1P-01

# 帰納的ゲーム理論における意思決定過程の認識論理による分析

藤代 康誠 † 長谷部 浩二 ‡
† 筑波大学情報学群情報科学類 ‡ 筑波大学システム情報系

## 1 背景と目的

ゲーム理論は、人々の行動が互いに影響しあう状況における合理的な意思決定を数学的に定式化する理論である。その応用範囲は、経済学ばかりでなく情報科学など様々な分野に及んでいる。

古典的なゲーム理論では、一般にプレイヤーは利得や戦略といったゲームの構造に関する知識をあらかじめすべて知っているものと仮定している。しかし、現実の世界では、プレイヤーはそのような知識を経験によって徐々に獲得していくことが多い。例えば、ゲーム理論を用いて複数のロボットを協調させることを考える。各ロボットはセンサを介して環境の情報を得る必要がある。しかし、センサの性能には限界があり、また、環境は変化するものであるため、環境のすべての情報を前もって得られるとは限らない。したがって、プレイヤーの知識が経験によって徐々に蓄積されていく状況での合理的な意思決定について分析することが重要である。

そのような状況を定式化したゲーム理論として、金子らは帰納的ゲーム理論 [2] を提案した。帰納的ゲーム理論では、プレイヤーがゲームの構造に関する知識を持たない状態からゲームを始め、経験から得られる限られた知識をもとに意思決定をする状況を考える。

しかしながら、帰納的ゲーム理論では、各プレイヤーが意思決定の過程でどのような推論を行うのかについては、十分検討されていない。そこで本研究では、帰納的ゲーム理論におけるプレイヤーの推論を、認識論理と呼ばれる論理体系を用いて分析する手法を提案する。先行研究では、古典的なゲーム理論を対象とした認識論理による分析手法が提案されている [3]。本研究では、こうした既存の手法を帰納的ゲーム理論に応用することを試みる。

An Analysis of Decision Making Process in Inductive Game Theory with Epistemic Logic
†Kosei Fujishiro, University of Tsukuba, College of Information Science
‡Koji Hasebe, Faculty of Engineering, Information and Systems

## 2 認識論理による定式化

### 2.1 帰納的ゲーム理論の概要

論文 [2] における帰納的ゲーム理論の定式化は展開形ゲームを対象にしているが、本研究ではそれを戦略形ゲームの形に直したものを考える。戦略形ゲームでは、複数のプレイヤーが可能な行動の中から一つを選び、同時に実行する状況を分析する。行動の結果として各プレイヤーは特定の利得を得る。ここで、可能な行動の一つ一つを戦略という。また、利得はプレイヤーにとっての状況の好ましさを表すものであり、プレイヤー全員の取った行動に依存して決まる。戦略形ゲームの例として、金銭を賭けたジャンケンを考えると、グー・チョキ・パーの手の出し方が戦略であり、勝ち負けによる金銭の損得が利得に相当する。

戦略形ゲームは、形式的には次の 3 つの要素で表される。

- プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- プレイヤー $i \in N$ が取り得る戦略の有限集合 $S_i$
- 各プレイヤーの戦略の組 $s \in S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ に対し、プレイヤー $i$ の利得 $g_i(s)$ を対応させる関数 $g_i : S \to \mathbb{R}$

古典的なゲーム理論では、上記の $N, S_i, g_i$ はすべてのプレイヤーがあらかじめ知っているもの（共有知識である）と仮定する。一方、帰納的ゲーム理論では、これらの知識は経験を通して得られるものと考える。帰納的ゲーム理論における経験は、behavior pattern と呼ばれる戦略にしたがってゲームを繰り返しプレイする中で得られる。繰り返しの中で各プレイヤーは behavior pattern とは異なる戦略を試し、その結果を経験として記憶する。そして、得られた経験をもとにその後の意思決定を行う。

### 2.2 認識論理の体系

認識論理は様相論理の一種である。ここでは、本研究で用いる認識論理の形式的な定義について述べる。

論理式は次のように定義される。

(i) 命題変数は論理式である。

(ii) $\phi, \psi$ が論理式であるとき、$(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \to \psi), (\neg\phi), (\mathsf{B}_i(\phi))$ は各々論理式である。

論理体系は、様相論理の式計算の体系 K に必然性の様相演算子 $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \ldots, \mathsf{B}_n$ を導入したものを用いる。$\mathsf{B}_i(\phi)$ は「プレイヤー $i$ が $\phi$ を信じている」ということを表す（体系 K の詳細については [1] を参照のこと）。

さらに、戦略形ゲームにおける戦略や利得の要素を扱うために次のような命題変数を定義する。ここで述べる定義は [3] をもとにしている。

- 任意の $s, s' \in S$ について、$g_i(s) \geq g_i(s')$ を表す命題変数 $\mathsf{R}_i(s : s')$
- 任意の $u \in S_i$ について、プレイヤー $i$ が戦略 $u$ を選択することを表す命題変数 $\mathsf{D}_i(u)$

$\mathsf{R}_i(s : s')$ を用いることで、与えられたゲームに対するプレイヤー $i$ の利得の情報 $\Gamma_i$ を定義できる。$\Gamma_i$ は次を満たす論理式の集合とする。

$$\Gamma_i = \{\mathsf{R}_i(s : s') \mid g_i(s) \geq g_i(s')\} \cup \{\neg \mathsf{R}_i(s : s') \mid g_i(s) < g_i(s')\}$$

また、戦略 $s \in S_i$ がどのような条件を満たしているときに、プレイヤー $i$ がその戦略を選択するのか（しないのか）を表す論理式の集合を次のように定義する。

$$C_i = \{A_s \equiv \mathsf{D}_i(s) \mid s \in S_i\} \tag{1}$$

$$C'_i = \{A_s \equiv \neg \mathsf{D}_i(s) \mid s \in S_i\} \tag{2}$$

ただし、$A_s$ は $s$ を含む論理式とする。また、$A \equiv B$ は $(A \to B) \wedge (B \to A)$ の略記とする。このような形の論理式の集合を意思決定基準と呼ぶ。

## 3 帰納的ゲーム理論の論理的分析

ここでは前節での定式化をもとにして得られる結果について説明する。まず、定理の記述に必要ないくつかの定義を与える。

- プレイヤーの有限列 $x = \langle i_1, i_2, \ldots, i_m \rangle$ に対し、$\mathsf{B}_x(\phi)$ は $\mathsf{B}_{i_1}\mathsf{B}_{i_2}\ldots\mathsf{B}_{i_n}(\phi)$ を表す。
- 論理式の有限集合 $\Gamma$ とプレイヤーの列 $x$ に対し、$\mathsf{B}_x(\Gamma)$ は $\bigwedge_{A \in \Gamma} \mathsf{B}_x(A)$ を表す。

次の定理は、プレイヤーが被支配戦略の除去を行うために十分な知識の入れ子構造を示すものである。この定理によって、戦略の除去を行う推論において、論理式に含まれる $\mathsf{B}_i$ の入れ子の深さは有限であることがわかる。これは、ゲームの構造に関する知識が共有知識でなくとも意思決定ができる場合があることを示している。

**定理 1.** プレイヤーが 2 人の戦略形ゲームを考える。$S_1^1, S_2^2, S_1^3, S_2^4, \ldots, S_k^m$ を、$S_1^l \subset S_1, S_2^l \subset S_2 (1 \leq l \leq m)$ を満たす列とする。ただし、$k$ は 1 か 2 のいずれかである。この列の下付きの添字を末尾から順に取ったプレイヤーの列 $k, \ldots, 2, 1, 2, 1$ を $x$ とし、$x$ の先頭から $l$ 番目までの列を $x^l$ で、$l$ 番目の要素を $x(l)$ で表す。戦略の除去が $S_1^1, S_2^2, S_1^3, S_2^4, \ldots, S_k^m$ の順に実行できるとき、次の式が証明できる。

$$\left\{\mathsf{B}_{x^l}(\Gamma_{x(l)} \cup C'_{x(l)})\right\}_{l=1}^{m} \vdash \bigwedge_{s \in \bigcup_{1 \leq l \leq m} S_k^l} \mathsf{B}_k(\neg \mathsf{D}_k(s))$$

ただし、$C'_{x(l)}$ は戦略の除去を行うための意思決定基準である。詳細は省略するが、$C'_{x(l)}$ はここまでの定義で書き下すことができる。なお、この定理は、列が $S_2^1, S_1^2, S_2^3, S_1^4, \ldots, S_k^m$ の場合も同様に成り立つ。

また、論文 [2] の定理 7.2 および例 7.1 で述べられている経験をもとにした意思決定と behavior pattern の遷移の関係について、論理的な立場から説明を与える結果が得られている。その概要は、behavior pattern からの逸脱によって得られる経験を論理式の集合 $\mathrm{EX}_i$ として表し、経験をもとにした意思決定を、$\mathsf{B}_i(\mathrm{EX}_i)$ を公理とした証明と考えるというものである。この定式化によって、behavior pattern の遷移およびそれに伴う知識の変化を、ある規則にしたがった $\mathrm{EX}_i$ の書き換えに対応させることができる。

## 4 結論と今後の課題

本研究では、帰納的ゲーム理論における意思決定の過程を認識論理で分析するための定式化を行った。また、その定式化のもとで、被支配戦略の除去に関する定理と、経験に基づく意思決定についての結果を得た。

今後の課題としては、ある behavior pattern にしたがって行動しているプレイヤーが均衡に至るにはどのような知識が必要かについて分析を行い、その結果をマルチエージェントの協調などに応用することを考えている。

## 参考文献


[1] B. F. Chellas. *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, 1980.

[2] M. Kaneko and J. J. Kline. Inductive game theory: A basic scenario. *Journal of Mathematical Economics*, 44(12):1332–1363, 2008.

[3] M. Kaneko and N. Suzuki. Bounded interpersonal inferences and decision making. *Economic Theory*, 19(1):63–103, 2002.