Vol.2019-AL-172 No.5
2019/3/5

多重リスト彩色問題の計算複雑性と近似保証付きアルゴリズム

蛭田 海斗[1,a)]

概要：多重リスト彩色問題とは，グラフと，グラフの頂点ごとに塗ることが許された色のリストが与えられ，そのリストの中から，辺で結ばれた頂点間には同じ色が割り当てられないように，複数個の色を選ぶ問題である．このとき，それぞれの頂点に割り当てられる色の数が，なるべく平等になることが望まれる．多重リスト彩色問題は，優先ユーザを考慮した周波数割り当てのモデル化で用いられ，いくつかのヒューリスティックなアルゴリズムが提案されているが，出力が保証されているものは殆ど無い．本研究では，最も割り当てられた色の個数が少ない頂点の色の数を最大化する問題について取り扱う．そのような多重リスト彩色問題を最小値最大化多重リスト彩色問題と呼び，その計算複雑性を明らかにすること，および，近似保証付きアルゴリズムの設計を研究目的とする．それらの目的について，本研究では，いくつかのグラフ族における計算複雑性，一般グラフでの近似不可能性，および，特殊なクリーク分割が存在するグラフでは近似保証がある多項式時間アルゴリズムが得られることを示した．

Computational complexity and an algorithm with approximate guarantee for the list multi-coloring probleme

Abstract: In the list multi-coloring problem, we are given a graph and lists of colors for its vertices, and we select colors for each vertex from the list so that the same color is not assigned between adjacent vertices. Moreover, it is desirable that the number of colors assigned to each vertex is as equal as possible. The list multi-coloring problem models frequency allocation under the existence of priority users. Although several heuristic algorithms have been proposed, they merely have outputs with any guarantees. In this research, we deal with the problem of maximizing the smallest number of colors assigned to a vertex. The goal of this research is to reveal the computation complexity of that problem and to solve that problem with guarantee. To this end, we show that the computational complexity for some graph classes, the inapproximability for general graphs, and a polynomial-time algorithm with approximate guarantee for graphs which can be divided into cliques with a special property.

1. はじめに

優先的なユーザを考慮しつつ，周波数帯を効率よく割り当てる研究に関するモデルとして，グラフ理論における多重リスト彩色を用いたモデルが [1] によって提案されている．このモデルでは，ユーザ間で干渉する周波数帯の関係は干渉グラフと呼ばれるものを用いて表される．干渉グラフとは，一般のユーザをグラフの頂点として，同じ周波数帯を使うと干渉してしまうユーザ同士を辺で結んだようなグラフである．このようなグラフの上で，優先ユーザによって専有されていない周波数帯 (グラフ理論では色と呼ばれる) を，それぞれのユーザに干渉することなく複数個割り当てるような問題を考える．このとき，それぞれのユーザに割り当てられる周波数帯の数をなるべく平等にすることが求められる．

そのような問題について，周波数帯を割り当てるという文脈でいくつかのヒューリスティックな分散アルゴリズムが [1]，[2]，[3] によって提案されているが，理論的な保証が得られているものはまだない．したがって本研究では，そのような問題について，理論的な難しさを明らかにすること，および，理論的な保証が得られる多項式時間アルゴリズムを提案することを目的とする．特に，最も割り当てられた色の数が少ないユーザの色数を最大化するような問

[1] 電気通信大学
The University of Electro-Communications
[a)] kaito.szn.lb@gmail.com

Vol.2019-AL-172 No.5
2019/3/5

題 (最小値最大化多重リスト彩色問題) について考察する．

本研究では，最小値最大化多重リスト彩色問題において，定数近似が不可能であること，いくつかのグラフ族に絞っても NP 困難であること，および，グラフの特殊な分割が与えられれば多項式時間で保証のある解が得られるようなアルゴリズムが存在することを示した．

2. 定義

本研究では，特に断りがない限り，有限な単純無向グラフについてのみ取り扱う．そのため，単純無向グラフを単にグラフと呼ぶ．グラフ G の頂点集合と辺集合を，それぞれ $V(G), E(G)$ と書く．

グラフ $G=(V,E)$ の頂点 $u,v\in V$ について，$(u,v)\in E$ のとき，u と v は隣接している言い，u (および v) は (u,v) に接続していると言う．また，u,v を (u,v) の端点と言う．ある頂点 $v\in V$ と隣接している頂点の集合，すなわち，$\{u\mid u\in V,(u,v)\in E\}$ を，v の隣接頂点などと呼び，$N(v)$ と書く．隣接頂点の個数，すなわち，$|N(v)|$ を，u の次数と呼び，$d_G(v)$ と書く．G が明らかなときは，単に $d(v)$ と書くこともある．

頂点部分集合 $U\subseteq V$ を頂点とし，両端点が U に属している全ての E の辺を辺集合とするようなグラフを，U によって誘導される G の誘導部分グラフと呼ぶ．

任意の 2 頂点間に辺があるようなグラフのことを完全グラフと呼び，頂点数が n であるような完全グラフのことを K_n と書く．完全グラフであるような誘導部分グラフのことを，そのグラフのクリークと呼ぶ．

グラフ $G=(V,E)$ において，V のある分割 A,B が存在して，$\forall(a,b)\in E, a\in A$ かつ $b\in B$ を満たすとき，G を 2 部グラフと呼ぶ．さらに，任意の A の要素と B の要素の組に対して辺が存在するとき，その 2 部グラフを完全グラフと呼ぶ．また，A もしくは B の要素数が 1 であるような完全 2 部グラフを星グラフと呼ぶ．

3. 扱う問題

本研究では平等さとして，最小値の最大化を用いる．すなわち，本研究で扱う問題は，

- グラフ G，
- 有り得る色の集合 C
- 各頂点ごとの色のリスト $L_v\subseteq C$ $(\forall v\in V(G))$

を入力として，

- 割り当てられた色の数が最も少ない頂点の色の数を最大化し，
- 辺で結ばれた頂点同士は同じ色にならず，
- v に割り当てられたすべての色は L_v に入っている

ような色の割り当てを見つける問題である．本研究ではこのような問題を最小値最大化多重リスト彩色問題と呼ぶ．$x_{v,c}$ を頂点 v の色 c を使うか否かに対応する 01 変数とすると，最小値最大化多重リスト彩色問題は 01 整数計画問題として次のように定式化できる．

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & w\\
\text{subject to}\quad & x_{v,c}=0,\ \forall c\notin L_v,\\
& x_{u,c}+x_{v,c}\le 1,\ \forall (u,v)\in E,\\
& \sum_{c\in C} x_{v,c}\ge w,\ \forall v\in V,\\
& x_{v,c}\in\{0,1\},\ \forall v\in V,\ \forall c\in C.
\end{aligned}$$

4. 完全グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題とセミマッチング

2 部グラフ $G=(U\cup V,E)$ 上でのセミマッチングとは，辺部分集合 $M\subseteq E$ で，全ての $u\in U$ について，u はちょうど 1 つの M の辺と接続しているようなもののことを言う．つまり，通常のマッチングと違い，1 対多のマッチングである．

ある 2 部グラフ $G=(U\cup V,E)$ 上のセミマッチングを M とする．$v\in U\cup V$ について，M によってできるグラフ $H=(U\cup V,M)$ における頂点の次数 $d_H(v)$ を v の M による次数と言い，$d_M(v)$ と書く．

セミマッチング問題とは，U の最小次数が 1 以上であるような 2 部グラフ $G=(U\cup V,E)$ と，狭義凸関数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，M による頂点のコストを $cost_M(v)=f(d_M(v))$ として，V の頂点の M によるコストの総和 $\sum_{v\in V} cost_M(v)$ が最小となるようなセミマッチングを求める問題である．セミマッチング問題の最適解は，$O(|U||E|)$ 時間で求める事ができる [4]．

完全グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題では，ある色で割り当てられる頂点は，どの頂点のリストにも入っていないような色がない場合には，ちょうど 1 つである．したがって，色集合を U，頂点集合を V，$v\in V$ のリストに色 $u\in U$ が入っている場合に，その間に辺を引いたような 2 部グラフを構成し，狭義凸関数 f を $\forall i\in\mathbb{R}^+, f(i)>|V|f(i+1)$ を満たす関数とすれば，セミマッチング問題に帰着できる．

5. 計算複雑性

本研究では計算複雑性について以下のことを明らかにした．

定理 1. 2 つ以上の頂点の色のリストに入っている色の数を U とすると，星グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が $\frac{|U|}{2}$ 以上かどうかという判定問題は NP 完全である．

定理 2. 任意の自然数 $k\ge 1$ について，完全 2 部グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が k 以上かどうかという判定問題は NP 完全である．

定理 3. 後述する良いクリーク分割が入力として与えられ

ていたとしても，任意の自然数 $k \geq 1$ について，最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が k 以上かどうかという判定問題は NP 完全である．

定理 4. 一般のグラフにおいて，任意の定数 $g > 1$ について，最小値最大化リスト彩色問題の最適値を OPT としたとき，目的関数が $\lfloor \frac{\mathrm{OPT}}{g} \rfloor$ 以上となる解を出力するような多項式時間アルゴリズムは，$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ の仮定のもとで存在しない．

本稿では定理 2 定理 3 についてのみ示す．ただし，定理 3 については次章で述べる．

5.1 完全 2 部グラフ

完全 2 部グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題において，任意の自然数 $k \geq 1$ について最適値が k 以上であるかどうかという判定問題が NP 完全であることを示す．まず $k = 1$ の場合について示し，そこから容易に $k \geq 1$ に一般化できることを述べる．

帰着には，NP 完全性が知られている Not-all-equal 3-SAT (NAE3-SAT) という判定問題を用いる．NAE3-SAT は 3-SAT に似た問題で，各クローズに 3 つの変数 (もしくはその否定) があるような CNF の命題論理式が充足可能かどうかを考える．しかし，NAE3-SAT ではクローズ内の全ての変数が真になってはいけない，すなわち，各クローズについて，1 つ以上の変数が真で，かつ，1 つ以上の変数が偽になるような変数への割り当てが存在するか？という判定問題が NAE3-SAT である．NAE3-SAT は 3-SAT とは違い，全てのクローズ内に全ての変数が正リテラルで表れているときも，NP 完全であることが知られている．したがって，今回はそのような場合についてのみ考える．

NAE3-SAT の変数を $X = \{x_1 \dots x_n\}$，変数の否定を $Y = \{y_1 \dots y_n\}$，クローズを $Z = \{z_1, \dots z_m\}$ とする．また，クローズ z_j に入っている変数を $x_{j,1}, x_{j,2}, x_{j,3} \in z_j$ と表す．

次のような頂点集合 $V = A \cup B$ 上の完全 2 部グラフを考える．

$$
\begin{aligned}
A &= X, \\
B &= Z_T \cup Z_F \cup Y, \\
Z_T &= \{z_{1,T}, \dots z_{m,T}\}, \\
Z_F &= \{z_{1,F}, \dots z_{m,F}\}.
\end{aligned}
$$

つまり，片側の部には変数個の頂点が，もう片側の部には変数個の頂点と，クローズの 2 倍の個数の頂点があるような完全 2 部グラフである．

そのグラフ上で，次のような色のリストを考える．

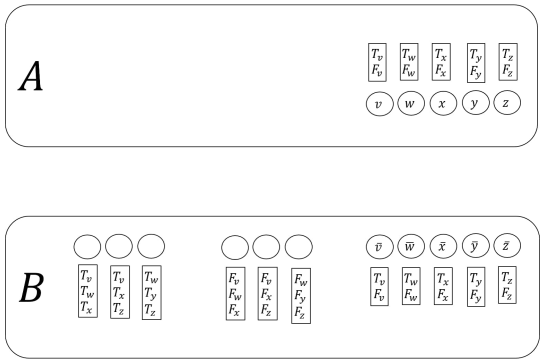

図 1 NAE3-SAT からの帰着の例．
Fig. 1 An example of the reduction from NAE3-SAT.

$$
\begin{aligned}
L_v &= \{T_k, F_k\},\ (v = x_k \in X), \\
L_v &= \{T_k, F_k\},\ (v = y_k \in Y), \\
L_v &= \{T_i, T_j, T_k\},\ (v = z_{l,T} \in Z_T,\ x_i, x_j, x_k \in z_l), \\
L_v &= \{F_i, F_j, F_k\},\ (v = z_{l,F} \in Z_F,\ x_i, x_j, x_k \in z_l).
\end{aligned}
$$

つまり，各変数 (とその否定) には専用の真偽を表す色が割り当てられていて，クローズを表す 2 つの頂点集合の頂点について，1 つ目の集合の各頂点には，そのクローズ内にある変数の真の色 3 つ，2 つ目の集合の各頂点には，そのクローズ内にある頂点の真偽に対応する変数の偽の色 3 つをそれぞれのリストに割り当てる．図 1 は NAE3-SAT の問題である

$$(v \vee w \vee x) \wedge (v \vee x \vee z) \wedge (w \vee y \vee z).$$

を帰着した例である．ただし，辺は省略している．

このようなグラフと色のリストで，NAE3-SAT の充足可能性が，最小値最大化多重リスト彩色の最適値が 1 以上かどうかと同値であることを示す．

補題 1. NAE3-SAT の充足可能性と，前述のグラフと色のリストにおける最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が 1 以上かどうかは同値である．

証明. 全ての頂点に 1 色以上を割り当てることを考える．そのとき，X, Y 間について注目すると，変数 x_i とその否定 y_i に対応する頂点は隣接していて，さらに同じ色 T_i, F_i のみがリストにある．したがって，x_i と y_i に 1 色ずつ割り当てるしかない (つまり，x_i と y_i のうち，どちらか一方には T_i が，もう一方には F_i が割り当てられる)．以上から，X と Y にはそのような割り当てが行われると仮定して，Z_T, Z_F に 1 色以上割り当てることができるかについて考えれば良い．

NAE3-SAT が充足できることは，各クローズに真と偽が必ず 1 つ以上含む割り当てがあることと同値である．変数 i の真偽を前述のようにその頂点に T_i, F_i のどちらが割り当てられているかに対応させる．ここで，クローズ z_l について，そのクローズの変数を u, v, w とする

と，$T_u, T_v, T_w, F_u, F_v, F_w$ がリストに含まれている頂点は $x_u, x_v, x_w, y_u, y_v, y_w, z_{l,T}, z_{l,F}$ だけであり，さらにその中で $z_{l,T}$ および $z_{l,F}$ と隣接しているのは x_u, x_v, x_w だけであることに注意する．すると，NAE3-SAT が充足するとき，x_u, x_v, x_w に割り当てられた色の中に，T_u, T_v, T_w のうち 1 つと，F_u, F_v, F_w のうち 1 つが必ず存在する．その色を $z_{l,T}$ および $z_{l,F}$ に割り当てることができるので，全ての頂点に 1 色以上を割り当てることができる．

逆に，NAE3-SAT が充足できないとき，どのように X と Y に真偽に対応する色を割り当てたとしても，必ずあるクローズ z_l で，その変数 u, v, w に T_u, T_v, T_w が割り当てられている，もしくは F_u, F_v, F_w が割り当てられているようなものが存在する．そのような場合には，$L_{z_{l,T}} = \{T_i, T_j, T_k\}, L_{z_{l,F}} = \{F_i, F_j, F_k\}$ であるから，そのどちらかには 1 色も割り当てることができない．したがって，最適値は 0 である． □

したがって，完全 2 部グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が 1 以上かどうかという判定問題は NP 完全である．$k \geq 1$ 以上かどうかに一般化するためには，単にそれぞれの頂点の色のリストに専用の色を $k-1$ 個ずつ割り当てれば良い．したがって，定理 2 が成り立つ．

6. 特殊なクリーク分割

グラフの頂点集合が，そのグラフの複数のクリークの頂点に分割されているときに，それらのクリークの集合のことグラフのクリーク分割と言う．先行研究により，完全グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色は多項式時間で厳密解を求めることができる．したがって，この節では，特殊なクリーク分割が得られている場合について考える．そのために，いくつかの定義を行う．

グラフ G のクリーク分割 Q の元 q の頂点 v について，$N^+(v) := \{x \mid (v,x) \in E(G), x \notin V(q)\}$ とする．

$q_i, q_j \in Q$ とし，$q_i \neq q_j$ とする．$G(E)$ のうち，片方の端点が q_i に，もう片方の端点が q_j に属しているような辺の集合を，q_i と q_j を結ぶ辺といい，$E(q_i, q_j)$ と書く．

2 つの辺集合 E_1, E_2 について，E_1 に属する全ての辺が，E_2 に属する全ての辺と端点を共有しないとき，E_1 と E_2 は互いに素であるという．

グラフのクリーク分割が互いに素な i, j, k について次のような条件を満たすとき，そのクリーク分割は良いクリーク分割であると言う．

$$\forall q_i, q_j, q_k \in Q, E(q_i, q_j) \text{ と } E(q_i, q_k) \text{ は互いに素である．}$$

すなわち良いクリーク分割とは，クリーク分割に含まれていない辺がクリーク同士を “上手く” 繋げているときに言う．図図 **2** は，良いクリーク分割をもつようなグラフである．

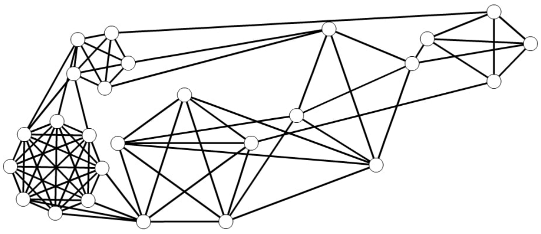

図 **2**　良いクリーク分割をもつグラフの例．
Fig. 2　An example of graphs with nice clique partitions

6.1　良いクリーク分割が存在するグラフにおける計算複雑性

この節では定理 3 を示す．n 頂点の完全グラフの頂点を $\{v_1, \ldots, v_n\}$ とする．このとき，次の辺を取り除いたグラフを，準完全グラフと呼ぶことにする．

$$(v_{3i+1}, v_{3i+3})\ (i = 0, 1, \ldots, \lfloor (n-1)/3 \rfloor - 1).$$

前節と同様に，準完全グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題において，任意の自然数 $k \geq 1$ について最適値が k 以上であるかどうかという判定問題が NP 完全であることを示す．まず $k = 1$ の場合について示し，そこから容易に $k \geq 1$ に一般化できることを述べるというのも同様である．さらに，準完全グラフが良いクリーク分割をもつことを示す．

帰着には，3-SAT を用いる．任意の 3-SAT は，全ての変数について，正リテラル 2 つと負リテラル 1 つで構成できることが知られている．したがって，今回はそのような場合についてのみ考える．

変数を $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ としたとき，次のような $3n$ 頂点の準完全グラフと色のリストを構成し，3-SAT の充足可能性と最小値最大化多重リスト彩色問題の最適解が 1 以上かどうかが同値となることを示す．まず頂点については，$i = 0, 1, \ldots, n-1$ について，v_{3i+1}, v_{3i+3} が変数 x_i に，v_{3i+2} がその否定 $\overline{x_i}$ に対応する．

色のリストは次のような手順で構成する．

(1) $k = 0, 1, \ldots, n-1$ について，頂点 $v_{3k+1}, v_{3k+2}, v_{3k+3}$ には，色 T_k をリストに割り当てる．
(2) クローズ c に対して，そのクローズに含まれている変数 (もしくは変数の否定) に対応する頂点で，まだどのクローズに対応する色もリストに入っていないような頂点をそれぞれ 1 つずつ選ぶ．その頂点には，c が 3 つのリテラルで構成されているならば，対応する 2 色 $C_{c,0}, C_{c,1}$ をリストに割り当て，2 つのリテラルで構成されているならば，対応する色 1 色 $C_{c,0}$ をリストに割り当てる．
(3) 手順 2 で割り当てられなかった頂点には，その頂点のリストにのみ固有の 1 色を割り当てる．

図 3 は，全ての変数について，正リテラル 2 つと負リテラル 1 つで構成されているような，3-SAT の問題である

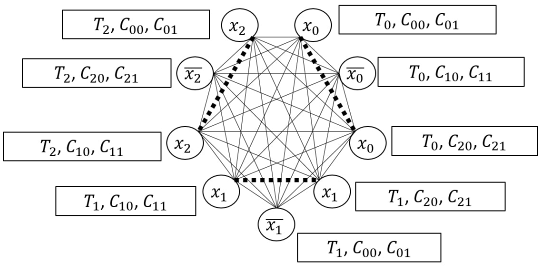

図 3　3-SAT からの帰着の例.
Fig. 3　An example of the reduction from 3-SAT.

$$(x_0 \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_0} \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee x_1 \vee \overline{x_2})$$

を帰着した例である．ただし，破線で描かれた辺は完全グラフとの対比をわかりやすくするために描かれているが，実際には存在しない．

補題 2. 3-SAT の充足可能性と，前述のグラフと色のリストにおける最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が 1 以上かどうかは同値である．

証明. 各変数 k とその否定に対応する頂点 $v_{3k+1}, v_{3k+2}, v_{3k+3}$ について，T_k が割り当てられている頂点が真，割り当てられていない頂点が偽に対応する．3-SAT が充足可能であるとき，全てのクローズにおいて，そのクローズの変数 (もしくはその否定) が 1 つ以上真になるような真偽の割り当てが存在する．したがって，その真偽を前述のように色の割り当てに対応させると，手順 2 でリストに色が割り当てられた全ての頂点 v_i について，同じクローズに属している変数を v_j, v_k とすると，v_i, v_j, v_k のうちのどれか 1 つには真に対応する色が割り当てられている．したがって，残った 2 つの頂点に，クローズに対応する 2 つの色を割り当てれば，最適値は 1 以上となる．逆に，3-SAT が充足不能であるとき，v_i, v_j, v_k に全て T の色が割り当てられていないようなクローズが存在する．そのとき，v_i, v_j, v_k はクリークであるから，クローズに対応する 2 色ではその 3 頂点に 1 色ずつ割り当てることはできない．したがって，最適値は 0 である．　□

したがって，準完全グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が 1 以上かどうかという判定問題は NP 完全である．$k \geq 1$ 以上かどうかに一般化するためには，単にそれぞれの頂点の色のリストに専用の色を $k-1$ 個ずつ割り当てれば良い．したがって，次の補題が成り立つ．

補題 3. 任意の自然数 $k \geq 1$ について，準完全グラフにおける最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値が k 以上かどうかという判定問題は NP 完全である．

ここで，準完全グラフと良いクリーク分割の関係について述べる．

補題 4. 準完全グラフには良いクリーク分割が存在する．

証明. 準完全グラフ G の頂点を $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ とし，n は 3 の倍数とする．このとき，次のように頂点を分割する．

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_k \in V \mid k \text{ を 3 で割った余りが } 1\}, \\ V_2 &= V_1 \setminus V_1. \end{aligned}$$

ここで，準完全グラフの定義から，全ての頂点間には，

$$(v_{3i+1}, v_{3i+3})\ (i = 0, 1, \ldots, \lfloor (n-1)/3 \rfloor - 1)$$

で表される辺を除いて，必ず辺が存在する．除かれている辺は，片方の端点が V_1，もう片方の端点が V_2 に属している．したがって，V_1 の頂点間，および V_2 の頂点間は必ず辺で結ばれている．つまり，V_1,V_2 で誘導される部分グラフ q_1, q_2 はそれぞれ G のクリークである．全ての頂点を 2 つのクリークで分割できたので，q_1, q_2 は良いクリーク分割の定義を満たす．　□

これは線形時間で求めることができる．したがって，定理 3 が成り立つ．

6.2　良いクリーク分割が存在するグラフの性質

グラフ G のクリーク数を $\omega(G)$，染色数を $\omega(G) = \chi(G)$ とする．グラフ G の任意の誘導部分グラフ I において，$\omega(I) = \chi(I)$ のとき，グラフ G は理想グラフであると言う．理想グラフでは，染色数やクリーク数を多項式時間で求められることが知られている [5]．本研究では，良いクリーク分割が存在するグラフは理想グラフであることを示したが，本稿では証明は省略する．

定理 5. 良いクリーク分割が存在するグラフは理想グラフである．

前節の NP 困難性を含むこれらの結果から，良いクリーク分割を持つグラフは理想グラフの部分族であり，染色数が多項式時間で求まる一方で，最小値最大化多重リスト彩色は NP 困難であることがわかる．

6.3　保証付きアルゴリズム

この節では，グラフ G の良いクリーク分割が入力として与えられているとき，最小値最大化多重リスト彩色問題には多項式時間で $\lfloor \frac{\mathrm{OPT}}{2} \rfloor$ 以上の解を出力するアルゴリズムについて述べる．このアルゴリズムのアイデアは，まず各クリークごとに，完全グラフに対するアルゴリズムを適用し，その解を元に割り当てを行うというものである．まず最初に，その割り当てに用いる補題について述べる．

補題 5. 任意の 2 部グラフ $G = (V, E)$ には，次のような部分グラフ $H = (V, E')$ が存在する．

$$\forall (v \in V), \left\lfloor \frac{d_G(v)}{2} \right\rfloor \leq d_H(v) \leq \left\lceil \frac{d_G(v)}{2} \right\rceil.$$

このように次数が半分 (奇数次数の頂点なら半分の切り下げと切り上げの間) になるような部分グラフの辺集合をグラフの半マッチングと呼ぶことにする．

Algorithm 1 良いクリーク分割に対するアルゴリズム

for all $q_i \in Q$ **do**
  q_i に厳密アルゴリズムを適用し，厳密解を求める．
end for
for all $q_i \in Q$ **do**
  for all $q_j \in Q$ **do**
    $\hat{E} = \{(u,v) \mid (u,v) \in E(q_i,q_j), u$ と v の両方に割り当てられている色の数が奇数$\}$, $\hat{V} = \{v|(u,v) \in \hat{E}\}$ からなる 2 部グラフを $G_B = (\hat{V}, \hat{E})$ とする．
    G_B について，半マッチング E_{half} を求める．
    for all $e = (u,v) \in E(q_i,q_j)$ **do**
      u, v の両方に割り当てられている色を $\hat{C}_{u,v}$ とする．
      if $e \in E_{\text{half}}$ **then**
        $\hat{C}_{u,v}$ のうち，q_i 側に半分の切り下げ，q_j 側に切り上げをした個数を割り当てる．
      else if $e \in \hat{E} \setminus E_{\text{half}}$ **then**
        $\hat{C}_{u,v}$ のうち，q_j 側に半分の切り下げ，q_i 側に切り上げをした個数を割り当てる．
      else
        端点同士で被っている色の数は偶数なので，$\hat{C}$ を半分ずつ割り当てる．
      end if
    end for
  end for
end for
最終的な色の割り当てを出力する．

アルゴリズム 1 は，グラフの良いクリーク分割が与えられているとき，クリークごとの最適解を求めた後に，2 つのクリーク間でどちらのクリークでも使われている色を，半マッチングに従って上手く割り振るアルゴリズムである．

定理 6. 最小値最大化多重リスト彩色問題の最適値を OPT とすると，アルゴリズム 1 は多項式時間で $\lfloor \frac{\text{OPT}}{2} \rfloor$ 以上の解を出力する．

証明. アルゴリズム 1 の計算量は，$m = |E|$ として，クリークごとの最適値を求めるのに $O(n \cdot nm)$，全体の 2 部グラフを作るのに $O(n^2 m)$，半マッチングを求めるのに $O(m)$ かかる (オイラー閉路を得ることで半マッチングを構築できる) ことを考えると，$O(n \cdot nm + n^2 m + m) = O(n^2 m)$ である．以下では，アルゴリズム 1 の出力が最適値の半分の切り下げ以上であることを示す．

アルゴリズム 1 の出力である色の割り当てにおいて，各頂点に割り当てられる色の個数の最小値 ALG とする．良いクリーク分割を構成する各クリークで，厳密解を求める．その厳密解を上手く組み合わせることを考える．定義から，$\forall q_i, q_j, q_k \in Q, E(q_i,q_j)$ と $E(q_i,q_k)$ は互いに素である．クリークの組 (q_i,q_j) について考える．$u \in V(q_i)$ について，良いクリーク分割の定義から，$N^+(u)$ を頂点集合とする G の誘導部分グラフは完全グラフである．したがって，$N^+(u)$ の頂点に割り当てられた色は互いに素である．$u \in V(q_j)$ のときも同様である．このため，全てのクリークの組それぞれに対して，個別に被っている部分を上手く分配できれば良い．$\hat{E} = \{(u,v) \mid (u,v) \in E(q_i,q_j), u$ と v で被っている色の数が奇数 $\}$，$\hat{V} = \{v \mid (u,v) \in \hat{E}\}$ からなる 2 部グラフを $G_B = (\hat{V}, \hat{E})$ として，その上での半マッチングを考える．補題 5 から，任意の 2 部グラフにおいて，半マッチングは必ず存在する．それに従って分配を行うと，

$$\left\lfloor \min_{q \in Q} \frac{q\text{ における最適値}}{2} \right\rfloor \le \min_{u \in V} \left(N_u + \sum_{v \in N^+(u)} \left\lfloor \frac{\hat{C}_{u,v}}{2} \right\rfloor \right) \le \text{ALG}$$

となる．ただし，N_u は，$u \in V$ に割り当てられていて，$N^+(u)$ のどの頂点とも被っていない色の数である．

全てのクリークについて，そのクリーク内での最適値は，全体の最適値以上である．なぜなら，そのクリーク以外の頂点が増えたとしても，クリーク内の頂点に割り当てることができる色の数は増えないからである．したがって，ALG は最低でも

$$\left\lfloor \frac{\text{OPT}}{2} \right\rfloor \le \left\lfloor \min_{q \in Q} \frac{q\text{ における最適値}}{2} \right\rfloor \le \text{ALG}$$

となる． □

6.4 良いクリーク分割を構成するアルゴリズム

この節では，良いクリーク分割を構成する多項式時間アルゴリズムについて述べる．良いクリーク分割の定義から，異なるクリークのペアにおいて，クリーク間の辺は端点を共有しない．したがって，あるクリーク間の辺の両端点の隣接頂点の合併は，その辺が結ぶ 2 つのクリークの頂点となる．それを用いたアルゴリズムがアルゴリズム 2 である．

Algorithm 2 良いクリーク分割を構成するアルゴリズム.

if G が 2 つ以下のクリークで分割できる **then**
  その分割を良いクリーク分割として出力する．
end if
for $(a,b) \in E(G)$ **do**
  $stack \leftarrow \{(a,b)\}$.
  $E^* \leftarrow \emptyset$.
  while $stack \neq \emptyset$ **do**
    $(c,d) \leftarrow$ pop from $stack$.
    $K \leftarrow N(c) \cup N(d)$
    for $e \in \{(u,v) \mid (u,v) \in E(G), (u,v) \notin E^*, (u,v) \notin stack, u \in K, v \notin K\}$ **do**
      push e to $stack$.
    end for
    $E^* \leftarrow E^* \cup \{(u,v) \mid (u,v) \in E(G), u \in K, v \notin K\}$.
  end while
  if グラフ $(V(G), E(G) \setminus E^*)$ が，いくつかのクリークで構成されている **then**
    それらのクリークを良いクリーク分割として出力する．
  end if
end for
良いクリーク分割はできないと出力する．

補題 6. G を連結グラフとする．アルゴリズム 2 は多項式時間で，G の良いクリーク分割が存在すれば必ずそれを出力する．

証明. まずアルゴリズム 2 の計算量について示す．あるグラフが 2 つのクリークで分割できるかどうかを判定するには，そのグラフの補グラフが 2 部グラフかどうかを判定すれば良い．これは頂点数に関する線形時間で行うことができる．また，$stack$ に 1 度挿入された辺は E^* にも加えられることから，while ループは高々 $|E(G)|$ 回である．さらに，while ループ内の for ループは高々 $|E(G)|$ 回である．したがって，アルゴリズム 2 の計算量は $O(|V(G)|) + O(|E(G)|^3) = O(|E(G)|^3)$ である．

次に，G の良いクリーク分割が存在すれば，アルゴリズム 2 は必ずそのうちの 1 つである Q を出力することを示す．G が 2 つ以下のクリークで分割できるとき，アルゴリズム 2 は明らかに良いクリーク分割を出力する．したがって，G の任意の良いクリーク分割は 3 つ以上のクリークで構成されていると仮定する．また，一般性を失わず，$(a, b) \in E(G)$ をクリーク間の辺であるとする．このとき，良いクリーク分割が出力されることを示す．

$stack$ の初期値は $\{(a, b)\}$ であるから，取り出される辺は (a, b) である．良いクリーク分割の定義より，K は辺 (a, b) が結んでいる 2 つのクリーク $q_a, q_b \in Q$ の頂点集合の合併である．また，E^* および $stack$ に加えられる辺は，q_a もしくは q_b とそれ以外のクリークを結ぶような全ての辺である．同様に，$stack$ から取り出される辺 (c, d) がクリーク間の辺であるとき，K は辺 (c, d) が結んでいる 2 つのクリークの頂点集合の合併であり，E^* および $stack$ に加えられる辺の候補は，(c, d) が結んでいる 2 つのクリークとそれ以外のクリークを結ぶような全ての辺である．グラフが連結であり，任意の良いクリーク分割が 3 つ以上のクリークで構成されていることから，任意のクリークのペア q_i, q_j について，そのどちらか一方は q_i, q_j のどちらでもないクリークとの間に辺が存在する．したがって，任意のクリーク間の辺が $stack$ に含まれるから，E^* にも任意のクリーク間の辺が含まれる．以上から，G の良いクリーク分割が存在するならば，グラフ $H = (V(G), E(G) \setminus E^*)$ にはクリーク間の辺が存在しない．したがって，$V(H) = \bigcup_{q \in Q} V(q), E(H) = \bigcup_{q \in Q} E(q)$ となり，Q が出力される．□

したがって，次が成り立つ．

定理 7. 良いクリーク分割ができるかどうかは多項式時間で判定することができる．また，同時に良いクリーク分割を構成することができる．

6.5 良いクリーク分割の一般化

この節では，良いクリーク分割の一般化について述べる．グラフ G のクリーク分割 Q が良いクリーク分割であることの定義は，互いに素な i, j, k について次のような条件を満たすことであった．

$$\forall q_i, q_j, q_k \in Q, E(q_i, q_j) \text{ と } E(q_i, q_k) \text{ は互いに素である．}$$

これは，任意の頂点について，$N^+(v)$ の頂点を含んでいるクリークの数は高々 1 つという条件に言い換えることができる．すなわち，良いクリーク分割であるための条件は，次のように書ける．

$$\forall q_i \in Q, \forall v \in V(q_i), |\{q \in Q \mid \exists u \in N^+(v), u \in q\}| \leq 1.$$

これを一般化することを考える．グラフのクリーク分割が次の条件を満たすとき，そのクリーク分割は k-良いクリーク分割であるという．

$$\forall q_i \in Q, \forall v \in V(q_i), |\{q \in Q \mid \exists u \in N^+(v), u \in q\}| \leq k.$$

1-良いクリーク分割は良いクリーク分割である．

アルゴリズム 1 は，k-良いクリーク分割でも全く同じように動作する．その際，出力される解は，最適値を OPT としたとき，$\left\lfloor \frac{\mathrm{OPT}}{2^k} \right\rfloor$ 以上である．何故なら，ある頂点について，クリーク間での割り当てが行われるのは高々 k 回だからである．したがって，例えば 2-良いクリーク分割を求めることができれば，$\left\lfloor \frac{\mathrm{OPT}}{4} \right\rfloor$ 以上の解を多項式時間で求めることができる．

しかしながら，k-良いクリーク分割が存在するかどうかの判定は NP 完全である．以下では，NP 完全性が [6] によって知られている，グラフが 3 彩色可能かどうかの判定問題 (3 彩色問題と呼ぶ) から 2-良いクリーク分割が存在するかどうかの判定問題への多項式時間帰着が存在することを示す．

3 彩色問題の入力のグラフを G とする．また，K_n を $n = |V(G)|$ 頂点の完全グラフとする．G から次のようなグラフ $H = (V, E)$ を構成する．

$$\begin{aligned} V &= V(G) \cup \{x, y, z\}, \\ E &= (E(K_n) \setminus E(G)) \cup F, \\ F &= \{(u, v) \mid u \in \{x, y, z\}, v \in V\}. \end{aligned}$$

すなわち，グラフ H は，G の補グラフに，その補グラフの頂点全てに隣接する 3 つの頂点 x, y, z を加えたものである．x, y, z は色に対応する．

定理 8. G が 3 彩色可能であることと，H に 2-良いクリーク分割が存在するかどうかは同値である．

証明. ある頂点が x と同じクリークに属したとき，その頂点は x で塗られたことと対応する．また，x, y, z がそれぞれ隣接していないことから，H のクリーク分割には必ず 3 つ以上のクリークが含まれている．さらに，x, y, z のどれも含まれていないクリークに属する頂点 v が存在するとき，その頂点は x, y, z と隣接しているから，

$|\{q \in Q \mid \exists u \in N^+(v), u \in q\}| \geq 3$ となり，2-良いクリーク分割は存在しない．したがって，2-良いクリーク分割が存在するとき，全ての頂点は x, y, z のうちのどれかと同じクリークに属する．それらのクリークを，q_x, q_y, q_z とする．以上を踏まえて，G が 3 彩色可能であることと，H に 2-良いクリーク分割が存在するかどうかが同値であることを示す．

G が 3 彩色可能であるとき，G の頂点は互いに異なる 3 つの独立集合 X, Y, Z に分割される．このとき，G の補グラフでは，X, Y, Z 頂点からなる誘導部分グラフはそれぞれ完全グラフとなっている．さらに，X の頂点と x，Y の頂点と y，Z の頂点と z は隣接しているから，$X \cup \{x\}, Y \cup \{y\}, Z \cup \{z\}$ からなる誘導部分グラフはそれぞれ完全グラフとなる．したがって，それらをクリーク分割とすれば，それは 2-良いクリーク分割である．

逆に，G が 3 彩色不能であるとき，G の頂点を順番に 1 頂点ずつ彩色していくことを考える．そのとき，どのように彩色しても，3 色全てと隣接してしまうような，まだ塗られていない頂点が存在する．同様に，x, y, z を除いた H の頂点を，順番に 1 頂点ずつ，x, y, z のどの頂点と同じクリークに属するか選んでいくことを考える．このとき，どのような選び方をしても，q_x, q_y, q_z のそれぞれに属する 3 頂点 a, b, c と隣接していないような，まだ選ばれていない頂点 v が存在する (G で辺がある部分は，H では辺が無いことに注意する)．そのとき，v は a, b, c のどれとも隣接していないことから，q_x, q_y, q_z のどれにも属することはできない，したがって，2-良いクリーク分割は存在しない． □

7. まとめと今後の課題

本研究では平等さを伴った多重リスト彩色問題について，最小値最大化問題として定式化し，その問題について，まず困難性について明らかにした．具体的には，完全 2 部グラフ，星グラフ，および良いクリーク分割をもつグラフに絞った場合でさえも，厳密解を求めることは NP 困難であることを示した．さらに，一般グラフにおいては最適値を定数で割ったものの切り下げ以上の解を保証することも NP 困難であることを示した．次に，良いクリーク分割が与えられた場合に，多項式時間で最適値の半分の切り下げ以上の解を保証するアルゴリズムを提案した．さらに，良いクリーク分割の一般化である k-良いクリーク分割について，$k = 1$ のときのみ，そのような分割が存在するかを多項式時間で判定できることを示した．今後の課題としては，アルゴリズムの適用範囲を広げることや，その他のグラフについての計算複雑性を示すことが挙げられる．特に，周波数帯の割り当てに応用しようとした場合には，単位円グラフ等におけるアルゴリズムを考えることが重要である．

参考文献

[1] Wang, W. and Liu, X.: List-coloring Based Channel Allocation for Open-Spectrum Wireless Networks, *IEEE 62nd Vehicular Technology Conference, 2005*, pp. 690–694 (online), DOI: 10.1109/VETECF.2005.1558001 (2005).

[2] Qin, Y., Hu, H., Huang, D. and Lin, H.: Improved list coloring algorithm in cognitive radio based on time cost and demand satisfaction, *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 56, No. 11, pp. 528–533 (online), DOI: 10.3103/S0735272713110046 (2013).

[3] Vishram, M., Tong, L. C. and Syin, C.: List multi-coloring based fair channel allocation policy for self coexistence in cognitive radio networks with QoS provisioning, *IEEE Region 10 Symposium*, pp. 99–104 (online), DOI: 10.1109/TENCONSpring.2014.6863005 (2014).

[4] Harvey, N. J., Ladner, R. E., Lovász, L. and Tamir, T.: Semi-matchings for bipartite graphs and load balancing, *Journal of Algorithms*, Vol. 59, No. 1, pp. 53–78 (online), DOI: 10.1016/j.jalgor.2005.01.003 (2006).

[5] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A.: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer (1988).

[6] Karp, R. M.: Reducibility Among Combinatorial Problems, *Complexity of Computer Computations*, pp. 85–103 (online), DOI: 10.1007/978-1-4684-2001-2_9 (1972).