

最小2部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解ける 新しいグラフクラス

大月英明[†]

概要

一般に最小2部クリーク辺被覆問題は NP-困難である。一方、2部グラフ B に対して、路重複数 $R(B)$ が $R(B) \leq 1$ であれば、その最小2部クリーク辺被覆問題は多項式時間で解けることがわかっている。

ここではグラフ G が2部グラフでない場合でも、その誘導部分グラフとして、ドミノ、 K_4 、そして端点を共有する2本のコードが存在する C_5 のいずれも含まない場合、その最小2部クリーク辺被覆問題は多項式時間で解けることを示す。

1 はじめに

一般の2部グラフに関して、その最小2部クリーク辺被覆問題は NP 困難問題であることが知られている [3]。しかし、ドミノフリーグラフ [1]、さらに路重複数 $R(B) \leq 1$ [4] の2部グラフの場合は、最小2部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けることが示されている。

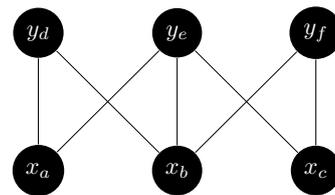
一方、グラフが2部グラフでない場合、その最小2部クリーク辺被覆問題の計算量については多くは知られていない。ここでは一般のグラフ G を2部グラフに変換し、その修正ガロア束を構成することにより、最小2部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けるグラフクラスを求める。

2 準備

ここで扱うグラフはすべて単純グラフである。 $G = (V, E)$ を頂点数 n 、辺数 m の無向グラフとする。 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 、 $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする。

G の部分グラフで $K = (X_K, Y_K, X_K \times Y_K)$ となる2部グラフを G の2部クリークと呼ぶ。 $E_G = \bigcup_{i=1}^w E_{K_i}$ なる B の2部クリークの集合 $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_w\}$ を B の2部クリーク辺被覆と呼ぶ。最小2部クリーク辺被覆問題とは、最小サイズの2部クリーク辺被覆を求める

図1 ドミノ



問題である。 K が G の極大2部クリークであるとは、 G の2部クリーク $K' (\neq K)$ で、 $E_K \subseteq E_{K'}$ を満たすものが存在しないときをいう。

ドミノとは以下のような2部グラフ $D = (X_D, Y_D, E_D)$ (図1) である。ここで $X_D = \{x_a, x_b, x_c\}$ 、 $Y_D = \{y_d, y_e, y_f\}$ 、 $E_D = \{(x_a, y_d), (x_b, y_e), (x_c, y_f), (x_a, y_e), (x_b, y_d), (x_c, y_e), (x_b, y_f)\}$ である。

3 2部グラフ $B_G = (X_B, Y_B, E_B)$ の構成

グラフ G から、2部グラフ $B_G = (X_B, Y_B, E_B)$ を以下の様に構成する。 $X_B = \{x_i \mid v_i \in V\}$ 、 $Y_B = \{y_i \mid v_i \in V\}$ 、 $E_B = \{(x_i, y_j) \mid (v_i, v_j) \in E\} \cup \{(x_j, y_i) \mid (v_i, v_j) \in E\} (1 \leq i, j \leq n)$ 。

補題 1. G がその誘導部分グラフとしてドミノ、 K_4 、そして端点を共有する2本のコードが存在する C_5 のいずれも含まないならば、 B_G はその誘導部分グラフとしてドミノを含まない。

証明. B_G がその誘導部分グラフとしてドミノを含むならば、 G にはその誘導部分グラフとしてドミノ、 K_4 、そして端点を共有する2本のコードが存在する C_5 のいずれかが含まれることを示す。

B_G に含まれるドミノを $D = (X_D, Y_D, E_D)$ とする。グラフの構成から $(x_k, y_k) \notin E_B (1 \leq k \leq n)$ なので

1. $\{a, b, c\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$
2. $a = f, c = d, b \notin \{d, e, f\}$ かつ $e \notin \{a, b, c\}$
3. $a = f, \{b, c\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$ または $c = d, \{a, b\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$

New Polynomial-Time Solvable Graph Class of the Minimum Biclique Edge Cover Problem

[†] 南山大学理工学部ソフトウェア工学科

図2 K_4

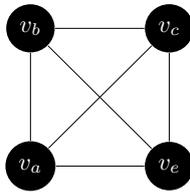
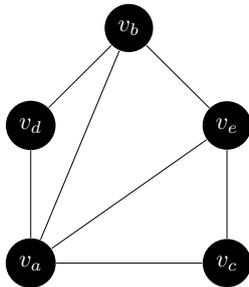


図3 端点 v_a を共有する 2 本のコード $(v_a, v_b), (v_a, v_e)$ を持った $C_5 = (v_a, v_d, v_b, v_e, v_c)$



のいずれかである。

1. $\{a, b, c\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$ の場合, G において

$$\begin{aligned} & (v_a, v_d), (v_b, v_e), (v_c, v_f), (v_a, v_e), \\ & (v_b, v_d), (v_c, v_e), (v_b, v_f) \in E \end{aligned}$$

であるから, $\{v_a, v_b, v_c, v_d, v_e, v_f\}$ による誘導部分グラフはドミノである。

2. $a = f, c = d, b \notin \{d, e, f\}$ かつ $e \notin \{a, b, c\}$ の場合, G において

$$\begin{aligned} & (v_a, v_c), (v_b, v_e), (v_a, v_e), \\ & (v_b, v_c), (v_c, v_e), (v_b, v_a) \in E \end{aligned}$$

であるから, $\{v_a, v_b, v_c, v_e\}$ による誘導部分グラフは K_4 (図2) である。

3. $a = f, \{b, c\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$ の場合, G において

$$\begin{aligned} & (v_a, v_d), (v_b, v_e), (v_c, v_a), (v_a, v_e), \\ & (v_b, v_d), (v_c, v_e), (v_b, v_a) \in E \end{aligned}$$

であるから, $\{v_a, v_b, v_c, v_d, v_e\}$ による誘導部分グラフは, 端点 v_a を共有する 2 本のコード $(v_a, v_b), (v_a, v_e)$ を持った $C_5 = (v_a, v_d, v_b, v_e, v_c)$ (図3) である。 $c = d, \{a, b\} \cap \{d, e, f\} = \emptyset$ の場合も結果は同様である。

□

G の極大 2 部クリークを $K = (X_K, Y_K, E_K)$, $X_K = \{v_1, \dots, v_s\}$, $Y_K = \{v_{s+1}, \dots, v_t\}$ とする。

グラフの構成から, B_G の 2 つの部分グラフ $K^1 = (X_{K^1}, Y_{K^1}, X_{K^1} \times Y_{K^1})$, $X_{K^1} = \{x_1, \dots, x_s\}$, $Y_{K^1} = \{y_{s+1}, \dots, y_t\}$ と $K^2 = (X_{K^2}, Y_{K^2}, X_{K^2} \times Y_{K^2})$, $X_{K^2} = \{x_{s+1}, \dots, x_t\}$, $Y_{K^2} = \{y_1, \dots, y_s\}$, は B_G の極大 2 部クリークである。すなわち G の一つの極大 2 部クリークに対応して, B_G にはちょうど二つの極大 2 部クリークが存在する。これに注意すると, 次の定理が導かれる。

定理 2. グラフ G がその誘導部分グラフとして, ドミノ, K_4 , そして端点を共有する 2 本のコードが存在する C_5 のいずれも含まない場合, G の最小 2 部クリーク辺被覆問題は多項式時間で解ける。

(証明の概要) 補題 1 より, グラフ G がその誘導部分グラフとして, ドミノ, K_4 , そして端点を共有する 2 本のコードが存在する C_5 のいずれも含まない場合, B_G はその誘導部分グラフとしてドミノを含まない。

B_G を修正ガロア束 \mathcal{G} [4] に変換し, ネットワークフローのアルゴリズム [2] を用いると, \mathcal{G} の最小 2 部クリーク辺被覆問題の 2 倍近似解を多項式時間で求めることができる。 \mathcal{G} の一つの路が, もとのグラフ G のちょうど二つの辺に対応していることに着目して修正したアルゴリズムを用いると, G の最小 2 部クリーク辺被覆問題の最適解を多項式時間で求めることができる。

参考文献

- [1] J. Amilthastre, M. C. Vilarem, and P. Janssen. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs. *Discrete Appl. Math.*, Vol. 86, No. 2-3, pp. 125–144, 1998.
- [2] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. ACM*, Vol. 19, No. 2, pp. 248–264, April 1972.
- [3] J. Orlin. Contentment in graph theory: covering graphs with clique. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, Vol. 80, No. 5, pp. 406 – 424, 1977.
- [4] H. Otsuki and T. Hirata. The biclique cover problem and the modified Galois lattice. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, Vol. 98, No. 3, pp. 497–502, 2015.