"Implicitizing Rational Tensor Product Surfaces Using the Resultant of Three Moving Planes" の実装報告

落合 啓之[1,a)]

概要：SIGGRAPH 2018 で Li-Yong Shen, Ron Goldman が講演した論文 "Implicitizing Rational Tensor Product Surfaces Using the Resultant of Three Moving Planes" を実装追試する。この論文の目的は、2 変数の３つの (陽) 関数で与えられた曲面を、１つの陰関数で与えることである。提案手法を用いることで今までの手法、例えばグレブナー基底を使った手法では答えが得られなかったパラメータ表示に対して、陰関数を具体的に求めることに成功している。ここでは、既存手法も工夫して実装することで、提案手法と既存手法の優劣や手法ごとの特徴を論ずる。

1. 曲面の表示方法

３次元空間の曲面の記述方法には、陽関数によるもの

$$(x, y, z) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

と陰関数によるもの

$$F(x, y, z) = 0$$

がある。ここで議論のベースとしている論文 [1] では、陽関数は２変数 (s, t) の有理式であると仮定している。そして、曲面を表示する陽関数を入力、曲面を表示する陰関数を出力とする問題を考えている。先行手法や提案手法のいずれも厳密解であり、したがって議論の焦点は速度の比較となる。論文 [1] で与えられているほとんどの例 (Table II など) では、グレブナー基底を使うと 10 分かけても答えが出ないが、提案手法 (終結式による方法) ならば１秒程度で計算が完了する、と述べられている。

入力は３つの有理式であり、共通分母を使って表示することで４つの (２変数の) 多項式が入力である。挙げられている事例では、入力の次数は２次あるいは３次である。一方、出力は４変数の同次の多項式である。入力の多項式の次数から出力の多項式の次数を正確に見積もることはできていないが、これらの例では、出力の陰関数の次数は結果として７次から 14 次となっている。

1 九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所
Institute of mathematics for industry, Kyushu University, Fukuoka, 819-0395, Japan
a) ochiai@imi.kyushu-u.ac.jp

2. 線形化法

一般に n 次の４変数の同次の多項式は $(n+3)(n+2)(n+1)/6$ 個の単項式の線形結合であり、入力が整数係数であればその係数は整数に取ることができる。係数決定の問題と捉えれば、恒等式として取り扱うことも可能である。これは理論的には綺麗であるが、現実にはパラメータ (s, t) を特殊化 (適当な小さい整数を代入) することで得られる十分な個数の同次線形方程式から、陰関数の係数を決定することが現実的である。この計算は、既存の標準的に流布している数式処理、例えば Mathematica で十分に実行可能であり、文献 [1] の幾つかの例では再計算ができる。例えば、Example 5 や 7 では、工夫せずにそのまま入力しても所要時間もたかだか１分程度である。

ここまでの例での所要時間の比較では提案手法の方がずっと速い。ただし、論文に述べられているような 10 分かかっても答えが返ってこないような質的な差ではない。さらに、終結式の計算は次数が上がると飛躍的に時間を要することが知られている。次数が３よりも高い系で、どちらの方法が有効になるかは、検討の余地があるだろう。

参考文献

[1] Li-Yong Shen and Ron Goldman: *Implicitizing Rational Tensor Product Surfaces Using the Resultant of Three Moving Planes*, ACM Trans. Graph., volume 36, number 5, Article 167, pp. 167:1–167:14 (2017).