す。

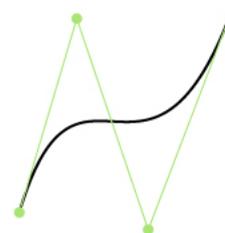


図 2: 3 次の Bezier 曲線の例

Determining the Topological Structure of the Voronoi Diagram Generated by Bezier Curves

Hiroaki Tsujino[†], Toshiyuki Imai[‡][†] Graduate School of Systems Engineering, Wakayama University[‡] Faculty of Systems Engineering, Wakayama University

3 先行研究

本節では、先行研究として線分と円の Voronoi 図の位相構造決定に関する研究について述べる。

3.1 線分と円の Voronoi 図の位相構造決定の研究

線分と円の Voronoi 図の位相構造決定に関する研究では、明らかに生成元同士が離れている部分では粗く生成元上に点を取り、より生成元同士が近い部分では、細かく点を取る。従来手法 [1] では、生成元上に隙間なく点を敷き詰め求めたことにより計算時間がかかっていた。しかし、このようにすることにより従来手法よりも生成元上にとる点の数を減らし、求めることができる。これを満たすために、まず線分の場合両端の点、円の場合中心点をそれぞれ用いて Voronoi 図を求める。そして図 3 において「生成元 1, 生成元 2 とのみ交わり, 生成元 3, 生成元 4 とは離れている空円が描ければその境界線の位相構造は正しい [3]」という判定条件を用いて位相構造が正しいかどうかの判定を行う。空円を Voronoi 辺上で移動させたとき生成元 1~4 すべてと交差したとき, Voronoi 点から最も近い生成元上の位置に新たな点の付加を行い, 再び Voronoi 図を求める。求めなおしたものに対し, 再び判定を行い, すべての境界線上で位相構造が正しいと判定されるまで, 点の付加, Voronoi 図の書き換え, 判定を繰り返す。

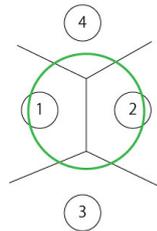


図 3: 判定条件の簡略図

4 提案手法

本研究で用いる手法は、先行研究の手法を Bezier 曲線に対応するよう応用したものである。つまり、Bezier 曲線上にとる点の数を従来手法よりも減らし、点の Voronoi 図の作成アルゴリズムを用いて位相構造を求める。以下の図 4 に手順の例を示す。はじめに、生成元として与えられた Bezier 曲線の始点と終点の制御点のみで Voronoi 図を求める。この時に求められた位相構造が正しいか決定していない Voronoi 図を仮の Voronoi 図と呼ぶ。そして、仮の Voronoi 図の位相構造が正しいかどうかを、第 3 節で示した、「生成元 1, 生成元 2 とのみ交わり, 生成元 3, 生成元 4 とは離れている空円が描ければその境界線の位相構造は正しい [3]」という条件を用いて判定を行う。交差判定を行い, 条件を満たさなかった場合, 最初の付加は生成元の Bezier 曲線

のパラメータ t が $t = 0.5$ の位置に新たに点の付加を行う。そして、新しく付加した点も含めて、仮の Voronoi 図を求めなおす。求めなおした仮の Voronoi 図で再び判定をし、すべての境界線上で条件を満たすか判定を行う。条件を満たせばそこで位相構造が決定する。すべての境界線上で条件が満たされるまで、再帰的に生成元上に点の付加と仮の Voronoi 図の求めなおしを行うことで、正確に位相構造の決定を行う。

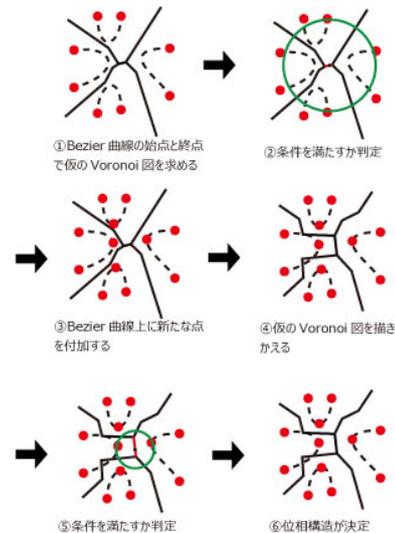


図 4: 本研究の提案手法の手順の例

5 結果・まとめ

本研究の手法で、Bezier 曲線が生成元の Voronoi 図の位相構造のみを正確に求めることができた。ただし、Bezier 曲線上に付加する点の数が直前に付加した点の数の 2 倍の数で増えていくため、位相構造が崩壊しない最低の個数ではない。条件判定をする際の Bezier 曲線と円の交差判定を行ったときに Bezier 曲線上の点のどの区間で交差しているのかを求め、求めた区間の中央に点を一点ずつ付加していくようにすることでこの問題は解消されると考えられる。今後の課題としては、このような点付加の工夫が課題として挙げられる。

参考文献

- [1] 計算幾何学 (杉原厚吉, 朝倉書店, 2013)
- [2] 計算幾何学と地理情報処理 (伊理正夫 監修, 越塚武志 編集, 共立出版, 1986)
- [3] 位相的に厳密な円や線分の Voronoi 図の統一的近似構成 (今井敏行, 和歌山大学, 日本応用数学会 2016 年度年会講演予稿集, 2016)