情報処理学会論文誌 Vol.60 No.3 916–925 (Mar. 2019)

配分議席数と完全比例値の最大乖離

一森 哲男[1,a)]

受付日 2018年6月20日, 採録日 2018年12月4日

概要：議席配分問題では，人口に比例して議席を配分するように要求されているが，完全比例値は実数である一方，配分議席数は整数に限定されるため，そこに乖離が生じる．その大きさは重要な議論の対象と見なされてきたものの，乖離の最大値について議論されたことはなかった．しかしながら，乖離の最大値を知ることなく乖離の大きさを議論することは適正さを欠く．そこで，本論文では，配分される議席数が完全比例値から乖離する量の最大値を求める．

キーワード：議席配分，比例配分，1 票の価値

On the Maximum Gap between the Proportional Share and the Number of Seats

Tetsuo Ichimori[1,a)]

Received: June 20, 2018, Accepted: December 4, 2018

Abstract: The apportionment problem demands the allocation of legislative seats in proportion to the population of electoral districts. While the proportional share of a district is fractional, the number of seats given to the district must be whole. Accordingly, there exits a gap between them, whose value has been an important topic of the problem; nevertheless the maximum value of the gap has never been discussed. This does not become an appropriate discussion. In this paper, hence, we derive the maximu value of the gap.

Keywords: apportionment, proportional allocation, one man one vote

1. はじめに

人口に比例して議席を配分することは多くの国々で行われている，たとえば，アメリカ合衆国憲法の第 1 条は，州の人口に比例して下院議員の議席を配分すると規定している．2010 年度の国勢調査によればアラスカ州の人口は総人口の 0.2333%を占めている．下院議員の定数は 435 人なので，同州には 1.015 議席が与えられるべきである．現実には，議席は整数値に限定され，同州には 1 議席が与えられる．インディアナ州の人口はアラスカ州の人口の 9.012 倍なので，同州には 9.147 議席が与えられるべきで 9 議席が与えられる．議席の配分問題では，アラスカ州の 1.015 議席やインディアナ州の 9.147 議席を州の取り分とよんでいる．これは完全比例を想定したとき，州に与えられる議席数のことである．ウィスコンシン州の取り分は 8.017 議席で 8 議席が与えられる．しかし，取り分の値はつねに整数値に近いわけではない．カリフォルニア州の取り分は 52.54 議席であり，52 議席にすべきか 53 議席にすべきか，迷うところである．

一般的にいえば，州に配分される議席数として，取り分から直近の正の整数が期待される．しかしながら，この期待は裏切られる．近々わが国で使われる予定のアダムズ方式は取り分が 52.54 議席のカリフォルニア州に 50 議席しか与えない．また，わが国ではドント方式として長年親しまれているジェファソン方式は 55 議席も与える．このように，州の取り分と実際に配分される議席数との間には大きな差異が存在しうる．

本論文では，州の取り分と配分議席数の差異を乖離と呼び，これの最大値を議論する．この乖離の議論は，1832 年のウェブスターによる議論から始まり [1]，現行議席配分方

[1] 大阪工業大学
Osaka Institute of Technology, Hirakata, Osaka 573–0196, Japan
[a)] tetsuo.ichimori@oit.ac.jp

式の違憲性を問う 1992 年の最高裁での議論にも継続している [4]．このように，取り分からの乖離は公正な議席配分にとり，重要な評価基準の 1 つであるにもかかわらず，これまでその最大値について議論されたことがなかった*1．最大値を知らずに，乖離の大きさを議論することは公平さを欠くものと考えられる．本論文では，様々な配分方式，様々な取り分の値に対する最大乖離を求める．

これまで，配分方式に対する評価基準として，いくつかのものが議論されてきた．ハンティントンは投票の価値として，各州の 1 議席あたり人口を考え，これの州全体にわたる均等性を重要視した．さらに，これの逆数である 1 人あたり議席数についての均等性も同様に重要と考えた [7], [8]．彼の考え方は他の分野の人々にも広く受け入れられた．たとえば，有名な政治学者や経済学者からも強く支持された [2], [3]．さらに，2 回にわたる全米科学アカデミーによる配分方式の評価結果にも，彼の考え方はよく反映している [1]．ハンティントンの長年のライバルであったウィルコックスは評価基準として偏りを重要視した．取り分からの乖離は現実にゼロになることはあり得ず，取り分より多くの議席を受け取る有利な州もあれば，取り分より少ない議席を受け取る不利な州も存在する．配分結果に有利不利があることを偏りと呼んでいる．彼は州全体を平均より人口の多い州を大州，小さい州を小州と呼び，大州グループ全体の取り分の和と配分議席数の和，および，小州グループ全体の取り分の和と配分議席数の和を調べ，大州と小州間の偏りを計算した [18], [19]．これとほぼ同じ評価基準がオーウェンズにより使われている [15]．

2. いくつかの準備

議席配分問題の究極の目的はベストな配分方式を見つけることである．これまで世界中で考案された議席配分方式の数は膨大なため，何らかの基準で配分方式を分類することが行われている．たとえば，州の取り分とそこに配分される議席数の最大乖離が 1 議席未満を保証するものとそうでないものに分類されている．前者の配分方式としては，最大剰余方式やラウンズ方式がよく知られている．わが国では，最大剰余方式（およびそのバリエーション）は戦後から今日まで，地域に議席を配分する際にはつねに用いられてきた方式であり，ラウンズ方式は数年前，最大剰余方式の代わりに使用が検討された方式である．後者の配分方式としては，2020 年度以降，最大剰余方式の代わりに使用が決定しているアダムズ方式が有名である．これ以外に，現在アメリカで使用されているヒル方式やそれ以前に使用されていたウェブスター方式がよく知られている．

この点だけを考えると，前者の配分方式は好ましく，後者のものは好ましくないと思われる．しかしながら，事はそう簡単ではない．なぜならば，前者の配分方式はすべて奇妙な現象を許すからである．アメリカでは 1880 年度の国勢調査後に，最大剰余方式で議席を配分していたが，議席総数が 299 のとき，アラバマ州には 8 議席が配分されたにもかかわらず，議席総数を 300 に増加させると，同州には 7 議席しか配分されなかった．配分のパイが拡大したのに，受け取る議席の数が減少した．そのため，この奇妙な減少をアラバマ・パラドックスと呼ぶ．さらに，1 議席未満の最大乖離を保証する配分方式はすべて，より奇妙な現象を生じる．2 回の国勢調査とそれにともなう 2 回の議席配分を考える．議席総数は同一とする．このとき，人口の減少した州が人口の増加した州から議席を奪う現象が生じることがある．これを人口パラドックスと呼ぶ．アラバマ・パラドックスは議席総数を変化させなければ防ぐことができるが，人口を変化させないことは不可能であるため，人口パラドックスは防ぐことができない．一方，人口パラドックスなどのパラドックスを生じさせない配分方式は除数方式と呼ばれるものに限られることが判明している．残念ながら，どの除数方式も 1 議席未満の最大乖離を保証できないことも判明している [1]．

以上をまとめると，我々には 2 つの相反する配分グループが与えられている．一方は人口パラドックスなどのパラドックスは受けるが 1 議席未満の最大乖離が保証される．他方は 1 議席未満の最大乖離は保証されないが人口パラドックスなどのパラドックスは受けない．どちらのグループの配分方式が好ましいかどうかは，重要ではあるが，少なくとも最初のグループの配分方式は最大乖離が 1 議席未満なので，ここでは議論せず，2 番目のグループの配分方式，すなわち，除数方式の最大乖離について議論する．

最初に，除数方式とその性質について説明する．非負の整数の集合を $\mathbb{Z}_0$，正の整数の集合を $\mathbb{Z}_+$，州の数を $s \geq 3$，配分すべき議席の総数（議員定数）を h，州 i の人口を $p_i > 0$，州 i に配分される議席数を $a_i \in \mathbb{Z}_+$ とする．また，州全体の集合を $S = \{1, \ldots, s\}$ とする．丸め関数*2と呼ばれる関数 $d(k)$ は $\mathbb{Z}_0$ を定義域に持ち，k に関して狭義増加である．$k = 0$ のときは，$d(0) = 0$ に固定され，$k > 0$ のときは，不等式 $k \leq d(k) \leq k + 1$ を満たす．この丸め関数 $d(k)$ を用いて，正の実数 $x > 0$ を正の整数に丸める記号 $[x]$ を定義する*3：$d(k-1) < x < d(k)$ ならば $[x] = k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$，$x = d(k)$ ならば $[x]$ は k または $k+1$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ に等しい．丸め関数 $d(k)$ に基づく除数方式（以下では，除数方式 $d(k)$ と呼ぶ）とは，等式 $\sum_{i \in S}[p_i/\lambda] = h$ を満たす実数 $\lambda = \lambda_d < +\infty$ および整数 $[p_i/\lambda_d]$ の値に対して，州 i

*1 これまで，最大乖離が 1 議席未満であるか否かは熱心に議論されてきたが，最大乖離の大きさについては，専門書 [1], [5], [6], [20] などにも記載されておらず新規のテーマと考えられる．

*2 丸め関数の値は切り上げ・切り捨ての境界値を示すので，丸め閾値関数と呼ぶべきかもしれない．

*3 いわゆるガウスの記号とは異なる．

に $a_i = [p_i/\lambda_d]$ 議席を与える配分方式である*4．また，除数方式 $d(k)$ の配分とは，このようにして定まったベクトル $(a_1, \ldots, a_s)$ を意味する．以下の記述を容易にするため，議員定数は州の数の 2 倍以上と仮定する（$h \geq 2s$）．

丸め関数を具体的に定めると，それに基づく除数方式は特定の名前で呼ばれることが多い．たとえば，$d(k) = k$ だとアダムズ方式，$d(k) = k + 1$ だとジェファソン方式，$d(k) = k + 1/2$ だとウェブスター方式と呼ばれる．一般に，正の連続する 2 整数 k と $k + 1$ の平均はすべて丸め関数となりうる．いま述べたウェブスター方式の丸め関数は算術平均 $d(k) = k + 1/2$ に基づき，幾何平均 $d(k) = \sqrt{k(k+1)}$ に基づくとヒル方式，調和平均 $d(k) = k(k+1)/(k+1/2)$ だとディーン方式と呼ばれる．様々な平均を効率良く表すために，パラメータを含む平均がよく使われる．本論文では，ストラスキー平均 [17] を取り上げる．

州 i の取り分 q_i を式で表すと，$q_i = h \times p_i/\pi$ となる．ここで，$\pi = \sum_{i \in S} p_i$ はすべての州の人口の総和である．各州には 1 議席が保障されるため，慣例に従い，すべての州の取り分の値は 1 以上と仮定する*5．取り分 $(q_1, \ldots, q_s)$ の集合：

$$Q = \left\{(q_1, \ldots, q_s) \mid q_i \geq 1 \ (i \in S) \text{ かつ} \sum_{i \in S} q_i = h\right\}$$

を定義し，取り分 $\boldsymbol{q}$ はつねに集合 Q に属するものとする．さらに，h 議席の s 州間の配分 $(a_1, \ldots, a_s)$ の集合：

$$A = \left\{(a_1, \ldots, a_s) \mid a_i \in \mathbb{Z}_+ \ (i \in S) \text{ かつ} \sum_{i \in S} a_i = h\right\}$$

を定義し，配分はつねに集合 A に属するものとする．

定理 1　取り分 $(q_1, \ldots, q_s) \in Q$ と丸め関数 $d(k)$（$k \in \mathbb{Z}_0$）を固定したとき，配分 $(a_1, \ldots, a_s) \in A$ が除数方式 $d(k)$ の配分となるための必要十分条件は

$$\frac{d(a_i - 1)}{q_i} \leq \frac{d(a_j)}{q_j}, \quad \forall i, j \in S \tag{1}$$

を満たすことである．

証明　人口と取り分は比例しているので，式 (1) の q_i，q_j をそれぞれ p_i，p_j に書き換えてもよい．配分 $(a_1, \ldots, a_s) \in A$ が除数方式 $d(k)$ の配分であれば，$a_i = [p_i/\lambda_d]$ を定める有限値の λ_d が存在する．このとき，すべての州 $i \in S$ に対して，$d(a_i - 1) \leq p_i/\lambda_d \leq d(a_i)$，すなわち，$d(a_i - 1)/p_i \leq 1/\lambda_d \leq d(a_i)/p_i$ が成り立つ．いい換えれば，任意の $i, j \in S$ に対して，$d(a_i - 1)/p_i \leq 1/\lambda_d \leq d(a_j)/p_j$ が成り立ち，式 (1) が得られる．逆に，配分 $(a_1, \ldots, a_s) \in A$ が式 (1) を満たすならば，議員定数は州の数より大きいので，2 議席以上を受け取る州が存在し，$d(2-1) > 0$ に注意すると，$\max_{i \in S} d(a_i - 1)/p_i > 0$ となり，$\max_{i \in S} d(a_i - 1)/p_i \leq 1/\lambda \leq \min_{j \in S} d(a_j)/p_j$ を満たす $0 < \lambda < +\infty$ が存在する．いい換えれば，任意の $i \in S$ に対して，$d(a_i - 1)/p_i \leq 1/\lambda \leq d(a_i)/p_i$ を満たす $\lambda = \lambda'$ が存在する．すなわち，$d(a_i - 1) \leq p_i/\lambda' \leq d(a_i)$ となり，州 i に配分される議席数は $a_i = [p_i/\lambda']$ となる．よって，$(a_1, \ldots, a_s)$ は除数方式 $d(k)$ の配分となる．□

表 1　除数方式の例
Table 1　Examples of divisor methods.

θ	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
配分方式	Adams	Hill	Webster	Jefferson
$d(k)$	k	$\sqrt{k(k+1)}$	$k + 1/2$	$k + 1$

次に，ストラスキー平均の性質のいくつかをここに与える．実数 $x > 0$ と $\theta \neq 0, 1$ の関数

$$\mathcal{S}(x, \theta) = \left(\frac{(x+1)^\theta - x^\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta - 1}} \tag{2}$$

を考え，極限操作により，$\mathcal{S}(x, \theta)$ の定義域を $\{(x, \theta) \mid x > 0, -\infty < \theta < +\infty\}$ に拡大する．$\mathcal{S}(x, \theta)$ は正の実数 x と $x + 1$ のパラメータ θ を持つストラスキー平均である．$\theta = 0, 1$ のときの関数形を具体的に書くと，

$$\mathcal{S}(x, 0) = \frac{1}{\log \frac{x+1}{x}}, \quad \mathcal{S}(x, 1) = \frac{1}{e} \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} \tag{3}$$

となる．ストラスキー平均 $\mathcal{S}(x, \theta)$ に関しては下記のことが知られている [17]．

(1) $x < \mathcal{S}(x, \theta) < x + 1$,
(2) $\lim_{\theta \to -\infty} \mathcal{S}(x, \theta) = x$,　$\lim_{\theta \to +\infty} \mathcal{S}(x, \theta) = x + 1$,
(3) $\mathcal{S}(x, \theta)$ は x および θ に関して連続であり，
(4) $x < y$ に対して $\mathcal{S}(x, \theta) < \mathcal{S}(y, \theta)$，$\theta < \omega$ に対して $\mathcal{S}(x, \theta) < \mathcal{S}(x, \omega)$ となり，
(5) $\mathcal{S}(x, 2) = x + 1/2$，$\mathcal{S}(x, -1) = \sqrt{x(x+1)}$ となる．

ストラスキー平均を丸め関数に利用してみる [9], [10], [16]．具体的には，正の整数 $k \in \mathbb{Z}_+$ に対しては $d(k) = \mathcal{S}(k, \theta)$ とし，$k = 0$ に対しては $d(0) = 0$ とする．また，この配分方式を除数方式 $\mathcal{S}(k, \theta)$ と呼ぶ*6．パラメータ θ の値を特定すると，いろいろな除数方式が定まる（表 1）．

補題 1　$x > 0$，$\theta < \omega$ に対して $f(x) = \mathcal{S}(x, \theta)/\mathcal{S}(x, \omega)$ とすると，$f(x)$ は狭義増加関数となる．

証明　文献 [10] の lemma 3.3 に与えられている．□

補題 2　$0 < x < y$ を固定したとき，θ の関数 $g(\theta) = \mathcal{S}(x, \theta)/\mathcal{S}(y, \theta)$ は狭義増加関数となり，$x/y < g(\theta) < (x+1)/(y+1)$ となる．

*4 実際に起こる議席配分では，$d(k) = p_i/\lambda_d$ となることはないと思われるが，そのようなことが起これば，$a_i = k$ にするか $a_i = k + 1$ にするかの判断は，すべての議席が配分されるように選べばよい．

*5 これはすべての州の人口が π/h 以上と仮定することに等価である．

*6 この除数方式の定める配分は，取り分ベクトル $\boldsymbol{q}$ と配分 $\boldsymbol{a}$ 間のアルファ・ダイバージェンスを最小にする．詳しくは文献 [11], [12], [13], [14] 参照．

証明　　文献 [10] の lemma 3.4 に与えられている．　□

補題 3　関数 $\mathcal{S}(x,\theta)$ を x で偏微分すると，

$$\mathcal{S}_x(x,\theta)=\left(\frac{\mathcal{S}(x,\theta-1)}{\mathcal{S}(x,\theta)}\right)^{\theta-2}$$

となる．

証明　　$\theta\neq 0,1$ の場合を考える．式 (2) の両辺の対数をとり，両辺を x で微分すると

$$\frac{\mathcal{S}_x(x,\theta)}{\mathcal{S}(x,\theta)}=\frac{\theta}{\theta-1}\times\frac{(x+1)^{\theta-1}-x^{\theta-1}}{(x+1)^{\theta}-x^{\theta}}=\frac{((x+1)^{\theta-1}-x^{\theta-1})/(\theta-1)}{((x+1)^{\theta}-x^{\theta})/\theta}$$

となる．$\mathcal{S}(x,\theta)$ の定義式 (2) より

$$\frac{\mathcal{S}_x(x,\theta)}{\mathcal{S}(x,\theta)}=\frac{(\mathcal{S}(x,\theta-1))^{\theta-2}}{(\mathcal{S}(x,\theta))^{\theta-1}}$$

となる．すなわち，

$$\mathcal{S}_x(x,\theta)=\left(\frac{\mathcal{S}(x,\theta-1)}{\mathcal{S}(x,\theta)}\right)^{\theta-2}$$

が導かれる．$\theta=0,1$ の場合も同様に証明できるので省略する．　□

補題 4　$\mathcal{S}(x,\theta)$ は $\theta<2$ のとき x に関して狭義凹，$\theta>2$ のとき x に関して狭義凸となる．

証明　　補題 3 より，$\mathcal{S}_x(x,\theta)$ をさらに x で微分すると，

$$\mathcal{S}_{xx}(x,\theta)=(\theta-2)\left(\frac{\mathcal{S}(x,\theta-1)}{\mathcal{S}(x,\theta)}\right)^{\theta-3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{S}(x,\theta-1)}{\mathcal{S}(x,\theta)}\right)$$

となる．$\mathcal{S}(x,\theta)>\mathcal{S}(x,\theta-1)>x>0$ であり，関数 $\mathcal{S}(x,\theta-1)/\mathcal{S}(x,\theta)$ は補題 1 より，x に関して狭義増加なので，$\mathcal{S}_{xx}(x,\theta)$ の正負は θ の値で決まる．よって，本補題の結論が導かれる．　□

補題 5　除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ の丸め関数 $d(k)$ を考える．任意の整数 $k\geq 2$ に対し，

$$\theta<2 \text{ ならば}\quad d(k)-d(k-1)>d(k+1)-d(k)$$
$$\theta>2 \text{ ならば}\quad d(k)-d(k-1)<d(k+1)-d(k)$$

となる．

証明　　$\theta<2$ の場合を考える．関数 $\mathcal{S}(x,\theta)$ が $x>0$ に関して狭義凹であることから（補題 4），差分列 $\{\mathcal{S}(k+1,\theta)-\mathcal{S}(k,\theta)\}$ が $k\in\mathbb{Z}_+$ に関して減少列となる．$\theta>2$ の場合も，同様にすれば証明できる．　□

除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ の丸め関数 $d(k)$ に対し，次の最適化問題 $\mathrm{P_{min}}$：

$$\min\sum_{i\in S}d(a_i-1)\quad \text{s.t.}\ \sum_{i\in S}a_i=h,\ a_i\geq 2(i\in S)$$

を定義する．ただし，問題の解の表記を一義的にするため，制約：$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_s$ を追加する．

定理 2　問題 $\mathrm{P_{min}}$ に対し，$\theta<2$ のとき，最適配分は $(h-2s+2,2,\ldots,2)$ となる．$\theta>2$ のとき，$m=\lfloor h/s\rfloor$，$r=h-ms$ と書くと[*7]，最適配分は $a_1=\cdots=a_r=m+1$，$a_{r+1}=\cdots=a_s=m$ となる．ただし，$r=0$ ならば $a_1=\cdots=a_s=m$ となる．また，$m\geq 2$，$0\leq r\leq s-1$ となる．

証明　　$h=2s$ の場合，実行可能な配分は $a_1=\cdots=a_s=2$ となる $(a_1,\ldots,a_s)$ のみなので，本定理は自明で，以下では，$h\geq 2s+1$ とする．このとき，$a_1\geq 3$ に注意する．最初に，$\theta<2$ の場合を考える．州 1 以外に，3 議席以上を受け取っている州が存在する場合，その中で添え字番号の最大の州を j とする．このとき，$a_1\geq a_j\geq 3$ となる．州 j から州 1 に 1 議席移動して，別の配分 $(a_1+1,\ldots,a_j-1,\ldots,a_s)$ に変化させる．このとき，問題 $\mathrm{P_{min}}$ の目的関数の値は $d(a_1)-d(a_1-1)$ 増加し，$d(a_j-1)-d(a_j-2)$ 減少する．$2\leq a_j-1<a_1$ に注意すると，補題 5 より $d(a_j-1)-d(a_j-2)>d(a_1)-d(a_1-1)$ となるので，差し引き，目的関数値は減少する．このことは，最適解が配分 $(h-2s+2,2,\ldots,2)$ であることを意味する．

次に，$\theta>2$ の場合を考える．配分議席数の差が 2 以上の 2 州が存在すれば，両州間で，その差を縮めるように 1 議席の移動を行う．その際，目的関数の値が減少することから本定理の正当性を示す．いま，2 つの州 $i>j$ を，$2\leq a_i\leq a_j-2$ の関係が成り立ち，i と j の差：$i-j$ が最小になるように選ぶ．当然，$2\leq a_i<a_j-1$ となるので，補題 5 より，$d(a_i)-d(a_i-1)<d(a_j-1)-d(a_j-2)$ の関係が成立する．州 j から i に 1 議席移動すると，配分は $(a_1,\ldots,a_j-1,\ldots,a_i+1,\ldots,a_s)$ に変化する．このときの変化の前後で，目的関数の第 i 項と第 j 項の和は $d(a_i-1)+d(a_j-1)$ から $d(a_i)+d(a_j-2)$ に変化するが，上記の不等式より，その値は減少する．このことは，最適解が定理の本文で定義された配分であることを意味する．また，$h\geq 2s$ なので，$m\geq 2$ となる．　□

この定理 2 でカバーされていない場合を以下に考える．アダムズ方式 $(\theta\to-\infty)$ では，任意の整数 $k\geq 0$ に対し，丸め関数が $d(k)=k$ である．$a_i\geq 2$ に注意すると，$\sum_{i\in S}d(a_i-1)=\sum_{i\in S}(a_i-1)=h-s$ となる．ウェブスター方式 $(\theta=2)$ では，丸め関数が $d(0)=0$ で，正の k に対し $d(k)=k+1/2$ なので $\sum_{i\in S}d(a_i-1)=\sum_{i\in S}(a_i-1/2)=h-s/2$ となり，ジェファソン方式 $(\theta\to+\infty)$ では，丸め関数が $d(0)=0$ で，正の k に対し $d(k)=k+1$ なので $\sum_{i\in S}d(a_i-1)=\sum_{i\in S}(a_i+1)=h+s$ となる．よって，これらの 3 方式ではすべての州が 2 議席以上を受け取るならば，任意の配分 $(a_1,\ldots,a_s)$ が最適解となる．

除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ の丸め関数 $d(k)$ に対し，次の最適化問

*7　記号 $\lfloor x\rfloor$ は床関数である．x 以下の最大の整数を表す．

題 $\mathrm{P}_{\max}$

$$\max \sum_{i \in S} d(a_i) \quad \text{s.t.} \ \sum_{i \in S} a_i = h,\ a_i \geq 1\ (i \in S)$$

を定義する．ここも，解の表記を一義的にするため，制約：$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_s$ を追加する．

定理 3 問題 $\mathrm{P}_{\max}$ に対して，$\theta < 2$ のとき $m = \lfloor h/s \rfloor$，$r = h - ms$ と書くと，最適配分は $a_1 = \cdots = a_r = m+1$，$a_{r+1} = \cdots = a_s = m$ となる．ただし，$r = 0$ ならば $a_1 = \cdots = a_s = m$ となる．また，$m \geq 2$，$0 \leq r \leq s-1$ となる．$\theta > 2$ のとき，最適配分は $(h-s+1, 1, \ldots, 1)$ となる．

証明 定理 2 の証明と同様にすればよい． □

以前同様，この定理 3 でカバーされていない場合，つまり，アダムズ方式 $(\theta \to -\infty)$，ウェブスター方式 $(\theta = 2)$，ジェファソン方式 $(\theta \to +\infty)$ では，すべての州が 1 議席以上を受け取るならば，任意の配分 $(a_1, \ldots, a_s)$ が最適解となる．

3. 州の議席数が n 以上となるための十分条件

この節では除数方式 $\mathcal{S}(k, \theta)$ に対し，州 i に与えられる議席数が n 以上となるための十分条件を導く．一般性を失うことなく，$i = 1$ とする．また，記述を簡単にするため，n の範囲は $2 \leq n \leq h - 2s + 3$ と仮定する*8．州 1 を除いた州全体の集合 $S' = \{2, \ldots, s\}$ を定義する．$1 \leq q_1 \leq h - s + 1$ を満たすように，州 1 の取り分 q_1 を固定したとき，S' 上の取り分の集合：

$$Q' = \left\{ (q_2, \ldots, q_s) \;\middle|\; q_i \geq 1 (i \in S') \text{ かつ} \sum_{i \in S'} q_i = h - q_1 \right\}$$

を定義する．任意の取り分 $\boldsymbol{q} \in Q$ に対し，除数方式 $d(k)$ は定理 1 の不等式を満たす配分 $\boldsymbol{a} \in A$ を与えるが，取り分 $\boldsymbol{q}$ に対する配分であることを強調して，この配分を $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q}) = (a_1(\boldsymbol{q}), a_2(\boldsymbol{q}), \ldots, a_s(\boldsymbol{q}))$ と書く．州 1 の取り分 q_1 のみを固定し，他の州の取り分 $\boldsymbol{q}' = (q_2, \ldots, q_s) \in Q'$ を可変とするとき，州 1 に与えられる議席数の最小値が n 以上となる，すなわち，

$$\min_{\boldsymbol{q}' \in Q'} a_1(\boldsymbol{q}) \geq n$$

となる条件を導く．ここで，$\boldsymbol{q} = (q_1, \boldsymbol{q}')$ である．

任意の取り分 $\boldsymbol{q} \in Q$ に対し，除数方式 $d(k)$ が配分 $\boldsymbol{a} \in A$ を与えたとする．定理 1 より，任意の州 $i \in S'$ に対し，$q_i \geq q_1 d(a_i - 1)/d(a_1)$ となるが，仮定より $q_i \geq 1$ なので，

$$\sum_{i \in S'} q_i \geq \sum_{i \in S'} \max\{1, q_1 d(a_i - 1)/d(a_1)\}$$

の関係が成り立つ．ここで，$T = \{i \mid a_i \geq 2, i \in S'\}$，$S' \backslash T$ を定義する．いい換えれば，州 1 を除く州全体の中で，2 議席以上を受け取っている州の集合 T と 1 議席を受け取っている州の集合 $S' \backslash T$ を定義する．さらに，$\delta = |S' \backslash T|$ とし，$\sum_{i \in S} q_i = h$ より $\sum_{i \in S'} q_i = h - q_1$，$d(0) = 0$，および，2 実数 x，y に対し，$\max\{x, y\} \geq y$ に注意すると，上式は

$$h - q_1 \geq \delta + \sum_{i \in T} q_1 d(a_i - 1)/d(a_1)$$

あるいは，

$$h - \delta \geq q_1 \left(1 + \sum_{i \in T} d(a_i - 1)/d(a_1) \right)$$

と書き直せる．右辺のカッコの中の値は正なので，

$$q_1 \leq \frac{h - \delta}{1 + \sum_{i \in T} d(a_i - 1)/d(a_1)} \tag{4}$$

が導かれる．

次に，州 1 に配分される議席数が $n-1$ 以下で，残りの州の集合 S' の中で配分議席数が 1 となる州の数 δ を固定する．いい換えれば，$|S' \backslash T| = \delta$ となるように S' を 2 つの集合 T と $S' \backslash T$ に分割する．この分割に応じて，配分の集合 L_{n-1}^{δ} を

$$\{\boldsymbol{a} \mid 1 \leq a_1 \leq n-1, a_i \geq 2\ (i \in T),\ a_j = 1\ (j \in S' \backslash T)\}$$

として定義する．$\delta = 0$ の場合は S' は分割されず $T = S'$ となり，$L_{n-1}^{0} = L_{n-1}$ と書くと，

$$L_{n-1} = \{\boldsymbol{a} \mid 1 \leq a_1 \leq n-1, a_i \geq 2\ (i \in S')\}$$

となる．$\delta = s-1$ の場合も S' は分割されず $T = \emptyset$ となるが，これは実現不可能である．この場合，州 1 にたかだか $n-1$ 議席を与え，残りの州すべてに 1 議席を与えている．すなわち，議席はたかだか $n+s-2$ 議席しか配分されていない．一方，この節では $n \leq h - 2s + 3$ と仮定しているので，議席総数 h は $n + 2s - 3$ 議席以上である．$s \geq 3$ とも仮定していることから，$n + 2s - 3 > n + s - 2$ の関係が成り立ち，この場合，配分されない議席が存在することになり，実現不可能となる（$L_{n-1}^{s-1} = \emptyset$）．同様な考え方をすれば，各 $0 \leq \delta \leq s-2$ の場合は実現可能で，$L_{n-1}^{\delta} \neq \emptyset$（$1 \leq n-1 \leq h-2s+2$，$0 \leq \delta \leq s-2$）となることに注意する．さらに，解の表記を一義的にするため，以下では，州 1 以外の州の取り分と議席数に関して，

$$q_2 \geq q_3 \geq \cdots \geq q_s, \qquad a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_s$$

と仮定する*9．だから，L_{n-1}^{δ}（$1 \leq \delta \leq s-2$）に属する

*8 単に記述を簡単にするためだけの仮定ではない．本論文の結果からすれば，大きな n に対する十分条件からはあまり有益な情報が得られない．

*9 定理 1 より，除数方式では「逆転現象」，つまり，$q_i < q_j$ かつ $a_i > a_j$ は成り立たないので，このような順序づけは可能である．

配分 $(a_1, \ldots, a_s)$ は，$1 \le a_1 \le n-1$，$a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_{s-\delta} \ge 2$，$a_{s-\delta+1} = \cdots = a_s = 1$ となる．$\delta = 0$ ならば $a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_s \ge 2$ となる．

ここで，異なる整数 $\delta \in \{0, 1, \ldots, s-2\}$ を持つ計 $s-1$ 個の最適化問題

$$\max_{\boldsymbol{a} \in L^{\delta}_{n-1}} \frac{h-\delta}{1+\sum_{i \in T} d(a_i - 1)/d(a_1)}, \tag{5}$$

を定義する．

定理 4 δ の各値に対し，式 (5) の分数の最大値を与える配分では $a_1 = n-1$ となる．

証明 $n = 2$ ならば集合 L^{δ}_1 に属する配分はすべて $a_1 = 1$ となり，本定理が成り立つ．$n \ge 3$ の場合を考える．$1 \le a_1 \le n-2$ と仮定すると，集合 T の中に 3 議席以上を受け取る州が存在する．その中で添え字番号の最大の州を k とする．（T 上の議席配分では，$|T| = s-\delta-1$ 州の間で，$h-a_1-\delta$ 議席を配分している．$h-a_1-\delta \ge h-(n-2)-\delta = (h-2s+3)-n+(2s-\delta-1) \ge 2s-\delta-1 = 2(s-\delta-1)+(\delta+1) = 2|T|+(\delta+1) \ge 2|T|+1$ なので，いい換えれば，配分を受ける州の数 $|T|$ より配分する議席数のほうが 2 倍より大きい $2|T|+1$ ので，3 議席以上を受け取る州が存在する．途中の式の変形で $a_1 \le n-2$，$n \le h-2s+3$，$\delta \ge 0$ を利用した．）州 k から州 1 に 1 議席を移動する．このとき，州 k には 2 議席以上が残るため（$a_k - 1 \ge 2$），δ の値が変化しないことに注意する．式 (5) の分数の分母は

$$\sum_{i \in T} \frac{d(a_i-1)}{d(a_1)} > \frac{d(a_k-2)}{d(a_1+1)} + \sum_{i \in T \setminus \{k\}} \frac{d(a_i-1)}{d(a_1+1)}$$

となり値が減少し，その結果，分数の値が増加する．このことは a_1 の最適な値が $n-1$ であることを意味する． □

除数方式 $\mathcal{S}(k, \theta)$ の丸め関数 $d(k)$ を用いて，各整数 $0 \le \delta \le s-2$ に対し，

$$F(\delta) = \max_{\boldsymbol{a} \in L^{\delta}_{n-1}} \frac{h-\delta}{1+\sum_{i \in T} d(a_i - 1)/d(a_1)} \tag{6}$$

を定義する．

定理 5 不等式：$F(0) > F(1) > \cdots > F(s-2)$ が成り立つ．

証明は煩雑なので付録に与える．また，この定理も $\theta \to \pm\infty$ の場合，つまり，アダムズ方式とジェファソン方式に対しても成り立つ．

除数方式 $\mathcal{S}(k, \theta)$ の丸め関数 $d(k)$ に対し，

$$\ell_n(\theta) = \max_{\boldsymbol{a} \in L_{n-1}} \frac{h}{1+\sum_{i \in S'} d(a_i - 1)/d(a_1)}$$

を定義する．

定理 6 各整数 n（$2 \le n \le h-2s+3$）に対し，$\ell_n(\theta)$ は表 2 のようになる．

表 2 $\ell_n(\theta)$．ここで，$m = \lfloor \frac{h-n+1}{s-1} \rfloor$, $r = (h-n+1) - m(s-1)$ とする

Table 2 $\ell_n(\theta)$ where $m = \lfloor \frac{h-n+1}{s-1} \rfloor$, $r = (h-n+1) - m(s-1)$.

θ	配分方式	$\ell_n(\theta)$
$\theta \to -\infty$	Adams	$\frac{h(n-1)}{h-s+1}$
$\theta < 2$		$\frac{h}{1+\frac{d(h-2s-n+4)}{d(n-1)}+(s-2)\frac{d(1)}{d(n-1)}}$
$\theta = 2$	Webster	$\frac{h(2n-1)}{2h-s+2}$
$\theta > 2$		$\frac{h}{1+r\frac{d(m)}{d(n-1)}+(s-r-1)\frac{d(m-1)}{d(n-1)}}$
$\theta \to +\infty$	Jefferson	$\frac{hn}{h+1}$

証明 定理 2 より，$\theta < 2$ のとき，配分 $(n-1, h-2s-n+5, 2, \ldots, 2) \in L_{n-1}$ が $\ell_n(\theta)$ を定めることから，

$$1 + \sum_{i \in S'} \frac{d(a_i-1)}{d(a_1)} = 1 + \frac{d(h-2s-n+4)}{d(n-1)} + (s-2)\frac{d(1)}{d(n-1)}$$

となる．よって，

$$\ell_n(\theta) = \frac{h}{1+\frac{d(h-2s-n+4)}{d(n-1)}+(s-2)\frac{d(1)}{d(n-1)}} \tag{7}$$

が得られる．

$\theta > 2$ のとき，$m = \lfloor (h-n+1)/(s-1) \rfloor$，$r = (h-n+1) - m(s-1)$ を定義すると，r 州が $m+1$ 議席を受け取り，$s-r-1$ 州が m 議席を受け取る配分 $(n-1, m+1, \ldots, m+1, m, \ldots, m) \in L_{n-1}$ が $\ell_n(\theta)$ を定めることから，

$$\ell_n(\theta) = \frac{h}{1+r\frac{d(m)}{d(n-1)}+(s-r-1)\frac{d(m-1)}{d(n-1)}} \tag{8}$$

が得られる．

$\theta = 2$ のときは式 (7) または式 (8) に $d(k) = k+1/2$ を代入すればよい．また，$\theta \to \pm\infty$ に対しては，式 (7) と式 (8) に $d(k) = k$ と $d(k) = k+1$ をそれぞれ代入すればよい． □

集合 L_{n-1} は L_n の部分集合であることから，$\ell_n(\theta) \le \ell_{n+1}(\theta)$ の関係が成り立つが，実際は，狭義の不等号が成り立つ：

定理 7 不等式：$1 < \ell_2(\theta) < \ell_3(\theta) < \cdots < \ell_{h-2s+3}(\theta) < h-s+1$ が成り立つ．

証明 $2 \le n < h-2s+3$ とする．丸め関数 $d(k)$ の狭義増加性および表 2 の結果より，容易に $\ell_n(\theta) < \ell_{n+1}(\theta)$ が導かれる．また，$\ell_{h-2s+3}(\theta)$ を定める配分はただ 1 つ存在し，$n = h-2s+3$ なので，θ の値に関係なく，このときの配分は $(h-2s+2, 2, \ldots, 2)$ である．$h \ge 2s$ と仮定しているので，$h-2s+2 > 1$ となるが，補題 2 より θ が有限の値の場合，$d(h-2s+2)/d(1) < h-2s+2$ となることから，

$$\ell_{h-2s+3}(\theta) = \frac{h}{1+(s-1)\frac{d(1)}{d(h-2s+2)}} < \frac{h}{1+\frac{s-1}{h-2s+2}} = \frac{h(h-2s+2)}{h-s+1}$$

となる．$s \geq 3$ と仮定していることを思い出すと，簡単な計算より $h(h-2s+2) < (h-s+1)^2$ が成り立つ．このことから，$\ell_{h-2s+3}(\theta) < h-s+1$ が導かれる．最後に，表 2 の結果に補題 2 を用いると，$\ell_2(\theta)$ は狭義増加となることが分かる．よって，$\ell_2(\theta) > h/(h-s+1) > 1$ が導かれる． □

アダムズ方式（$\theta \to -\infty$）の場合，$d(h-2s+2)/d(1) = h-2s+2$ となり，ジェファソン方式（$\theta \to +\infty$）の場合，$d(h-2s+2)/d(1) = (h-2s+3)/2 < h-2s+2$ となることに注意すると，両方式に関しても本定理は成り立つ．この定理より，次のことが考えられる．

定理 8 除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ の議席配分では，取り分が $\ell_n(\theta)$ より大きい州が受け取る議席数は n 以上となる．ここで，n は $2 \leq n \leq h-2s+3$ を満たす整数である．

証明 任意の取り分 $\boldsymbol{q} \in Q$ に対し除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ が配分 $\boldsymbol{a} \in A$ を与えるとき，不等式 (4) が成り立つ．式 (6) および定理 5 より，不等式 (4) が成り立つならば，$q_1 \leq F(\delta) \leq F(0) = \ell_n(\theta)$ が成り立つ．このことから，州 1 の取り分が $q_1^* > \ell_n(\theta)$ となる取り分 $\boldsymbol{q}^* \in Q$ に対し，除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ の定める配分 $\boldsymbol{a}^*$ はどれも $L_{n-1}^0 \cup \cdots \cup L_{n-1}^{s-2}$ には属さない．すなわち，そのような配分 $\boldsymbol{a}^*$ では，州 1 に少なくとも n 議席が与えられる（$a_1^* \geq n$）． □

本定理もアダムズ方式とジェファソン方式に対して成り立つ．

4. 州の議席数が n 以下となるための十分条件

この章では除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ に対し，州 i に与えられる議席数が n 以下となるための十分条件を導く[*10]．以前同様，$i=1$ とし，$S' = \{2,\ldots,s\}$ とする．また，n の範囲は $1 \leq n \leq h-s$ とする．各 n（$1 \leq n \leq h-s$）に対し，$a_1 \geq n+1$（$1 \leq n \leq h-s$），$a_i \geq 1$（$i \in S'$）となるすべての配分 $\boldsymbol{a} = (a_1,\ldots,a_s)$ の集合を G_{n+1} と定義する．ここでも，州 1 以外の州の取り分と議席数に関して，

$$q_2 \geq q_3 \geq \cdots \geq q_s, \qquad a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_s$$

と仮定する．

すべての配分 $\boldsymbol{a} \in G_{n+1}$ に関して最小化することにより，

$$u_n(\theta) = \min_{\boldsymbol{a} \in G_{n+1}} \frac{h}{1+\sum_{i \in S'} \frac{d(a_i)}{d(a_1-1)}} \tag{9}$$

を定義する．G_{n+1} に属する配分では，$a_1 \geq 2$ なので $d(a_1-1) > 0$ に注意する．

*10 以下のすべての定理はアダムズ方式（$\theta \to -\infty$）とジェファソン方式（$\theta \to +\infty$）に対しても成り立つ．

表 3 $u_n(\theta)$．ここで，$m = \lfloor \frac{h-n-1}{s-1} \rfloor$，$r = (h-n-1) - m(s-1)$ とする

Table 3 $u_n(\theta)$ where $m = \lfloor \frac{h-n-1}{s-1} \rfloor$, $r = (h-n-1) - m(s-1)$.

θ	配分方式	$u_n(\theta)$
$\theta \to -\infty$	Adams	$\frac{hn}{h-1}$
$\theta < 2$		$\frac{h}{1+r\frac{d(m+1)}{d(n)}+(s-r-1)\frac{d(m)}{d(n)}}$
$\theta = 2$	Webster	$\frac{h(2n+1)}{2h+s-2}$
$\theta > 2$		$\frac{h}{1+\frac{d(h-s-n+1)}{d(n)}+(s-2)\frac{d(1)}{d(n)}}$
$\theta \to +\infty$	Jefferson	$\frac{h(n+1)}{h+s-1}$

定理 9 式 (9) の右辺の最小値を与える配分では $a_1 = n+1$ となる．

証明 定理 4 の証明に準ずる． □

定理 10 各整数 n（$1 \leq n \leq h-s$）に対し，$u_n(\theta)$ は表 3 のようになる．

証明 定理 6 の証明に準ずる． □

定理 11 不等式：$1 < u_1(\theta) < u_2(\theta) < \cdots < u_{h-s}(\theta) < h-s+1$ が成り立つ．

証明 定理 7 の証明に準ずる． □

定理 12 除数方式 $\mathcal{S}(k,\theta)$ の議席配分では，取り分が $u_n(\theta)$ より小さい州が受け取る議席数は n 以下となる．ここで，n は $1 \leq n \leq h-s$ を満たす整数である．

証明 定理 8 の証明に準ずる． □

5. 取り分と配分議席数との最大乖離

ここでは，アメリカの州の数 $s = 50$，下院議員の数 $h = 435$ を使用する．ある 1 州の取り分の値を固定，他の 49 州の取り分を可変とするき，その 1 州に与えられる議席数を考える．配分方式をアダムズ方式，ヒル方式，ウェブスター方式およびジェファソン方式の 4 方式に限定し，取り分の値も（半）整数値に限定して，州の取り分の値と議席数の乖離について調べてみる．

表記を簡単にするため，ここの議論では，州 i の取り分 q_i や配分議席数 a_i を示すとき，添え字 i を省略することにする．$\ell_n(\theta) < q$ となる最大の整数を n^* とし，$q < u_n(\theta)$ となる最小の整数を n^{**} とするとき，定理 8 と定理 12 より，$n^* \leq a \leq n^{**}$ となるので，最大乖離は $q - n^*$ または $n^{**} - q$ となる．取り分 q が 1 から 10 の各整数，および，10 から 90 の 10 の倍数のとき，アダムズ方式，ヒル方式，ウェブスター方式，ジェファソン方式の与える議席数と取り分の最大乖離を求め，結果を表 4 にまとめた．取り分 q が小さければ，4 方式すべてで $a = q$ が成り立ち，取り分と議席数の間に差異は存在しない．実際，取り分の値が 1 から 7 までの整数値であれば，州には取り分と同数の議席が配分され，両者の最大乖離はゼロとなる．しかし，取り分の値が大きくなると，議席数と取り分の間に差異が生

表 4 整数取り分に対する最大乖離
Table 4 Maximum gaps for integer quotas.

取り分	Adams	Hill	Webster	Jefferson
$1, 2, \ldots, 7$	0	0	0	0
8	0	1	0	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	1
20	2	1	1	2
30	3	2	2	3
40	4	3	2	4
50	5	3	3	5
60	6	4	3	6
70	7	5	4	7
80	9	5	4	9
90	10	6	5	10

表 5 半整数取り分に対する最大乖離
Table 5 Maximum gaps for half integer quotas.

取り分	Adams	Hill	Webster	Jefferson
$1.5, 2.5, \ldots, 10.5$	0.5	0.5	0.5	0.5
20.5	1.5	1.5	1.5	1.5
30.5	2.5	1.5	1.5	2.5
40.5	4.5	2.5	2.5	4.5
50.5	5.5	3.5	2.5	5.5
60.5	6.5	3.5	3.5	6.5
70.5	7.5	4.5	3.5	7.5
80.5	8.5	5.5	4.5	8.5
90.5	9.5	5.5	4.5	9.5

じる．ウェブスター方式は 4 方式の中で最大乖離が一番小さい．

小数部が .5 となる半整数の取り分に対して，同様のことを繰り返した．結果を**表 5** にまとめる．配分議席数が取り分の値とたかだか 0.5 までの差異であるのは，取り分の値が 10.5 までで，取り分の値が 20.5 以上になると，アダムズ方式とジェファソン方式の最大乖離は取り分の増加とともに増加する．ヒル方式とウェブスター方式の最大乖離も同様に増加するが，アダムズ方式やジェファソン方式に比べると，その増加の割合は小さい．ここでも，ウェブスター方式の最大乖離が 4 方式の中では一番小さい．

現在カリフォルニア州の取り分は 52.54 議席であるが，本論文の議論では取り分は 1 議席以上を仮定しているので，実際の取り分が 1 議席より少ないノースダコタ，バーモント，ワイオミングの 3 州の取り分は 1 議席と修正する必要があり，それにともない，カリフォルニア州の取り分を 52.49 議席と微調整する．現行の配分方式，すなわち，ヒル方式では同州に 53 議席が配分され，その乖離は $53 - 52.49 = 0.51$ 議席と小さい．しかしながら，他の 49 州間で人口移動をすれば，ヒル方式は同州に 49 議席を与え，乖離が $52.49 - 49 = 3.49$ 議席と拡大する．20 世紀以降のアメリカの議席配分の歴史では，現実に使用された議席配分方式，つまり，ウェブスター方式とヒル方式（1940 年以降使用）では，1 議席より大きな乖離は現れなかったが，今後，人口の多い州に大きな乖離が生じる可能性は否定できない．

現代では州の人口は国勢調査の実施前に，ほぼ正確な人口が判明している．もし，国勢調査実施直前に大規模な人口移動を意図的にすれば，大きな乖離を作り出すことにより，特定の州（たとえば，ある政党の支持者が非常に多い州）にとって，きわめて有利な議席配分結果を得ることが可能となる．その結果，民意に反した議会構成が生まれたり，民意に反した大統領が選ばれる*11危険性が生じる．

6. まとめ

本論文では，州の取り分 q_i とその州に配分される議席数 a_i の最大乖離について調べた．具体的には，配分議席数 a_i が n 以上となる条件：$q_i > \ell_n(\theta)$（定理 8）および配分議席数が n 以下となる条件：$q_i < u_n(\theta)$（定理 12）を導き，各定理に含まれる $\ell_n(\theta)$ と $u_n(\theta)$ の形を導いた．さらに，5 章では，取り分 q_i の値に対する配分議席数 a_i の取りうる値の最大値と最小値から，取り分と議席数の最大乖離を求めた．

参考文献

[1] Balinski, M.L. and Young, H.P.: *Fair Representation*, 2nd ed., Brookings Institution Press (2001).

[2] Chafee, Jr., Z.: Reapportionment of the House of Representatives under 1950 Census, *Cornell Law Review*, Vol.36, No.4, pp.643–665 (1951).

[3] Doten, C.W., Gay, E.F., Mitchell, W.C, Selinman, E,R.A., Young, A.A. and Rossiter, W.S.: Report upon the Apportionment of Representatives, *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, Vol.17, No.136, pp.1004–1013 (1921).

[4] Ernst, L.R.: Apportionment Methods for the House of Representatives and the Court Challenges, *Management Science*, Vol.40, No.10, pp.1207–1227 (1994).

[5] Grilli di Cortona, P, Manzi, C., Pennisi, A., Ricca, F. and Simeone, B.: *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*, SIAM (1999).

[6] Handley, L. and Grofman, B. (Eds.): *Redistricting in Comparative Perspective*, Oxford University Press (2008).

[7] Huntington, E.V.: A New Method of Apportionment of Representatives, *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, Vol.17, No.135, pp.859–870 (1921).

[8] Huntington, E.V.: The Apportionment of Representatives in Congress, *Trans. American Mathematical Society*, Vol.30, No.1, pp.85–110 (1928).

[9] Ichimori, T.: Relaxed Divisor Methods and Their Seat Biases, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, No.1, pp.63–72 (2012).

[10] Ichimori, T.: A Note on Relaxed Divisor Methods, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55,

*11 アメリカの大統領選は間接選挙制で，直接投票できる州の選挙人の数は，州の上院議員（定数 2）と下院議員の定数の和で決まる．

No.4, pp.225–234 (2012).
[11] 一森哲男：分布間ダイバージェンスと議席配分方式の関係について，情報処理学会論文誌，Vol.54, No.8, pp.1988–1995 (2013).
[12] 一森哲男：ダイバージェンスによる議員定数配分方式の偏りについて，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.58, pp.42–55 (2015).
[13] 一森哲男：情報理論の観点から最善の議席配分方式について，情報処理学会論文誌，Vol.59, No.2, pp.795–799 (2018).
[14] 一森哲男：議席配分の数理，近代科学社，東京 (2018).
[15] Owens, F.W.: On the Apportionment of Representatives, *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, Vol.17, No.136, pp.958–968 (1921).
[16] 薩摩順吉，大石進一，杉原正顯（編）：応用数理ハンドブック，朝倉書店，東京 (2013).
[17] Stolarsky, K.B.: Generalizations of the Logarithmic Mean, *Mathematics Magazine*, Vol.48, No.2, pp.87–92 (1975).
[18] Willcox, W.F.: The Apportionment of Representatives, *The American Economic Review*, Vol.6, No.1, Supplement, pp.3–16 (1916).
[19] Willcox, W.F.: The Apportionment Problem and the Size of the House: A Return to Webster, *Cornell Law Quarterly*, Vol.35, pp.367–389 (1950).
[20] Young, H.P.: *Equity*, Princeton University Press (1994).

付　　録

A.1 定理 5 の証明

いま，$0 \le \delta \le s-3$（つまり，$\delta \ne s-2$）を満たす整数 δ の各値に対して，$F(\delta) > F(\delta+1)$ を示す．$\theta < 2$ の場合を考える．定理 4 および定理 2 より，配分

$$\boldsymbol{a} = (n-1, h-(n-1)-2t-\delta,\ 2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1) \in L^{\delta}_{n-1}$$

は $F(\delta)$ を与える，つまり，式 (6) の右辺の分数の値を最大にする配分である．当然，州 3 から州 s の中で，1 議席を受け取る州の数は δ であるが，2 議席を受け取る州の数を t とすると，$t+\delta = s-2$ となり，いま $0 \le \delta \le s-3$ なので，$1 \le t \le s-2$ が成り立つ．$a = a_2 = h-(n-1)-2t-\delta$ とおき，$a \ge 2$ に注意する．さらに，上記の配分に対し，2 議席が配分されている州 $t+2$ から，州 2 に 1 議席を移動した配分は $a_1 = n-1$，$a_2 = a+1$，$a_3 = \cdots = a_{t+1} = 2$，$a_{t+2} = \cdots = a_s = 1$ となるが，この配分は $L^{\delta+1}_{n-1}$ に属し，$F(\delta+1)$ を定めているので (定理 2)，不等式 $F(\delta) > F(\delta+1)$ は

$$\frac{h-\delta}{1+\frac{d(a-1)+td(1)}{d(n-1)}} > \frac{h-\delta-1}{1+\frac{d(a)+(t-1)d(1)}{d(n-1)}}$$

あるいは

$$\frac{h-\delta}{d(n-1)+d(a-1)+td(1)} > \frac{h-\delta-1}{d(n-1)+d(a)+(t-1)d(1)}$$

と書き直せる．ここで，この式のたすき掛けを行い，その差（D とおく）を求めると

$$\begin{aligned} D &= (h-\delta)\{d(n-1)+d(a)+(t-1)d(1)\} \\ &\quad - (h-\delta-1)\{d(n-1)+d(a-1)+td(1)\} \\ &= d(n-1)+(h-\delta)d(a)-(h-\delta-1)d(a-1) \\ &\quad -(h-t-\delta)d(1) \end{aligned}$$

となる．ここで，補題 2 を用いる．$a \ge 2$ なので，$d(1)/d(a) = \mathcal{S}(1,\theta)/\mathcal{S}(a,\theta)$ は θ に関して狭義増加となる．いま，$\theta < 2$ と仮定しているので，

$$\frac{d(1)}{d(a)} = \frac{\mathcal{S}(1,\theta)}{\mathcal{S}(a,\theta)} < \frac{\mathcal{S}(1,2)}{\mathcal{S}(a,2)} = \frac{3}{2a+1}$$

となる．同様に，

$$\frac{d(a-1)}{d(a)} < \frac{\mathcal{S}(a-1,2)}{\mathcal{S}(a,2)} = \frac{2a-1}{2a+1}$$

となる．これらを利用すると，

$$\begin{aligned} D &> d(n-1)+(h-\delta)d(a)-(h-\delta-1)\frac{2a-1}{2a+1}d(a) \\ &\quad -(h-t-\delta)\frac{3}{2a+1}d(a) \\ &= d(n-1)+\frac{d(a)}{2a+1}\Big\{(2a+1)(h-\delta) \\ &\quad -(2a-1)(h-\delta-1)-3(h-t-\delta)\Big\} \\ &= d(n-1)+\frac{d(a)}{2a+1}(a-n+t) \end{aligned}$$

となる．$a-n+t \ge 0$ ならば，$D > 0$ となることは明らかなので，$a-n+t < 0$ と仮定する．$\theta < 2$ なので，$d(a) < a+1/2$ となるが，$D > d(n-1)+(a+1/2)(a-n+t)/(2a+1) > (n-1)+(a-n+t)/2 = (a+n+t-2)/2 > 0$ より $D > 0$ となる．最後の不等式は $a \ge 2$，$n \ge 2$，$t \ge 1$ より導ける．

$\theta > 2$ の場合を考える．$T = \{2, \ldots, s-\delta\}$ 上で議席総数を $h-n-\delta+1$ をした問題 $\mathrm{P}_{\min}$ を考え，最適な配分を $\boldsymbol{a} = (a_2, \ldots, a_{s-\delta})$ とする．さらに，$a_{s-\delta} = 2$ と固定した問題 $\mathrm{P}_{\min}$ の最適な配分を $\boldsymbol{b} = (b_2, \ldots, b_{s-\delta})$ とする．当然，$b_{s-\delta} = 2$ である．このとき，明らかに $\sum_{i \in T} d(a_i-1) \le \sum_{i \in T} d(b_i-1)$ が成り立つことから，

$$\frac{h-\delta}{1+\sum_{i\in T}\frac{d(a_i-1)}{d(n-1)}} \ge \frac{h-\delta}{1+\sum_{i\in T}\frac{d(b_i-1)}{d(n-1)}} \qquad \text{(A.1)}$$

が成り立つ．このとき，h 議席の配分 $(n-1, \boldsymbol{a}, 1, \ldots, 1)$ および $(n-1, \boldsymbol{b}, 1, \ldots, 1)$ はどちらも L^{δ}_{n-1} に属し，$F(\delta)$ の定義式 (6) および定理 4 より，前者の配分は $F(\delta)$ を与えることが分かる．

$(n-1, \boldsymbol{b}, 1, \ldots, 1) \in L^{\delta}_{n-1}$ を書き直すと，定理 2 より，適当な整数 $0 \le r \le s-\delta-3$ と $m \ge 2$ が存在して，$b_1 = n-1$，$b_2 = \cdots = b_{r+1} = m+1$，$b_{r+2} = \cdots = b_{s-\delta-1} = m$，$b_{s-\delta} = 2$，$b_{s-\delta+1} = \cdots = b_s = 1$ となる．（ただし，$r = 0$ の場合は，$b_1 = n-1$，$b_2 = \cdots = b_{s-\delta-1} = m$，$b_{s-\delta} = 2$，

$b_{s-\delta+1} = \cdots = b_s = 1$ となる．）いま，州 $s-\delta$ から州 $r+2$ に 1 議席を移動させて，新しい配分 $b_1 = n-1$, $b_2 = \cdots = b_{r+2} = m+1$, $b_{r+3} = \cdots = b_{s-\delta-1} = m$, $b_{s-\delta} = \cdots = b_s = 1$ を作る．（ただし，$r = s-\delta-3$ の場合は，$b_1 = n-1$, $b_2 = \cdots = b_{s-\delta-1} = m+1$, $b_{s-\delta} = \cdots = b_s = 1$ を作る．）この新しい配分は $L_{n-1}^{\delta+1}$ に属し，$F(\delta+1)$ を定義することに注意する．

ここで，$U = T \backslash \{r+2, s-\delta\}$ を定義し，次の不等式：

$$\frac{h-\delta}{d(b_1) + \sum_{i \in U} d(b_i - 1) + d(m-1) + d(1)} > \frac{h-\delta-1}{d(b_1) + \sum_{i \in U} d(b_i - 1) + d(m) + d(0)} \quad \text{(A.2)}$$

を証明する．これら 2 つの不等式 (A.1), (A.2) から，$F(\delta) > F(\delta+1)$ が導ける．

以下，不等式 (A.2) を証明する．両辺のたすき掛けの差を D とおき，$d(0) = 0$ を代入すると，

$$\begin{aligned} D &= (h-\delta)\Big(d(b_1) + \sum_{i \in U} d(b_i - 1) + d(m)\Big) \\ &\quad - (h-\delta-1)\Big(d(b_1) + \sum_{i \in U} d(b_i - 1) + d(m-1) + d(1)\Big) \\ &= d(b_1) + \sum_{i \in U} d(b_i - 1) + (h-\delta)d(m) \\ &\quad - (h-\delta-1)(d(m-1) + d(1)) \end{aligned}$$

を得る．ここで，$b_1 = n-1$ を代入する．また，$|T| = s-\delta-1$ なので，$|U| = s-\delta-3 \geq 0$ となる．だから，U に属する州で，r 州が $m+1$ 議席を受け取り，残り $s-\delta-r-3$ 州が m 議席を受け取るので

$$\begin{aligned} D &= d(n-1) + (rd(m) + (s-\delta-r-3)d(m-1)) \\ &\quad + (h-\delta)d(m) - (h-\delta-1)(d(m-1) + d(1)) \\ &= d(n-1) + d(m)(h-\delta+r) \\ &\quad - d(m-1)(h-s+r+2) - (h-\delta-1)d(1) \end{aligned}$$

ここで，$m \geq 2$ に注意して，補題 2 を用いると

$$d(m) > \frac{m+1}{m} d(m-1)$$

の関係が得られる．これを利用すると

$$\begin{aligned} D &> d(n-1) \\ &\quad + ((m+1)(h-\delta+r) - m(h-s+r+2))\frac{d(m-1)}{m} \\ &\quad - (h-\delta-1)d(1) \\ &= d(n-1) + (h-\delta+r+m(s-\delta-2))\frac{d(m-1)}{m} \\ &\quad - (h-\delta-1)d(1) \end{aligned}$$

議席の総数に関して，$(n-1, \boldsymbol{b}, 1, \ldots, 1) \in L_{n-1}^{\delta}$ より，$h = (n-1) + ((m+1)r + m(s-\delta-r-2)) + 2 + \delta = (n-1)+r+m(s-\delta-2)+2+\delta = n+r+m(s-\delta-2)+\delta+1$ なので，$r + m(s-\delta-2) = h-\delta-n-1$ を代入すると

$$\begin{aligned} &= d(n-1) + (2(h-\delta-1) - (n-1))d(m-1)/m \\ &\quad - (h-\delta-1)d(1) \end{aligned}$$

補題 2 を用いると，$m \geq 3$ のとき $d(m-1)/d(1) > m/2$ となり，$m = 2$ のとき $d(m-1)/d(1) = m/2$ となることを利用すると

$$\begin{aligned} &\geq d(n-1) + (2(h-\delta-1) - (n-1))d(1)/2 \\ &\quad - (h-\delta-1)d(1) \end{aligned}$$

$n \geq 2$ なので $d(n-1) > n-1$ となり，

$$\begin{aligned} &> (n-1) - (n-1)d(1)/2 \\ &= (n-1)(2-d(1))/2 \end{aligned}$$

となる．$n \geq 2$, $d(1) < 2$ なので，$D > 0$ が導かれる．よって，$\theta > 2$ の場合，不等式 $F(\delta) > F(\delta+1)$ が成り立つ．

$\theta = 2$ の場合は自明なので，定理 5 が成り立つ．　□

一森 哲男　（正会員）

昭和 28 年生．昭和 57 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了．同年広島大学工学部助手．昭和 60 年大阪工業大学工学部専任講師．昭和 63 年大阪工業大学工学部助教授．平成 8 年より大阪工業大学情報科学部教授．システムの最適化に関する研究に従事．工学博士．昭和 62 年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究奨励賞受賞．平成 25 年日本応用数理学会論文賞受賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本応用数理学会各会員．