6B-03

整合的なデジタル曲線族の構築法

○菊地 賢也 [†]　　全 眞嬉 [†]　　徳山 豪 [†]
Kenya Kikuchi　　Jinhee Chun　　Takeshi Tokuyama

1　はじめに

有限精度で幾何計算を行う際，幾何的な整合性が保たれない場合が存在する．これは幾何的物体をデジタル空間へと置き換える際，ユークリッド空間上での幾何的性質が保持されなくなることが原因である．図 1 は素朴なデジタル表現を行った直線が交点を複数持つ場合を示す．そのため，ユークリッド空間での幾何的性質と似た性質を保持しつつ幾何的物体をデジタル空間で表現する方法を定めることは重要な問題となっている [1]．本研究では，[2] によって提案されたデジタル半直線の理論を一般化し，原点を通る曲線族へと拡張する．

2　問題設定

デジタル空間として，2 次元グリッド $G = \{(i,j) : i,j \in 0,1,...,n, i+j \leq n\}$ を考える．G 上の頂点のうち，$i+j = n$ となる点を境界点と呼ぶ．このグラフは 4 近傍の無向グラフとする，すなわち，各点 (i,j) は $(k,l) \in \{(i-1,j),(i,j-1),(i+1,j),(i,j+1)\}$ と連結する．

デジタル線 $S(p)$ は G 上の原点 o から p への道であり，$S(o) = \{o\}$ は長さが 0 の道である．ここで，以下の 3 つの条件を満たすデジタル線の族を，整合的であると呼ぶ．

1. $q \in S(p)$ ならば，$S(q) \subseteq S(p)$ である．

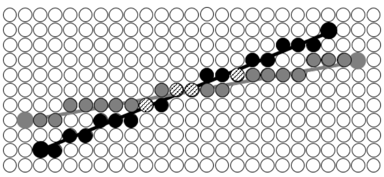


図 1: 素朴なデジタル直線が交点を複数持つ場合 斜線の点が交差部分

2. 各 $S(p)$ に対し，$S(p) \subseteq S(r)$ となる境界点 r が存在する．
3. 各 $S(p)$ はグラフ G 上の o と p を繋ぐ最短の道である．

デジタル線の族が整合的であるとき, 各線 $S(p)$ の和は葉が全て境界点に存在するグラフ G の全域木 T となる．また，2 線の交点は 1 つのデジタル線となる．このような木 T とデジタル線の族を CDR(*Consistent Digital Rays*) と呼ぶ.

3　関連研究

[2] はデジタル直線，すなわち各 $S(p) \in T$ が直線を良く近似する CDR の構成方法を示した．CDR は葉が全て境界点に存在する全域木のため，$x+y = k$ となる頂点郡 $L(k), k = 0,1,...,n$ のうち，次数が 3 である頂点はただ 1 つとなる (図 2)．この点を分岐点と呼ぶ．分岐点の位置によって $S(p)$ の形状が変化するが，この点の位置を疑似乱数 $V(k) \in [0,1]$ を用いて可能な限り一様に出現させることで，実際の線との Hausdorff 距離が $O(\log n)$ となる CDR が構成される．

3.1　関連研究に関する考察

Chun et al.[2] によって示されたデジタル直線の構成方法は，各頂点郡 $L(k)$ での分岐点を一様に出現させるものであった．この結果について考察する．

直線 $y = ax$ が $x+y = k$ と点 $q = (x_0, k-x_0)$ 上で

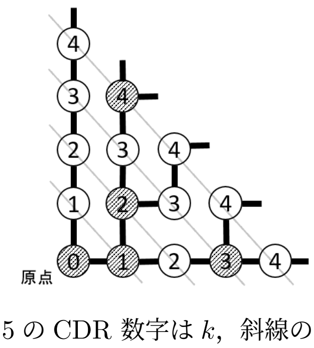


図 2: $k \leq 5$ の CDR 数字は k，斜線の点は分岐点

† 東北大学大学院 情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

交差している場合を考える．$a = \frac{k-x_0}{x_0}$ となるため，傾きが a となるように線が延長されることが自然であるが，ここで構築すべき線はグリッド上の道である．そのため，この場合は点 q が辺を縦と横に伸ばす比率を a とすることが理想となる．[2] では $L(k)$ での分岐点を疑似乱数 $V(k)$ を用いて $x = \lceil kV(k) \rceil$ となる点に設定しているが，これにより各点へ縦と横に辺が伸びる確率の比はおよそ a となる．すなわち，各点へ辺が伸びる確率の比を元の線と同様に設定することで，CDR は元の線の族を良く近似すると考えられる．

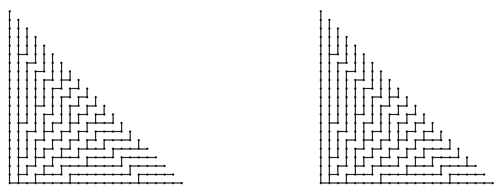
4　曲線族のデジタル化

4.1　放物線

3.1 節より，各点へ辺が伸びる確率が原関数と同様になるように分岐点を設定することで，得られる CDR が原関数を良く近似するという考察が得られた．この結果を踏まえ，放物線 $y = ax^2 (a \geq 0)$ を良く近似するための分岐点の設定方法を示す．直線の場合は $L(k)$ での分岐点は $x = kV(k)$ となる点であったが，ここで $x = \lceil \frac{2kV(k)}{V(k)+1} \rceil$ となる点を分岐点とすることで，各点へ辺が縦と横に伸びる確率の比はおよそ $\frac{2(k-x_0)}{x_0}$ となり放物線の導関数と一致する．そのため，この方法で構成される CDR は放物線を良く近似すると考えられる．ここで，原関数と CDR の Hausdorff 距離は $O(\sqrt{n \log n})$ となる．

4.2　同様の曲線族

4.1 節の曲線を更に一般化し，$y = ax^j (a \geq 0)$ を良く近似するための分岐点の設定方法を示す．$x = \lceil \frac{jkV(k)}{(j-1)V(k)+1} \rceil$ となる点を分岐点とすることで，各点へ辺が縦と横に伸びる確率の比はおよそ $\frac{j(k-x_0)}{x_0}$ となり曲線 $y = ax^j$ の導関数と一致する．そのため，この方法で構成される CDR は曲線 $y = ax^j (a \geq 0)$ を良く近似すると考えられる．ここで，原関数と各 CDR の Hausdorff 距離は $O(\sqrt{n \log n})$ となる．



(a) デジタル直線　(b) デジタル放物線

図 3: デジタル化された線

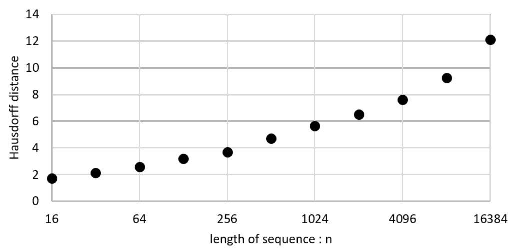


図 4: 実験結果

5　評価実験

4 章で示した曲線族のデジタル化に対する評価として，放物線 $y = ax^2 (a \geq 0)$ を近似する CDR と原関数との誤差を計測した．計測方法は，$G = \{(i,j) : i, j \in 0, 1, ..., n, i + j \leq n\}$ 上で構成した CDR について，原点から各境界点までのグラフ上の道と，原点と各境界点を通る原関数の Hausdorff 距離を計測し，各 n について計測した距離のうち最大のものを誤差とした．n の値は $2^4, 2^5, ..., 2^{14}$ とした．

構成された CDR を図 3(b) に示す．比較のため，直線を近似する CDR を図 3(a) に示す．評価実験によって得られた結果を図 4 に示す．図 4 より，最大 Hausdorff 距離の推移は直線の場合の $O(\log n)$ より大きいが，理論上の誤差である $O(\sqrt{n \log n})$ よりは非常に小さいことが確認された．この結果より，4 章で示した誤差は改善可能と考えられる．

6　おわりに

本研究では，整合的な半直線を構成する理論を一般化し，原点を通る曲線族へと拡張した．数値実験より，得られた曲線の誤差は理論上の誤差よりも小さいことを確認した．

参考文献

[1] Reinhard Klette and Azriel Rosenfeld. Digital straightness—a review. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1):197 – 230, 2004. The 2001 International Workshop on Combinatorial Image Analysis.

[2] Jinhee Chun, Matias Korman, Martin Nöllenburg, and Takeshi Tokuyama. Consistent digital rays. *Discrete & Computational Geometry*, 42(3):359–378, Oct 2009.