6B-05

ポリオミノ型多角形からの多面体の構成

大塚　寛†　　藤田　修平†

愛媛大学 大学院理工学研究科(理学系)†

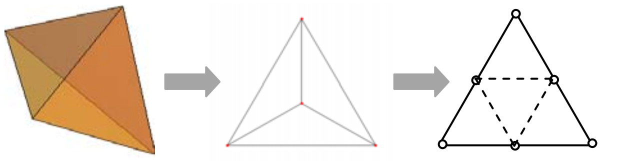
背景

E. Demaine, J. O'Rourke[1]では「多面体の辺展開」および「多角形から折る多面体」が取り上げられ、立方体の辺展開の一つであるラテンクロスから、辺々接着によって 2 重被覆多角形も含めて 5 種類の合同でない凸多面体(一般接着では 23 種類の凸多面体)が、展開図(折り線が加えられたラテンクロス)と共に紹介されている。またこれを発展させて、伊藤,奈良,他[2]や西村,坂口[3]では、立方体のラテンクロス以外の展開図やポリオミノからの凸多面体の構成が紹介されている。しかし展開図に与えられる折り線については、[1]でも立体を再構成する実用的なアルゴリズムは知られていないことが述べられ、頂点数が少ない多面体の再構成の概要が示されている程度であり、個々の多角形を個別に調べるしかなく、あまり研究されていない。

我々は、立体の幾何的な構造まで踏み込むのではなく、組合せ的/グラフ的な構造からどの程度折り線が求められるのか調べ、上述の既知の展開図が得られるか試みたので、これについて報告する。

準備

凸多面体の頂点と辺をグラフと見なした時、多面体の辺展開はそのグラフの全域木に沿って切り込みを入れることで得られ、全域木の辺は展開図の境界の 2 カ所に現れる。



4 面体　　4 面体グラフ　　展開図

逆に多角形からの凸多面体の構成については、次のアレクサンドロフの定理が基本的である。

定理 任意の多角形の以下の条件を満たす境界の接着(**アレクサンドロフ接着**と呼ぶ)に対して、得られる多面体は一意に定まる。

1. 多角形の境界部分のすべてが接着に使われる
2. 接着される各点での内角の和は 2π 以下である (曲率 = $2\pi -$ 内角の和)
3. 接着で得られる多面体は球面と同相である

そこでラテンクロスからの類推により、辺の本数が偶数ですべての辺の長さが等しい多角形から、同じ長さの辺同士の接着である**辺々接着**に限って多面体を構成することを考える。これにはいくつかの段階を経る。

1. 多角形の辺同士の接着の可能性を調べ、接着木を構成する
2. 多角形の各頂点が接着後に集まる点が多面体の頂点になる場合、それらの頂点間に辺があるか調べる
3. 最終的にその辺を折って多面体を作成する

ここでシュタイニッツの定理「グラフ G が凸多面体のグラフであるための必要十分条件は G が単純で平面的かつ 3 連結である」により、グラフの頂点と辺はそれぞれ多面体の頂点と辺に対応する。更に辺は展開図上の折り線となることから、多面体そのものでなく、多面体グラフあるいはそれが展開図上に現れた折り線を求める。すなわち、1.により得られる接着木から、2.の定理その他の条件を満たす辺を求めることを考える。

多角形　　接着木　　多面体グラフ

問題設定

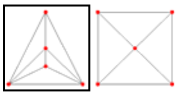
アレクサンドロフ接着の条件 3.を満たす辺々接着では、2 辺を接着することで独立な部分問題に分割されて接着が進み、P の境界は各辺の長さが等しい辺からなる木を 2 重に被覆する。この木を**接着木**と呼ぶ。

接着木の各辺には P の境界の辺 2 本が集まるが、接着木の各頂点には P の境界の点がその頂点の次数個集まる。アレクサンドロフ接着の条件 2.より、曲率が 0 でない頂点は多面体の頂点になり、多面体の頂点はそれらに限られる(曲率 0 の頂点は多面体の面の内部か辺の内部に現れる)。したがって、求めるグラフの頂点は接着木の曲率が 0 でない頂点である。更にこの中で、

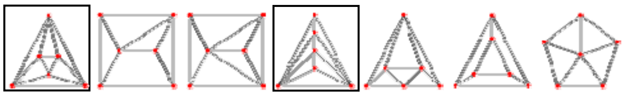
Constructing polyhedra from polyomino-type polygons
† Hiroshi Ohtsuka, Fujita Shuhei
† Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

多面体の各面が 3 角形に限られる単体的多面体、グラフでは平面グラフの各面が 3-サイクルの 3 角形グラフのみを対象とする。これは、多面体の面が 4 角形以上の多角形(グラフでは面が 4-サイクル以上)になるのは、いくつかの隣接した 3 角形が同じ平面上にあるという幾何的な制約であり、今回はこのような立体の幾何的な情報は扱わないとしているからである。

頂点数が少ない凸多面体のグラフは既に知られている。例えば、頂点数 5 では次の図のように 2 つの同型でないグラフがあり、うち 3 角形グラフ(四角の枠で囲ったグラフ) が 1 つある。



頂点数 6 では次の図のように 7 つの同型でないグラフがあり、うち 3 角形グラフは 2 つある。



頂点数 7 では 34 通りの同型でないグラフがあり、うち 3 角形グラフは 5 つある、等々である。

ところで、平面グラフに関するオイラーの定理「連結な平面グラフの頂点数をv, 辺数をe, 面数を f とすると、$v-e+f=2$ が成り立つ」により、3 角形グラフの辺の本数は $e=3v-6$ となる。接着木の辺はグラフの辺の候補であり、さらに接着木の 2 つの頂点の間に辺がなくとも、展開図の折り線すなわちグラフの辺ができる場合がある。したがって今回の問題は、接着木から定理の条件を満たす指定本数の辺を構成する問題に帰着される。更に多面体の頂点の個数は 4 以上であるが、どの頂点の次数も 3 以上であり、また頂点数が 4 以上のどのような平面的グラフも、次数が 5 以下の頂点を 4 個以上持つなどの制約がある。

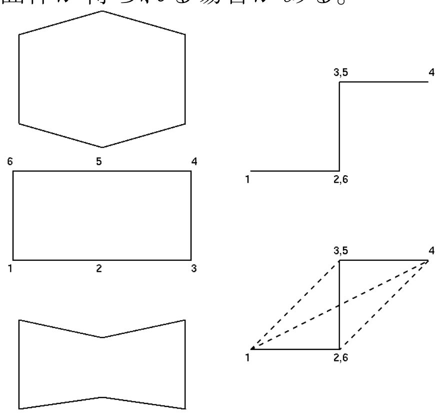
アルゴリズムと結果

辺を求めるアルゴリズムは基本的に、頂点のペアを上記の制約が満たされるように選んで辺の候補とし、これが等辺多角形上で交差しないよう配置できるかをチェックする。

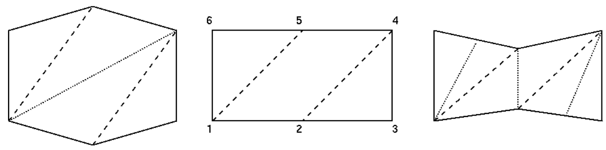
以下では辺数が少ないポリオミノやそれらの内角を変更した等辺多角形に対して我々のアルゴリズムを適用した結果をいくつか挙げる。

辺数 4 の等辺多角形はひし形とその特定の状況である正方形(モノミノ)で接着木の頂点数は 3 なので、2 重被覆多角形しか現れない。

辺数 6 の等辺多角形は辺数 4 の等辺多角形を 1 辺で貼り合せた多角形(その特定の状況であるドミノ)やそうでない多角形がある。前者では 2 重被覆多角形しか現れないが、後者では次の例の様に 4 面体が得られる場合がある。



この例では、左中段のドミノの長辺の中点を外側に広げたり(上段)、内側に狭めたり(下段)した多角形から、右上の同じ形の接着木を得、右下の様に接着木に点線を追加して 4 面体グラフを得る。しかし、次に多角形上に折り線を入れると、以下の様に同種の折り線(点線)の他にも異なる形態の折り線(実線)が得られる。なお、ドミノの頂点 2,5 (あるいは 1,4)を結ぶ折り線も得られるが、手動で削除している。これは 2 重被覆多角形が特殊な状況であることも示している。



考察

今回は時間の都合上、辺数の多い等辺多角形までは手が回らなかった。これは個々の等辺多角形を個別に調べるしかないからでもある。例えば辺数 6 の多角形には前ページの多角形やその各辺の中点で内角を調整した多角形などもある。そのためまずは[1], [2], [3]に従って、ポリオミノ型やポリアモンド型の多角形を対象に多面体の構成を検討する予定である。また辺数が多くなると、アルゴリズムの不備も現れてくる。それがどのような状況で生じるのか、調べる必要がある。

参考文献

[1] E. Demaine, J. O'Rourke 著, 上原隆平訳, 幾何的な折りアルゴリズム, 近代科学社, 2009

[2] 正多面体の辺による展開の再折り凸多面体, 伊藤 仁一, 奈良 知恵, 他著, 熊本大学教育学部紀要 自然科学 第 61 号, pp. 65-74, 2012

[3] ペントミノの辺々接着で折る多面体について, 西村 保三, 坂口 一成著, 福井大学教育地域科学部紀要(自然科学 数学編), 6, pp.125-137, 2015