

1次元接続有限状態セルオートマトンによる 冪乗数列生成の実現

上川 直紀^{1,a)} 梅尾 博司^{1,b)}

受付日 2018年2月1日, 再受付日 2018年3月23日/2018年4月30日,
採録日 2018年5月17日

概要: セルオートマトン (CA) は J. von Neumann により考案された並列計算モデルの 1 つであり, 現在では複雑系などの多くの分野で研究がなされている. CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され, セルは自らと, 隣接するセルの内部状態という局所的な情報をもとに, 自らの内部状態を遷移させる機能しか持たない. この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし, CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持つ. CA 上で考察されている問題の 1 つに実時間数列生成問題が存在する. これまで, 素数列, Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ などの非正則数列の CA 上の生成アルゴリズムが明らかにされている. 本稿では, k を $k \geq 2$ となる自然数とした場合, $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ として表される冪乗数列の 1 次元接続 CA 上の生成アルゴリズムについて考察を行い, すべての k の場合の冪乗数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が生成可能であることを示す.

キーワード: セルオートマトン, 並列アルゴリズム, 実時間数列生成問題, 複雑系

Realization of Exponential Sequence Generation by One-dimensional Finite-state Cellular Automata

NAOKI KAMIKAWA^{1,a)} HIROSHI UMEO^{1,b)}

Received: February 1, 2018, Revised: March 23, 2018/April 30, 2018,
Accepted: May 17, 2018

Abstract: A model of cellular automata (CA) is considered to be a well-studied non-linear model of complex systems in which an infinite one-dimensional array of finite state machines (cells) updates itself in a synchronous manner according to a uniform local rule. A sequence generation problem on the CA model has been studied for a long time and a lot of generation algorithms has been proposed for a variety of non-regular sequences such as $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, prime, and Fibonacci sequences, etc. In this paper, we propose generation algorithms of exponential sequences by one-dimensional finite-state CA and give formal proof of the correctness of generation algorithms.

Keywords: cellular automata, computational complexity, parallel algorithm, real-time sequence generation problem

1. はじめに

セルオートマトン (Cellular Automaton, 以下では CA と略す) は生物固有の能力である自己増殖, 自己複製機能

を形式的に記述するモデルとして, von Neumann [9] により考案された並列計算モデルであり, 現在では, 複雑系などの多くの分野で研究がなされている. CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され, セルは自らと, 隣接するセルの内部状態という局所的な情報をもとに, 自らの内部状態を遷移させる機能しか持たない. この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし, CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持

¹ 大阪電気通信大学
Osaka Electro-Communication University, Neyagawa,
Osaka, 572-8530, Japan

a) naoki@osakac.ac.jp

b) umeo@osakac.ac.jp

つ. CA は生命現象の知られざる秘密を探りたいという目的で提案され, 発展し, 現在では, 複雑系などの多くの分野で研究がなされている. CA の応用例として脇田ら [10] の交通流のシミュレーションがあげられる.

CA の研究課題の 1 つとして, 実時間数列生成問題があげられる. 有沢 [1], Korec [8], Kamikawa ら [2], [4], [5] は, 1 次元 CA の左端のセルの内部状態で数列を表現する形式で, CA 上の数列生成問題について考察を行った. 有沢 [1] は CA 上の素数列, Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムを, Korec [8] は素数列の生成アルゴリズムを明らかにした. 有沢 [1] が明らかにしたアルゴリズムは, 最適となる数列生成時間に対して 2 倍の生成時間が必要となる 2 線形時間生成アルゴリズムであり, Korec [8] が明らかにしたアルゴリズムは, 生成時間について最適となる実時間生成アルゴリズムである. Kamikawa ら [4], [5] は有沢 [1] のアルゴリズムを発展させ, CA 上の Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムを設計し, その正当性について明らかにした. また, Kamikawa ら [4], 上川ら [6] は特定の数列生成アルゴリズムについて考察を行うのではなく, 1 状態および 2 状態の CA で生成可能な数列を明らかにした. これらの研究では, CA の計算能力について考察が行われており, 有限状態数の CA で生成 (計算) 可能である多くの数列が明らかにされている. 素数列, Fibonacci 数列, 冪乗数列などの数列は, 自然現象, 社会現象, 生命現象, 経済現象などに頻繁に出現することが知られており, CA 上の数列生成アルゴリズムは, これらの様々な現象のシミュレーションやモデリングに利用可能であると考ええる.

本研究では, k を $k \geq 2$ となる自然数とした場合, $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ として表される冪乗数列の 1 次元接続 CA 上での実時間生成について考察を行う. 冪乗数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は 1 階線形回帰数列であり, CA 上の線形回帰数列生成アルゴリズムについては, Kamikawa ら [3] が言及している. しかしながら, Kamikawa ら [3] が示したのは, アルゴリズム設計のアウトラインのみである. 本稿では, Kamikawa ら [3] が示したアルゴリズムをもとに, すべての k の場合の冪乗数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が有限状態の 1 次元接続 CA で生成可能であることを示す.

2. セルオートマトン上の数列生成問題

CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンの有限個のアレイで構成される. 図 1 参照.

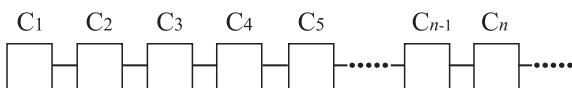


図 1 1 次元接続セルオートマトン

Fig. 1 One-dimensional cellular automaton.

$n \geq 1$ とした場合, 左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ. 有限状態オートマトンは $A = (Q, \delta, c, a)$ と定式化され, Q, δ, c, a はそれぞれ以下の意味を持つ.

- (1) Q は内部状態の有限集合である.
- (2) δ は状態遷移関数であり, 次のように定義される.

$$\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$$

この場合の状態遷移関数 $\delta(a, b, c) = d(a, b, c, d \in Q)$ は次の意味を持つ.

あるステップ t 時に, セル C_i の内部状態が b であり, セル C_{i-1} の内部状態が a , セル C_{i+1} の内部状態が c であると, 次のステップ $t+1$ 時にセル C_i の内部状態が d に遷移する.

左端のセル C_1 は左側からの入力としてつねに状態 $\$$ が入力される. $\$$ は外界を表す特殊な状態であり, セル C_1 の左側からの入力にのみ用いられる. また静止状態 $q (\in Q)$ は隣接する左右のセルの状態が q の場合, q を維持し続けるという特徴を持つ. すなわち, 遷移規則 $\delta(q, q, q) = q$, $\delta(\$, q, q) = q$ が定義される.

- (3) 状態 $c (\in Q)$ は初期計算状況時にセル C_1 がとる状態である.
- (4) 状態 $a (\in Q)$ は数列生成に使用する状態である.

次に, セル空間を記述する記法を導入する. i, j, n を正の自然数, t を正の整数とし, $1 \leq n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j, t \geq 0$ とする. 時刻 t 時のセル C_i の内部状態を S_i^t と表し, 時刻 t 時の n 個のセルからなるセル空間を以下のように表す.

$$t: S_1^t \dots S_n^t$$

また, 時刻 t 時にセル C_1 からセル C_{i-1} の $i-1$ 個のセルすべての内部状態が 0 , セル C_i からセル C_j の $j-i+1$ 個のセルすべての内部状態が S , セル C_{j+1} 以降のセルすべての内部状態が U の場合, 以下のようにまとめて記述する.

$$t: \overbrace{0 \dots 0}^{[1, i-1]} \overbrace{S \dots S}^{[i, j]} \overbrace{U \dots U}^{[j+1, \dots]}$$

次にセル空間の 1 ステップの変化を表す演算記号 “ $\Rightarrow$ ” を導入する. 以下のように, $\Rightarrow$ の左右にセル空間の状態を記述した場合, $\Rightarrow$ の左側のセル空間の状態が変化前の状態で, 右側が 1 ステップ後のセル空間の状態となる.

$$t: \overbrace{0}^{[1]} \overbrace{SS \dots}^{[2, \dots]} \Rightarrow t+1: \overbrace{00}^{[1, 2]} \overbrace{SS \dots}^{[3, \dots]}$$

また, 遷移規則の簡略記法も導入する. 遷移規則 $\delta(w, x, y) = z$ の場合, 省略して $w \times x \times y \rightarrow z$ と記述する.

初期計算状況, すなわち, 時刻 $t = 0$ 時のセル空間は以下に示すとおり, セル C_1 の内部状態は c をとり, C_1 以外

のセルの内部状態は静止状態 q をとる。

$$t = 0 : \underbrace{\quad}_{[1]} \underbrace{\quad}_{[2, \dots]}$$

r, n を自然数とし, $r \geq 1, n \geq 1$ とする. $\{t(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を無限に単調増加する正整数の数列とすると, すべての n について, $S_1^{r \cdot t(n)} = a$, すなわち, $t = r \cdot t(n)$ 時のみにセル C_1 の内部状態が a をとると, r 線形時間で, 数列 $\{t(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成するという. 特に, $r = 1$ のときは数列生成時間について最適となり, 実時間で数列 $\{t(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成するという.

3. 冪乗数列生成の実現

本項では 1 次元接続セルオートマトンを用いた冪乗数列の生成について述べる. k, n を自然数とし, $k \geq 2, n \geq 1$ とする. 生成する冪乗数列を a_n とすると, $a_n = k^n$ となる. また数列 a_n は以下の漸化式として表すことができる.

$$a_1 = k, a_{n+1} = k \cdot a_n$$

数列 a_n は 1 階線形回帰数列であるので, Kamikawa ら [3] が示した 1 階線形回帰数列の生成アルゴリズムを発展させて, 数列 a_n の実時間生成を実現する.

M_k を有限状態 CA とし, $M_k = (Q_k, \delta_k, c, a)$ とする. M_k が数列 $a_n = k^n$ を生成するとき, 有限状態集合 Q_k は以下のとおり定める.

$$Q_k = \{q, a, b, c, \underbrace{d_1, d_2, \dots, d_{k-1}}_{k-1}, \underbrace{e_1, e_2, \dots, e_{k-2}}_{k-2}\}$$

$$|Q_k| = 2k + 1$$

3.1 冪乗数列生成アルゴリズム

ℓ を自然数とし, $\ell \geq 1$ とする. 冪乗数列生成の実現について, $k = 2, k = 2\ell + 2, k = 2\ell + 1$ の場合に分けて考える.

$k = 2$ の場合: 最初に $k = 2$ の場合を考える. この場合, 生成する数列は $a_n = 2^n$ となり, a_n は以下の漸化式で表すことができる.

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

$k = 2$ の場合, 有限状態集合 Q_2 は $Q_2 = \{q, a, b, c, d_1\}$ となる. 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は図 2 に示す状態遷移規則集合により生成される.

表の最初の行 (列) はそれぞれ, 右 (左) 側に隣接するセルの状態を示し, 表内のそれぞれのエントリは 1 ステップ後のセルの内部状態を示す. エントリのない入力については遷移規則は定義されておらず, 使用されることはない. 図 2 に示す状態遷移規則集合により, M_2 の各セルは図 3 に示すように遷移する.

図 3 の横軸はセル空間であり, 左端から $C_1, C_2, C_3, \dots$,

q	Right State	q	a	b	c	d ₁
q	q	q	q	q	q	q
a	q	q	q	q	q	q
b	q	q	q	q	q	q
c	q	q	q	q	q	q
d ₁	q	q	q	q	q	q
Left State	q	q	q	q	q	q

a	Right State	q	a	b	c	d ₁
q	q	q	q	q	q	q
a	q	q	q	q	q	q
b	q	q	q	q	q	q
c	q	q	q	q	q	q
d ₁	q	q	q	q	q	q
Left State	q	q	q	q	q	q

b	Right State	q	a	b	c	d ₁
q	q	q	q	q	q	q
a	q	q	q	q	q	q
b	q	q	q	q	q	q
c	q	q	q	q	q	q
d ₁	q	q	q	q	q	q
Left State	q	q	q	q	q	q

c	Right State	q	a	b	c	d ₁
q	q	q	q	q	q	q
a	q	q	q	q	q	q
b	q	q	q	q	q	q
c	q	q	q	q	q	q
d ₁	q	q	q	q	q	q
Left State	q	q	q	q	q	q

d ₁	Right State	q	a	b	c	d ₁
q	q	q	q	q	q	q
a	q	q	q	q	q	q
b	q	q	q	q	q	q
c	q	q	q	q	q	q
d ₁	q	q	q	q	q	q
Left State	q	q	q	q	q	q

図 2 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合
Fig. 2 A transition function for real-time generation of sequence $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
1	a	q	q	q	q	q	q	q	q	q
2	b	q	q	q	q	q	q	q	q	q
3	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q
4	d ₁	q	q	q	q	q	q	q	q	q
5	q	a	q	q	q	q	q	q	q	q
6	q	b	q	q	q	q	q	q	q	q
7	q	c	q	q	q	q	q	q	q	q
8	q	d ₁	q	q	q	q	q	q	q	q
9	q	q	a	q	q	q	q	q	q	q
10	q	q	b	q	q	q	q	q	q	q
11	q	q	c	q	q	q	q	q	q	q
12	q	q	d ₁	q	q	q	q	q	q	q
13	q	q	q	a	q	q	q	q	q	q
14	q	q	q	b	q	q	q	q	q	q
15	q	q	q	c	q	q	q	q	q	q
16	q	q	q	d ₁	q	q	q	q	q	q
17	q	q	q	q	a	q	q	q	q	q
18	q	q	q	q	b	q	q	q	q	q
19	q	q	q	q	c	q	q	q	q	q
20	q	q	q	q	d ₁	q	q	q	q	q
21	q	q	q	q	q	a	q	q	q	q
22	q	q	q	q	q	b	q	q	q	q
23	q	q	q	q	q	c	q	q	q	q
24	q	q	q	q	q	d ₁	q	q	q	q

図 3 時刻 $t = 24$ までのシミュレーション状況
Fig. 3 Configurations of real-time generation of sequence $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ in the space-time domain such that $0 \leq t \leq 24$.

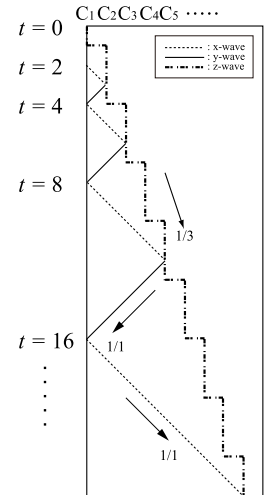


図 4 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図
Fig. 4 Space-time diagram for real-time generation of sequence $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$.

それぞれの内部状態を表す. 縦軸は時間軸で, 上端を時刻 $t = 0$ として, 下方向に向かって時間の経過を表す. 図 3 より, 内部状態がセル空間を伝播していることが見てとれる. このセル空間上の状態の伝播を波と呼ぶ. CA のアルゴリズムは, 状態の伝播を波として表現し, 時間-空間図を用いて幾何学的に設計を行う. 図 4 に数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムの時間-空間図を示す.

時間-空間図の横軸はセル空間, 縦軸は時刻を表し, 時間-空間図は時間の経過におけるセル空間の変化を表す. 時間-空間図に示す線はセル空間上の波を示す. 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成には 3 種類の波, x 波, y 波, z 波を用いる. 図 4 参照.

時刻 $t = 0$ 時に, セル C_1 上で z 波が生成され, 3 ステップにつき 1 ステップだけ右方向に進む. すなわち, z 波の速さは $1/3$ となる. 時刻 $t = 2$ 時に, セル C_1 の内部状態

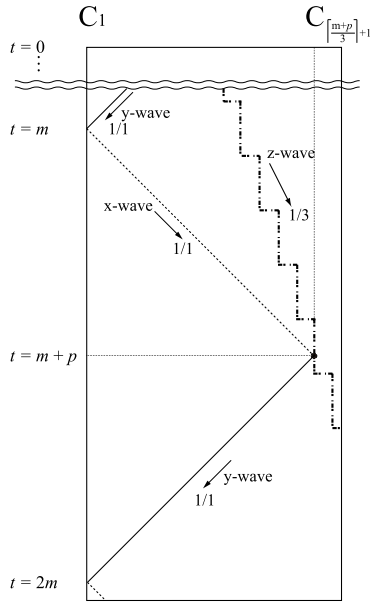

 図 5 z 波と x 波の衝突 (m が偶数の場合)

 Fig. 5 A Collision of the z-wave with the x-wave (m is even).

が a に遷移し、セル C_1 上で x 波が生成され、 $1/1$ の速さで右方向に進む。x 波がセル空間上を右方向に進み、z 波と衝突する。このとき、z 波は右方向に進み続け、x 波は消滅し、衝突したセル上で y 波が生成され、 $1/1$ の速さで左方向に進む。時刻 $t = 4$ 時、y 波がセル C_1 に到達すると、y 波が消滅し、x 波が生成され、セル C_1 の内部状態が a に遷移する。このように、x 波、y 波をセル C_1 と z 波間を往復運動させ、y 波がセル C_1 に到達した時刻にセル C_1 の内部状態が a に遷移する。セル C_1 の内部状態が a となる時刻は、 $t = 2, 4, 8, \dots, 2^n$ 時となる。

m を任意の自然数とし、 $m \geq 2$ とする。時刻 $t = 0$ 時に、セル C_1 上で z 波が生成され、時刻 $t = m$ 時にセル C_1 の内部状態が a をとり、セル C_1 上で x 波が生成されたとしたとき、z 波と x 波の衝突により生成された y 波がセル C_1 に到達する時刻を考える。ここでは、 $k = 2$ であるので、 m が偶数の場合を考える。 N を自然数の集合とし、 $P_z(t) : N \cup \{0\} \rightarrow N$ を時刻 t 時に z 波の存在するセルの位置を表す関数とすると、 $P_z(t) = \lceil \frac{t}{3} \rceil + 1, t \geq 0$ となる。 p を $p \geq 1$ となる自然数とし、時刻 $t = m + p$ 時に z 波と x 波はセル $C_{P_z(m+p)}$ 上で衝突したとする。図 5 参照。

x 波は 1 ステップにつき 1 セルだけ伝播する波、すなわち、速さ $1/1$ の波であるので、時刻 $t = m + p$ 時にセル C_{p+1} に存在する。よって、 $P_z(m + p) = p + 1$ となり、 $p = \frac{m}{2}$ となる。以上より、 m が偶数の場合、z 波と x 波は時刻 $t = m + \frac{m}{2}$ 時にセル $C_{\frac{m}{2}+1}$ で衝突する。また、y 波の速さも $1/1$ であるので、時刻 $t = m + \frac{m}{2}$ から $\frac{m}{2}$ ステップ後、すなわち、時刻 $t = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = 2m$ 時に y 波はセル C_1 に到達し、セル C_1 の内部状態は a に遷移する。このように、セル C_1 -z 波間の x 波、y 波の往復運動により、

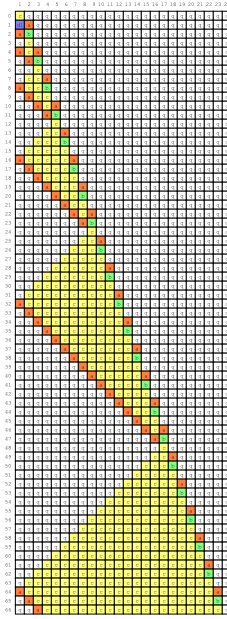

 図 6 $k = 2$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

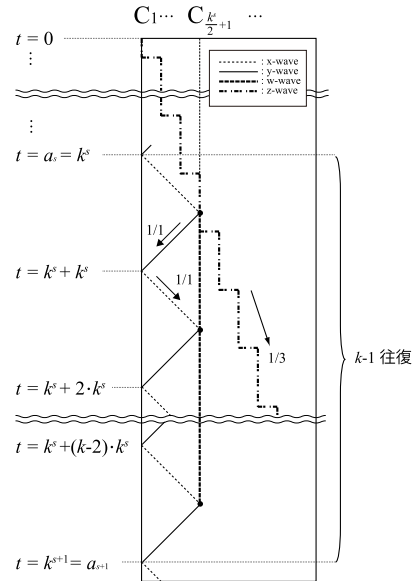
 Fig. 6 Configurations of real-time generation of sequence $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ in the space-time domain such that $k = 2, 0 \leq t \leq 66$.

 図 7 $k = 2\ell + 2$ の場合の数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図

 Fig. 7 Space-time diagram for real-time generation of sequence $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ such that $k = 2\ell + 2$.

$t = 2, 4, 8, \dots, 2^n$ 時にセル C_1 の内部状態が a となり、数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が実時間で生成される。図 6 に $k = 2$ の場合 (数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$) のシミュレーション結果を示す。

$k = 2\ell + 2$ の場合: 次に、 $k = 2\ell + 2$ の場合を考える。この場合、有限状態集合 Q_k は $Q_k = \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{k-1}}^{k-1}, \overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{k-2}}^{k-2}\}$ となる。図 7 に $k = 2\ell + 2$ の場合の時間-空間図を示す。

$k = 2\ell + 2$ の場合は, x 波, y 波, z 波に加え, その場にとどまり続ける速さ 0 の波である w 波を使用する. x 波, y 波, z 波の伝播については, $k = 2$ の場合と同一であるが, 異なるのは, z 波と x 波が衝突した際に, 衝突したセル上に w 波を生成し, セル C_1 – w 波間に $k-1$ 回の往復運動を行う x 波, y 波を生成する点である. s を任意の自然数とし, $s \geq 1$ とする. 時刻 $t = 0$ 時にセル C_1 上で z 波が生成され, 時刻 $t = k^s$ 時にセル C_1 の内部状態が a をとり, x 波が生成されたとすると, w 波はセル $C_{\frac{k^s}{2}+1}$ 上に生成される. セル C_1 –セル $C_{\frac{k^s}{2}+1}$ 間を速さ $1/1$ の波が 1 往復するには k^s ステップ必要である. 以上より, $t = k^s$ 時にセル C_1 で生成された x 波により始まる $k-1$ 回の往復

運動により, $t = k^s + \overbrace{k^s + k^s + \dots + k^s}^{k-1} = k \cdot k^s = k^{s+1}$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移する. また, w 波は $k-1$ 回目の往復運動の際に消滅する. $k = 2\ell + 2$ の場合の内部状態集合は, $k = 2$ の場合の内部状態集合に対し $k-2$

て, 内部状態 $\overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{k-2}}^{k-2}$ が追加となっている. これらの状態は, $k-1$ 回の往復運動を実現するために用いられる. 1 回目の往復運動には状態 a, e_1 が, 2 回目の往復運動には状態 b, e_2 が, ..., $k-2$ 回目の往復運動には状態 b, e_{k-2} が, $k-1$ 回目の往復運動には状態 b, c がそれぞれ用いられる. また, 状態 $\overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{k-1}}^{k-1}$ については, a_1 の生成の実現, すなわち, セル C_1 を最初に状態 a に遷移させるために用いる. 時刻 $t = 0$ にセル C_1 の内部状態は c をとり, 1 ステップごとに $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ に遷移し, 時刻 $t = k$ 時にセル C_1 は状態 a に遷移する. 以上より, $k = 2\ell + 2$ の場合も数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が実時間で生成される. 例として, 図 8 に $k = 4$ の場合 (数列 $\{4^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$) の, 図 9 に $k = 6$ の場合 (数列 $\{6^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$) のシミュレーション結果を示す.

$k = 2\ell + 1$ の場合: 次に, $k = 2\ell + 1$ の場合を考える. この場合, 有限状態集合 Q_k は $Q_k = \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{k-1}}^{k-1}, \overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{k-2}}^{k-2}\}$ となる. 図 10 に $k = 2\ell + 1$ の場合の時間–空間図を示す.

この場合も, $k = 2\ell + 2$ の場合と同様に, z 波と x 波が衝突したセルに w 波を生成し, セル C_1 – w 波間の x 波, y 波の往復運動を $k-1$ 回行うことで, 数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成を実現する. しかしながら, $k = 2\ell + 2$ の場合と比較して, w 波を生成するセルの位置が異なり, y 波がセル C_1 に到達して x 波を生成するまで 1 ステップの遅延が発生する.

$k = 2$ の場合と同様に, 時刻 $t = m + p$ 時に z 波と x 波はセル $C_{P_z(m+p)}$ 上で衝突したとする. 図 11 参照. $k = 2\ell + 1$ の場合, m は奇数となるので, $P_z(m+p) = \lceil \frac{m+p}{3} \rceil + 1 = p+1$ より, $p = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m-1}{2}$ となる. 以上より, m が奇数の場

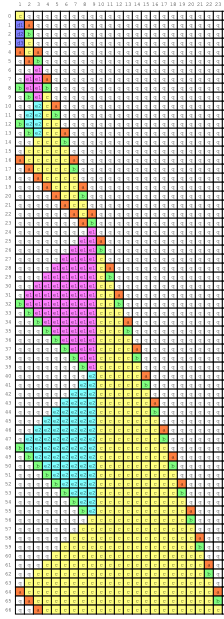


図 8 $k = 4$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

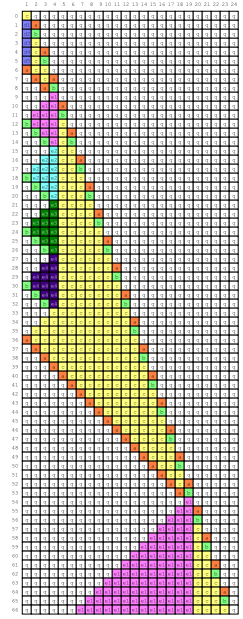


図 9 $k = 6$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

Fig. 8 Configurations of real-time generation of sequence $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ in the space-time domain such that $k = 4, 0 \leq t \leq 66$.

Fig. 9 Configurations of real-time generation of sequence $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ in the space-time domain such that $k = 6, 0 \leq t \leq 66$.

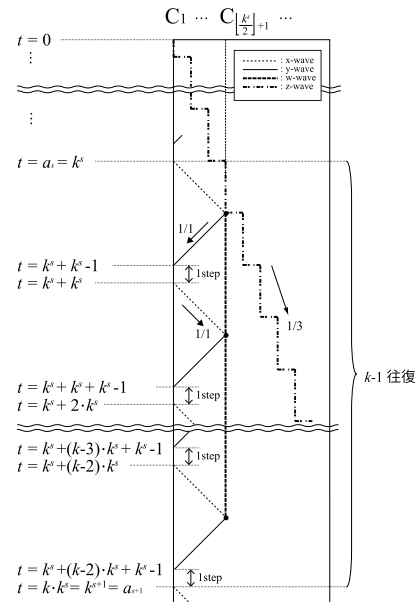


図 10 $k = 2\ell + 1$ の場合の数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間–空間図

Fig. 10 Space-time diagram for real-time generation of sequence $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ such that $k = 2\ell + 1$.

合, z 波と x 波は時刻 $t = m + \frac{m-1}{2}$ 時にセル $C_{\frac{m-1}{2}+1}$ で衝突し, セル $C_{\frac{m-1}{2}+1}$ で生成された速さ $1/1$ の y 波は時刻 $t = m + \frac{m-1}{2} + \frac{m-1}{2} = 2m - 1$ 時にセル C_1 に到達する.

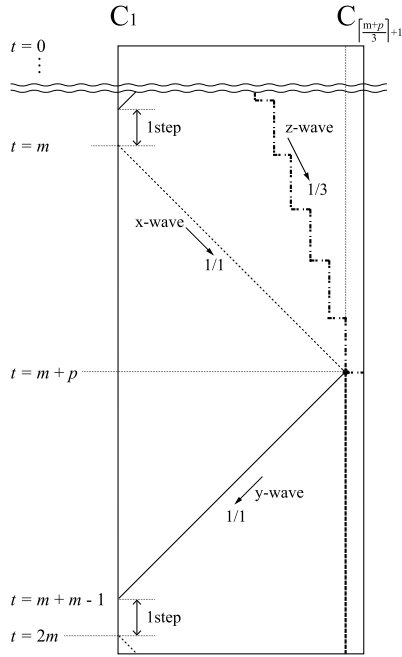

 図 11 z 波と x 波の衝突 (m が奇数の場合)

 Fig. 11 A Collision of the z-wave with the x-wave (m is odd).

到達した 1 ステップ後である時刻 $t = 2m$ 時に x 波を生成する．この波の往復を $k-1$ 回繰り返すことで， $k = 2l+1$ の場合も数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成することが可能である．例として，図 12 に $k = 3$ の場合（数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ ）の，図 13 に $k = 5$ の場合（数列 $\{5^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ ）のシミュレーション結果を示す．

3.2 冪乗数列生成アルゴリズムの正当性の証明

次に，冪乗数列生成アルゴリズムの正当性について形式的に証明を行う． $t = 0$ 時， M_k は以下に示す初期計算状況をとる．

$$t = 0 : \underbrace{[1]}_c \underbrace{[2, \dots]}_{q \dots}$$

図 14 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_z$ により，3 ステップにつき 1 セル，右方向に状態 a, b, c が伝播する．この伝播を z 波と呼ぶ．

時刻 t 時に z 波はセル $C_{P_z(t)}$ 上に存在する．そのときのセル $C_{P_z(t)}$ の内部状態 $S_{P_z(t)}^t$ は以下のとおりとなる．

$$S_{P_z(t)}^t = \begin{cases} a & t \bmod 3 = 1 \\ b & t \bmod 3 = 2 \\ c & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

よって， $S_z(t) : N \cup \{0\} \rightarrow \{a, b, c\}$ を時刻 t 時の z 波が存在するセルの内部状態を表す関数とすると， $S_z(t)$ は以下のとおりとなる．

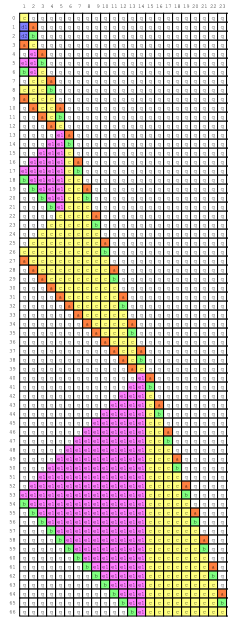

 図 12 $k = 3$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

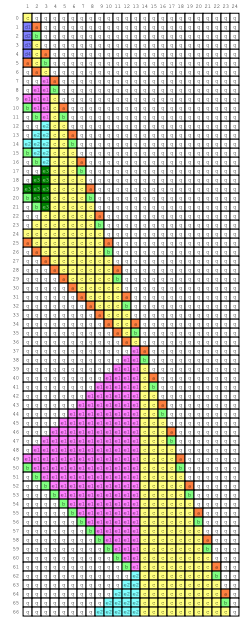
 Fig. 12 Configurations of real-time generation of sequence $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ in the space-time domain such that $k = 3, 0 \leq t \leq 66$.

 図 13 $k = 5$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

 Fig. 13 Configurations of real-time generation of sequence $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ in the space-time domain such that $k = 5, 0 \leq t \leq 66$.

c	q	q	→ a;	q	a	q	→ b;	q	b	q	→ c;	q	c	q	→ c;
c	a	q	→ b;	c	b	q	→ c;	c	c	q	→ c;	c	c	c	→ c;

 図 14 z 波の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_z$

 Fig. 14 A transition rule set $\mathcal{R}_z$.

$$S_z(t) = \begin{cases} a & t \bmod 3 = 1 \\ b & t \bmod 3 = 2 \\ c & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

補題 3.1 i を任意の自然数とし， $i \geq 1$ とした場合，時刻 $t = k^i$ 時に M_k は以下に示す状態をとる．

$$t = k^i : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, P_z(k^i)-1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(k^i)]}_{S_z(k^i)} \underbrace{[P_z(k^i)+1, \dots]}_{q \dots}$$

証明

(I) 最初に， $i = 1$ の場合を考える．時刻 $t = 0 \sim k$ の M_k の遷移は内部状態のみで実現する．使用する遷移規則は k により定まり，遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-k}$ として与えられる．図 15 に $k = 2$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-2}$ を，図 16 に $k = 3$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-3}$ を，図 17 に $k = 4$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-4}$ を，図 18 に $k = 5$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-5}$ を，図 19 に $k = 6$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-6}$ を，図 20 に $k = 7$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-7}$ を示

$q \ q \ q \rightarrow q;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$c \ q \ q \rightarrow a;$	$d_1 \ a \ q \rightarrow b;$
$\$ \ c \ q \rightarrow d_1;$	$\$ \ d_1 \ a \rightarrow a;$		

図 15 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_2}$

Fig. 15 A transition rule set $\mathcal{R}_{B_2}$.

$q \ q \ q \rightarrow q;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$b \ q \ q \rightarrow q;$
$c \ q \ q \rightarrow a;$	$d_1 \ a \ q \rightarrow b;$	$d_2 \ b \ q \rightarrow c;$
$\$ \ c \ q \rightarrow d_1;$	$\$ \ d_1 \ a \rightarrow d_2;$	$\$ \ d_2 \ b \rightarrow a;$

図 16 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_3}$

Fig. 16 A transition rule set $\mathcal{R}_{B_3}$.

$q \ q \ q \rightarrow q;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$b \ q \ q \rightarrow q;$
$c \ q \ q \rightarrow a;$	$d_1 \ a \ q \rightarrow b;$	$d_2 \ b \ q \rightarrow c;$
$d_3 \ c \ q \rightarrow c;$	$\$ \ c \ q \rightarrow d_1;$	$\$ \ d_1 \ a \rightarrow d_2;$
$\$ \ d_2 \ b \rightarrow d_3;$	$\$ \ d_3 \ c \rightarrow a;$	

図 17 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_4}$

Fig. 17 A transition rule set $\mathcal{R}_{B_4}$.

$q \ q \ q \rightarrow q;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$b \ q \ q \rightarrow q;$
$c \ q \ q \rightarrow a;$	$c \ a \ q \rightarrow b;$	$d_1 \ a \ q \rightarrow b;$
$d_2 \ b \ q \rightarrow c;$	$d_3 \ c \ q \rightarrow c;$	$d_4 \ c \ a \rightarrow c;$
$\$ \ c \ q \rightarrow d_1;$	$\$ \ d_1 \ a \rightarrow d_2;$	$\$ \ d_2 \ b \rightarrow d_3;$
$\$ \ d_3 \ c \rightarrow d_4;$	$\$ \ d_4 \ c \rightarrow a;$	

図 18 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_5}$

Fig. 18 A transition rule set $\mathcal{R}_{B_5}$.

$q \ q \ q \rightarrow q;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$b \ q \ q \rightarrow q;$
$c \ q \ q \rightarrow a;$	$c \ a \ q \rightarrow b;$	$d_1 \ a \ q \rightarrow b;$
$c \ b \ q \rightarrow c;$	$d_2 \ b \ q \rightarrow c;$	$d_3 \ c \ q \rightarrow c;$
$d_4 \ c \ a \rightarrow c;$	$d_5 \ c \ b \rightarrow c;$	$\$ \ c \ q \rightarrow d_1;$
$\$ \ d_1 \ a \rightarrow d_2;$	$\$ \ d_2 \ b \rightarrow d_3;$	$\$ \ d_3 \ c \rightarrow d_4;$
$\$ \ d_4 \ c \rightarrow d_5;$	$\$ \ d_5 \ c \rightarrow a;$	

図 19 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_6}$

Fig. 19 A transition rule set $\mathcal{R}_{B_6}$.

$q \ q \ q \rightarrow q;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$b \ q \ q \rightarrow q;$
$c \ q \ q \rightarrow a;$	$c \ a \ q \rightarrow b;$	$d_1 \ a \ q \rightarrow b;$
$c \ b \ q \rightarrow c;$	$d_2 \ b \ q \rightarrow c;$	$c \ c \ q \rightarrow c;$
$d_3 \ c \ q \rightarrow c;$	$d_4 \ c \ a \rightarrow c;$	$d_6 \ c \ c \rightarrow c;$
$d_5 \ c \ b \rightarrow c;$	$\$ \ c \ q \rightarrow d_1;$	$\$ \ d_1 \ a \rightarrow d_2;$
$\$ \ d_2 \ b \rightarrow d_3;$	$\$ \ d_3 \ c \rightarrow d_4;$	$\$ \ d_4 \ c \rightarrow d_5;$
$\$ \ d_5 \ c \rightarrow d_6;$	$\$ \ d_6 \ c \rightarrow a;$	

図 20 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_7}$

Fig. 20 A transition rule set $\mathcal{R}_{B_7}$.

$q \ q \ q \rightarrow q;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$b \ q \ q \rightarrow q;$
$c \ q \ q \rightarrow a;$	$c \ a \ q \rightarrow b;$	$c \ b \ q \rightarrow c;$
$c \ c \ q \rightarrow c;$		
$d_1 \ a \ q \rightarrow b;$	$\$ \ c \ q \rightarrow d_1;$	
$d_2 \ b \ q \rightarrow c;$	$\$ \ d_1 \ a \rightarrow d_2;$	
$d_3 \ c \ q \rightarrow c;$	$\$ \ d_2 \ b \rightarrow d_3;$	
$\vdots$	$\$ \ d_3 \ c \rightarrow d_4;$	
$d_{v-2} \ c \ q \rightarrow c;$	$\$ \ d_4 \ c \rightarrow d_5;$	
$d_{v-1} \ c \ c \rightarrow c;$	$\vdots$	
	$\$ \ d_{v-2} \ c \rightarrow d_{v-1};$	
	$\$ \ d_{v-1} \ c \rightarrow a$	

図 21 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_v}$ ($v \geq 8$)

Fig. 21 A transition rule set $\mathcal{R}_{B_v}$ such that $v \geq 8$.

す. $k \geq 8$ の場合の遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_k}$ については, v を $v \geq 8$ となる自然数とすると, 図 21 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B_v}$ ($v \geq 8$) として与えられる. 図 22 に $k=2 \sim 7$ それぞれ場合の M_k の遷移を示す.

時刻 $t = 0$ にセル C_1 の内部状態は c をとり, 1 ステップごとに $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ に遷移し, 時刻 $t = k$ 時にセ

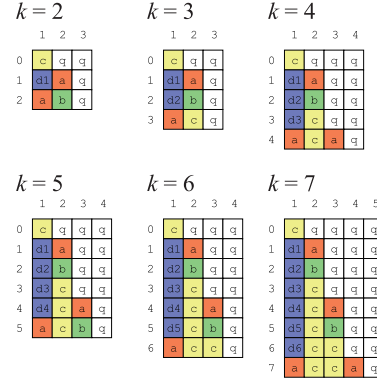


図 22 時刻 $t = k$ までの M_k の遷移

Fig. 22 Configurations of M_k in the space-time domain such that $t \leq 7$.

$q \ c \ q \rightarrow c;$	$\$ \ a \ b \rightarrow q;$	$\$ \ a \ c \rightarrow q;$	$q \ c \ c \rightarrow c;$
$\$ \ q \ q \rightarrow q;$	$\$ \ q \ a \rightarrow q;$	$\$ \ q \ c \rightarrow a;$	$q \ a \ b \rightarrow q;$
$q \ a \ c \rightarrow q;$	$q \ q \ q \rightarrow q;$	$q \ q \ a \rightarrow q;$	$q \ q \ c \rightarrow c;$
$a \ c \ a \rightarrow a;$	$a \ c \ c \rightarrow a;$	$a \ b \ q \rightarrow c;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$
$b \ q \ q \rightarrow q;$	$c \ c \ q \rightarrow c;$	$c \ c \ a \rightarrow c;$	$c \ c \ b \rightarrow c;$
$c \ c \ c \rightarrow c;$	$c \ b \ q \rightarrow c;$	$c \ a \ q \rightarrow b;$	$c \ q \ q \rightarrow a;$

図 23 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-E2}$

Fig. 23 A transition rule set $\mathcal{R}_{I-E2}$.

ル C_1 は状態 a に遷移する. セル C_2 より右側のセルでは, z 波が生成され, セル C_1 の状態にかかわらず, z 波は右方向に進み続ける. また, z 波が通過したセルの内部状態は c となり, x 波が通過するまで内部状態 c を維持し続ける. (II) j を任意の自然数とし, $j \geq 1$ とする. $i = j$ の場合, 時刻 $t = k^j$ 時に, M_k が以下に示す状態をとると仮定する.

$$t = k^j : \underbrace{[1] \ a}_{[1]} \underbrace{[2, P_z(k^j)-1] \ c \dots c}_{[2, P_z(k^j)-1]} \underbrace{[P_z(k^j)] \ S_z(k^j)}_{[P_z(k^j)]} \underbrace{[P_z(k^j)+1, \dots] \ q \dots}_{[P_z(k^j)+1, \dots]}$$

ここでも, $k = 2, k = 2\ell + 2, k = 2\ell + 1$ の場合に分けて考える.

$k = 2$ の場合:

この場合, 図 23 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-E2}$ により, M_k は以下のとおり遷移する.

$$\begin{aligned} t = 2^j & : \underbrace{[1] \ a}_{[1]} \underbrace{[2, P_z(2^j)-1] \ c \dots c}_{[2, P_z(2^j)-1]} \underbrace{[P_z(2^j)] \ S_z(2^j)}_{[P_z(2^j)]} \underbrace{[P_z(2^j)+1, \dots] \ q \dots}_{[P_z(2^j)+1, \dots]} \\ t = 2^j + 1 & : \underbrace{[1] \ q}_{[1]} \underbrace{[2] \ a}_{[2]} \underbrace{[3, P_z(2^j+1)-1] \ c \dots c}_{[3, P_z(2^j+1)-1]} \underbrace{[P_z(2^j+1)] \ S_z(2^j+1)}_{[P_z(2^j+1)]} \underbrace{[P_z(2^j+1)+1, \dots] \ q \dots}_{[P_z(2^j+1)+1, \dots]} \\ t = 2^j + 2 & : \underbrace{[1, 2] \ qq}_{[1, 2]} \underbrace{[3] \ a}_{[3]} \underbrace{[4, P_z(2^j+2)-1] \ c \dots c}_{[4, P_z(2^j+2)-1]} \underbrace{[P_z(2^j+2)] \ S_z(2^j+2)}_{[P_z(2^j+2)]} \underbrace{[P_z(2^j+2)+1, \dots] \ q \dots}_{[P_z(2^j+2)+1, \dots]} \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 右方向に伝播している状態 a を x 波と呼ぶ. x 波が通過したセルは, y 波が到達するまで状態 q を維持し続ける. x 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で進み, 時刻 $t = 2^j + 2^{j-1}$ 時にセル $C_{2^{j-1}+1}$ で z 波に追いつき衝突する. 衝突後, M_k は以下のとおり遷移する.

$$\begin{aligned} t = 2^j + 2^{j-1} & : \underbrace{[1, 2^{j-1}] \ q, \dots, q}_{[1, 2^{j-1}] \ q, \dots, q} \underbrace{[2^{j-1}+1] \ c}_{[2^{j-1}+1] \ c} \underbrace{[2^{j-1}+2, \dots] \ q \dots}_{[2^{j-1}+2, \dots] \ q \dots} \\ t = 2^j + 2^{j-1} & : \underbrace{[1, 2^{j-1}-1] \ q, \dots, q}_{[1, 2^{j-1}-1] \ q, \dots, q} \underbrace{[2^{j-1}, 2^{j-1}+1] \ cc}_{[2^{j-1}, 2^{j-1}+1] \ cc} \underbrace{[P_z(2^j+2^{j-1}+1)] \ S_z(2^j+2^{j-1}+1)}_{[P_z(2^j+2^{j-1}+1)] \ S_z(2^j+2^{j-1}+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 P_z(2^j+2^{j-1}+1)+1, \dots \\
 \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{q \dots} \\
 [1, 2^{j-1}-2] [2^{j-1}-1, 2^{j-1}+1] [P_z(2^j+2^{j-1}+2)] \\
 t = 2^j + 2^{j-1} + 2 : \quad \underbrace{q, \dots, q}_{c, \dots, c} \quad \underbrace{c, \dots, c}_{S_z(2^j+2^{j-1}+2)} \\
 P_z(2^j+2^{j-1}+2)+1, \dots \\
 \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{q \dots}
 \end{array}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 c を y 波と呼ぶ. x 波が通過したセルは, 状態 c を維持し続ける. y 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で進み, 時刻 $t = 2^j + 2^{j-1} + 2^{j-1} = 2^{j+1}$ 時にセル C_1 に到達し, M_k は以下の状態をとる.

$$t = 2^{j+1}: \quad \underbrace{[1]}_a \quad \underbrace{[2, P_z(k^{j+1})-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_z(2^{j+1})]}_{S_z(2^{j+1})} \quad \underbrace{[P_z(2^{j+1})+1, \dots]}_{q \dots}$$

このように, $k = 2$ の場合は, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-2}$, $\mathcal{R}_{I-E2}$ を用いて生成を行う.

$k = 2\ell + 2$ の場合:

この場合, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-k}$ に加え, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-1}$, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-2}$, ..., 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-k-1}$ を使用する. 図 24 に x 波, y 波の 1 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-1}$ を, 図 25 に u を $2 \leq u \leq k-2$ となる自然数とすると, x 波, y 波の $2 \sim u$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-u}$ ($2 \leq u \leq k-2$) を, 図 26 に x 波, y 波の $k-1$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-k-1}$ を示す.

1 往復目は遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-1}$ が使用され, M_k は以下のとおり遷移する.

$$\begin{array}{lcl}
 t = k^j : & \underbrace{[1]}_a & \underbrace{[2, P_z(k^j)-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_z(k^j)]}_{S_z(k^j)} \quad \underbrace{[P_z(k^j)+1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = k^j + 1 : & \underbrace{[1]}_q & \underbrace{[2]}_a \quad \underbrace{[3, P_z(k^j+1)-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_z(k^j+1)]}_{S_z(k^j+1)} \quad \underbrace{[P_z(k^j+1)+1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = k^j + 2 : & \underbrace{[1, 2]}_{qq} & \underbrace{[3]}_a \quad \underbrace{[4, P_z(k^j+2)-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_z(k^j+2)]}_{S_z(k^j+2)} \quad \underbrace{[P_z(k^j+2)+1, \dots]}_{q \dots}
 \end{array}$$

x 波がセル空間を右方向に進み, z 波と衝突する. 衝突後, M_k は以下のとおり遷移する.

$$\begin{array}{lcl}
 t = k^j + \frac{k^j}{2} : & \underbrace{[1, \frac{k^j}{2}]}_{q, \dots, q} & \underbrace{[\frac{k^j}{2}+1]}_{e_1} \quad \underbrace{[\frac{k^j}{2}+2, \dots]}_{q \dots} \\
 t = k^j + \frac{k^j}{2} + 1 : & \underbrace{[1, \frac{k^j}{2}-1]}_{q, \dots, q} & \underbrace{[\frac{k^j}{2}, \frac{k^j}{2}+1]}_{e_1 e_1} \quad \underbrace{[P_z(k^j + \frac{k^j}{2} + 1)]}_{S_z(k^j + \frac{k^j}{2} + 1)} \\
 & & \underbrace{P_z(k^j + \frac{k^j}{2} + 1) + 1, \dots}_{q \dots} \\
 t = k^j + \frac{k^j}{2} + 2 : & \underbrace{[1, \frac{k^j}{2}-2]}_{q, \dots, q} & \underbrace{[\frac{k^j}{2}-1, \frac{k^j}{2}+1]}_{e_1, \dots, e_1} \quad \underbrace{[P_z(k^j + \frac{k^j}{2} + 2)]}_{S_z(k^j + \frac{k^j}{2} + 2)} \\
 & & \underbrace{P_z(k^j + \frac{k^j}{2} + 2) + 1, \dots}_{q \dots}
 \end{array}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 e_1 が y 波となる. また, 内部状態 e_1 を維持するセル $C_{\frac{k^j}{2}+1}$

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q a \rightarrow q;$	$\$ q e_1 \rightarrow b;$
$q q q \rightarrow q;$	$q q a \rightarrow q;$	$q q e_1 \rightarrow e_1;$
$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$
$e_1 q q \rightarrow a;$	$\$ a c \rightarrow q;$	$q a b \rightarrow q;$
$q a c \rightarrow q;$	$c a q \rightarrow b;$	$e_1 a q \rightarrow b;$
$a b q \rightarrow e_1;$	$c b q \rightarrow c;$	$e_1 b q \rightarrow c;$
$a c a \rightarrow a;$	$a c c \rightarrow a;$	$c c q \rightarrow c;$
$c c a \rightarrow c;$	$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$
$e_1 c q \rightarrow c;$	$e_1 c a \rightarrow c;$	$e_1 c b \rightarrow c;$
$e_1 c c \rightarrow c;$	$q e_1 q \rightarrow e_1;$	$q e_1 e_1 \rightarrow e_1;$
$e_1 e_1 a \rightarrow e_1;$	$e_1 e_1 b \rightarrow e_1;$	$e_1 e_1 c \rightarrow e_1;$
$e_1 e_1 e_1 \rightarrow e_1;$		

図 24 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-1}$

Fig. 24 A transition rule set $\mathcal{R}_{I-Ek-1}$.

$b e_{u-1} c \rightarrow e_u;$	$\$ q q \rightarrow q;$
$\$ q b \rightarrow q;$	$\$ b e_{u-1} \rightarrow q;$
$e_u c c \rightarrow c;$	$b e_{u-1} e_{u-1} \rightarrow b;$
$q q q \rightarrow q;$	$\$ q e_u \rightarrow b;$
$q q b \rightarrow q;$	$q b e_{u-1} \rightarrow q;$
$q q e_u \rightarrow e_u;$	$a q q \rightarrow q;$
$e_{u-1} e_{u-1} c \rightarrow e_{u-1};$	$e_{u-1} e_{u-1} e_{u-1} \rightarrow e_{u-1};$
$q e_u c \rightarrow e_u;$	$e_u e_u c \rightarrow e_u;$
$q e_u e_u \rightarrow e_u;$	$b q q \rightarrow q;$
$e_u e_u e_u \rightarrow e_u;$	$c c q \rightarrow c;$
$c c a \rightarrow c;$	$c c b \rightarrow c;$
$c c c \rightarrow c;$	$c b q \rightarrow c;$
$c a q \rightarrow b;$	$c q q \rightarrow a;$
$e_{u-1} c c \rightarrow c;$	

図 25 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-u}$ ($2 \leq u \leq k-2$)

Fig. 25 A transition rule set $\mathcal{R}_{I-Ek-u}$ such that $2 \leq u \leq k-2$.

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow q;$
$\$ q c \rightarrow a;$	$q q q \rightarrow q;$
$q q b \rightarrow q;$	$q q c \rightarrow c;$
$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$
$c q q \rightarrow a;$	$c a q \rightarrow b;$
$\$ b e_{k-2} \rightarrow q;$	$q b e_{k-2} \rightarrow q;$
$c b q \rightarrow c;$	$q c c \rightarrow c;$
$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$
$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$
$e_{k-2} c c \rightarrow c;$	$b e_{k-2} c \rightarrow c;$
$b e_{k-2} e_{k-2} \rightarrow b;$	$e_{k-2} e_{k-2} e_{k-2} \rightarrow e_{k-2};$
$e_{k-2} e_{k-2} c \rightarrow e_{k-2};$	

図 26 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ek-k-1}$

Fig. 26 A transition rule set $\mathcal{R}_{I-Ek-k-1}$.

が w 波となる. y 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で進み, 時刻 $t = 2 \cdot k^j$ 時にセル C_1 に到達し, M_k は以下の状態をとる.

$$t = 2 \cdot k^j: \quad \underbrace{[1]}_b \quad \underbrace{[2, \frac{k^j}{2}+1]}_{e_1 \dots e_1} \quad \underbrace{[\frac{k^j}{2}+2, P_z(2 \cdot 2^j)-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_z(2 \cdot 2^j)]}_{S_z(2 \cdot 2^j)} \\
 \underbrace{P_z(2 \cdot 2^j) + 1, \dots}_{q \dots}$$

2 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-2}$ が使用され, x 波は状態 b , w 波, y は状態 e_2 となり, 3 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-3}$ が使用され, x 波は状態 b , w 波, y は状態 e_3 となり, ..., $k-1$ 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-k-1}$ が使用され, x 波は状態 b , w 波, y は状態 c となり往復運動を繰り返す. また, $k-1$ 往復目で w 波は消滅するので, $k-1$ 往復目の終了時, すなわち, 時刻 $t = k^j + (k-1) \cdot k^j = k^{j+1}$ 時に M_k は以下の状態をとる.

$$t = k^{j+1}: \quad \underbrace{[1] \quad [2, P_z(k^{j+1})-1] \quad [P_z(k^{j+1})] \quad [P_z(k^{j+1})+1, \dots]}_{a \quad c \dots c \quad S_z(k^{j+1}) \quad q \dots}$$

$k = 2\ell + 1$ の場合:

この場合, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B-k}$ に加え, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-1}$, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-2}$, ..., 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-k-1}$ を使用する. 図 27 に x 波, y 波の 1 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-1}$ を, h を $2 \leq h \leq k-2$ となる自然数とすると, 図 28 に x 波, y 波の $2 \sim h$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-h}$ ($2 \leq h \leq k-2$) を, 図 29 に x 波, y 波の $k-1$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-k-1}$ を示す.

1 往復目は遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-1}$ が使用され, M_k は以下のとおり遷移する.

$$\begin{aligned} t = k^j &: \quad \underbrace{[1] \quad [2, P_z(k^j)-1] \quad [P_z(k^j)] \quad [P_z(k^j)+1, \dots]}_{a \quad c \dots c \quad S_z(k^j) \quad q \dots} \\ t = k^j + 1 &: \quad \underbrace{[1] \quad [2] \quad [3, P_z(k^j+1)-1] \quad [P_z(k^j+1)] \quad [P_z(k^j+1)+1, \dots]}_{q \quad a \quad c \dots c \quad S_z(k^j+1) \quad q \dots} \\ &\quad \underbrace{[1,2] \quad [3] \quad [4, P_z(k^j+2)-1] \quad [P_z(k^j+2)] \quad [P_z(k^j+2)+1, \dots]}_{q \quad q \quad a \quad c \dots c \quad S_z(k^j+2) \quad q \dots} \\ t = k^j + 2 &: \quad \underbrace{[1] \quad [2] \quad [3, P_z(k^j+2)-1] \quad [P_z(k^j+2)] \quad [P_z(k^j+2)+1, \dots]}_{q \quad q \quad a \quad c \dots c \quad S_z(k^j+2) \quad q \dots} \end{aligned}$$

x 波がセル空間を右方向に進み, z 波と衝突する. 衝突後, M_k は以下のとおり遷移する. 時刻 $t = k^j + \frac{k^j-1}{2}$ 時にセル $C_{\frac{k^j-1}{2}+1}$ で z 波に追いつき衝突する. 衝突後, M_k は以下のとおり遷移する.

$$\begin{aligned} t = k^j + \frac{k^j-1}{2} &: \quad \underbrace{[1, \frac{k^j-1}{2}] \quad [\frac{k^j-1}{2}+1] \quad [\frac{k^j-1}{2}+2, \dots]}_{q, \dots, q \quad e_1 \quad q \dots} \\ &\quad \underbrace{[1, \frac{k^j-1}{2}-1] \quad [\frac{k^j-1}{2}, \frac{k^j-1}{2}+1] \quad [P_z(k^j + \frac{k^j-1}{2} + 1)]}_{q, \dots, q \quad e_1 e_1 \quad S_z(k^j + \frac{k^j-1}{2} + 1)} \\ &\quad \underbrace{P_z(k^j + \frac{k^j-1}{2} + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \\ t = k^j + \frac{k^j-1}{2} + 1 &: \quad \underbrace{[1, \frac{k^j-1}{2}-2] \quad [\frac{k^j-1}{2}-1, \frac{k^j-1}{2}+1]}_{q, \dots, q \quad e_1, \dots, e_1} \\ &\quad \underbrace{[P_z(k^j + \frac{k^j-1}{2} + 2)] \quad [P_z(k^j + \frac{k^j-1}{2} + 2) + 1, \dots]}_{S_z(k^j + \frac{k^j-1}{2} + 2) \quad q \dots} \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 e_1 が y 波となる. また, 内部状態 e_1 を維持するセル $C_{\frac{k^j-1}{2}+1}$ が w 波となる. y 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で進み, 時刻 $t = k^j + \frac{k^j-1}{2} + \frac{k^j-1}{2} = k^j + k^j - 1$ 時にセル C_1 に到達し, M は以下の状態をとる.

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q a \rightarrow q;$	$\$ q e_1 \rightarrow e_1;$
$q q q \rightarrow q;$	$q q a \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$
$q q e_1 \rightarrow e_1;$	$\$ a c \rightarrow q;$	$q a c \rightarrow q;$
$c a q \rightarrow b;$	$e_1 a q \rightarrow b;$	$c b q \rightarrow c;$
$e_1 b q \rightarrow c;$	$a c q \rightarrow e_1;$	$a c b \rightarrow a;$
$a c c \rightarrow a;$	$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$
$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$	$e_1 c q \rightarrow c;$
$e_1 c a \rightarrow c;$	$e_1 c b \rightarrow c;$	$e_1 c c \rightarrow c;$
$\$ e_1 e_1 \rightarrow b;$	$q e_1 a \rightarrow e_1;$	$q e_1 e_1 \rightarrow e_1;$
$e_1 e_1 b \rightarrow e_1;$	$e_1 e_1 c \rightarrow e_1;$	$e_1 e_1 e_1 \rightarrow e_1;$

図 27 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-1}$

Fig. 27 A transition rule set $\mathcal{R}_{I-Ok-1}$.

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow q;$
$\$ q e_h \rightarrow e_h;$	$q q q \rightarrow q;$
$q q b \rightarrow q;$	$q q e_h \rightarrow e_h;$
$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$
$c q q \rightarrow a;$	$\$ b e_{h-1} \rightarrow q;$
$q b e_{h-1} \rightarrow q;$	$c b q \rightarrow c;$
$c c c \rightarrow c;$	$e_{h-1} c c \rightarrow c;$
$e_h c c \rightarrow c;$	$b e_{h-1} c \rightarrow e_h;$
$b e_{h-1} e_{h-1} \rightarrow b;$	$e_{h-1} e_{h-1} c \rightarrow e_{h-1};$
$e_{h-1} e_{h-1} e_{h-1} \rightarrow e_{h-1};$	$\$ e_h e_h \rightarrow b;$
$q e_h c \rightarrow e_h;$	$q e_h e_h \rightarrow e_h;$
$e_h e_h c \rightarrow e_h;$	$e_h e_h e_h \rightarrow e_h;$

図 28 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-h}$ ($2 \leq h \leq k-2$)

Fig. 28 A transition rule set $\mathcal{R}_{I-Ok-h}$ such that $2 \leq h \leq k-2$.

$b e_{k-2} c \rightarrow c;$	$q c c \rightarrow c;$
$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow q;$
$\$ q c \rightarrow c;$	$\$ b e_{k-2} \rightarrow q;$
$b e_{k-2} e_{k-2} \rightarrow b;$	$e_{k-2} c c \rightarrow c;$
$q q q \rightarrow q;$	$q q b \rightarrow q;$
$q q c \rightarrow c;$	$q b e_{k-2} \rightarrow q;$
$a q q \rightarrow q;$	$e_{k-2} e_{k-2} c \rightarrow e_{k-2};$
$b q q \rightarrow q;$	$e_{k-2} e_{k-2} e_{k-2} \rightarrow e_{k-2};$
$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$
$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$
$c b q \rightarrow c;$	$c a q \rightarrow b;$
$c q q \rightarrow a;$	$\$ c c \rightarrow a;$

図 29 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-k-1}$

Fig. 29 A transition rule set $\mathcal{R}_{I-Ok-k-1}$.

$$t = k^j + k^j - 1: \quad \underbrace{[1, \frac{k^j}{2}+1] \quad [\frac{k^j}{2}+2, P_z(2 \cdot 2^j)-1] \quad [P_z(k^j+k^j-1)]}_{e_1 \dots e_1 \quad c \dots c \quad S_z(k^j+k^j-1)} \\ \underbrace{[P_z(k^j+k^j-1)+1, \dots]}_{q \dots}$$

1 ステップ後の時刻 $t = 2 \cdot k^j$ 時に M_k は以下の状態をとる.

$$t = 2 \cdot k^j: \quad \underbrace{[1] \quad [2, \frac{k^j}{2}+1] \quad [\frac{k^j}{2}+2, P_z(2 \cdot 2^j)-1] \quad [P_z(2 \cdot 2^j)]}_{b \quad e_1 \dots e_1 \quad c \dots c \quad S_z(2 \cdot 2^j)} \\ \underbrace{[P_z(2 \cdot 2^j)+1, \dots]}_{q \dots}$$

2 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-Ok-2}$ が使用され, x 波は状

態 b , w 波, y は状態 e_2 となり, 3 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-O_{k-3}}$ が使用され, x 波は状態 b , w 波, y は状態 e_3 となり, $\dots$, $k-1$ 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I-O_{k-k-1}}$ が使用され, x 波は状態 b , w 波, y は状態 c となり往復運動を繰り返す. また, $k-1$ 往復目で w 波は消滅するので, $k-1$ 往復目の終了時, すなわち, 時刻 $t = k^j + (k-1) \cdot k^j = k^{j+1}$ 時に M_k は以下の状態をとる.

$$t = k^{j+1}: \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, P_z(k^{j+1})-1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(k^{j+1})]}_{S_z(k^{j+1})} \underbrace{[P_z(k^{j+1})+1, \dots]}_{q \dots}$$

(I), (II) より, 補題 3.1 が証明される. $\square$

補題 3.1 より, すべての k について, セル C_1 の内部状態は時刻 $t = k^n$ 時に状態 a をとる. 以上より以下の定理を得る.

定理 3.2 $k \geq 2$ となる自然数について, $2k+1$ 状態 CA 上で冪乗数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成することができる.

4. おわりに

本稿では, CA 上の実時間数列生成問題について考察し, k を $k \geq 2$ となる自然数とした場合, $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ として表される冪乗数列の 1 次元接続 CA 上の生成アルゴリズムを設計し, すべての k の場合の冪乗数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が有限状態の CA で実時間生成が可能であることを示した. しかしながら, 冪乗数列生成アルゴリズムの内部状態数については, 検討の余地が残る. Kamikawa ら [4] が示した数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムは双方ともに内部状態数について最適となる 3 状態 CA で実現している. 本研究で示したアルゴリズムは, 既存研究に比べ内部状態数は増加するが, 有限の状態数 $2k+1$ で, すべての k の場合の冪乗数列 $\{k^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成できる点については価値があると考ええる. また, 本研究で提案した冪乗数列生成アルゴリズムは, CA を用いた自然現象, 社会現象などのシミュレーションやモデリングでの応用が期待される.

今後の課題としては, 冪乗数列生成アルゴリズムの内部状態数が $2k+1$ より削減可能であるかの考察を行うこと, 階数が 3 以上の線形回帰数列生成アルゴリズムの内部状態集合, 遷移規則集合についての考察を行うことがあげられる.

謝辞 本稿を纏めるにあたり, 貴重なご意見をいただいた査読委員の先生方に心より感謝いたします.

参考文献

- [1] 有沢 誠: 有限状態機械の一次元繰返し形配列による数列の生成方式について, 電子通信学会論文誌 C, Vol.54, No.8, pp.759–766 (1971).
- [2] Kamikawa, N. and Umeo, H.: Some state-efficient algorithms for real-time generation of non-regular sequences

- on cellular automata, *Proc. 13th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.47–50 (2008).
- [3] Kamikawa, N. and Umeo, H.: A design of algorithms for real-time generation of linear-recursive sequences on cellular automata, *14th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.281–286 (2009).
- [4] Kamikawa, N. and Umeo, H.: A Study on Sequence Generation Powers of Small Cellular Automata, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol.5, No.4, pp.191–199, DOI: 10.9746/jcmsi.5.191 (2012).
- [5] Kamikawa, N. and Umeo, H.: A construction of five-state real-time Fibonacci sequence generator, *Artificial Life and Robotics*, Vol.21, No.4, pp.531–539, DOI: 10.1007/s10015-016-0309-2 (2016).
- [6] 上川直紀, 梅尾博司: 能力の小さい 1 ビットセルオートマトンで生成可能な数列についての考察, 情報処理学会論文誌数理モデル化と応用 (TOM), Vol.10, No.1, pp.1–13 (2017).
- [7] 上川直紀, 梅尾博司: セルオートマトン上の数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの設計, 情報処理学会研究報告数理モデル化と問題解決 (MPS), Vol.2017-MPS-113, No.15, pp.1–6 (2017).
- [8] Korec, I.: Real-time generation of primes by a one-dimensional cellular automaton with 9 states, *Proc. 2nd International Colloquium on Universal Machines and Computations*, pp.101–116 (1998).
- [9] von Neumann, J.: *Theory of Self-Reproducing Automata*, Burks, A.W. (Ed.), p.388, University of Illinois Press (1968).
- [10] 脇田佑希子, 清水光輝, 玉城龍洋, 北 栄輔: 合流車両による交通渋滞緩和のためのセルオートマトンシミュレーション, 日本計算数理工学論文集, Vol.10, pp.75–80 (2010).



上川 直紀 (正会員)

2001 年大阪電気通信大学大学院工学研究科情報工学専攻博士前期課程修了. 2001–2006 年ノーリツ鋼機株式会社勤務. 2009 年大阪電気通信大学大学院工学研究科情報工学専攻博士後期課程満期退学. 博士 (工学). 現在,

大阪電気通信大学情報学研究所事務室勤務.



梅尾 博司

1973 年大阪大学基礎工学部生物工学科卒業. 1978 年大阪大学大学院基礎工学研究科物理系専攻博士課程修了. 現在, 大阪電気通信大学名誉教授. 工学博士.