情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report

Vol.2018-CG-171 No.1
2018/9/30

An Area-Preserving Parametrization for Spherical Rectangles の実装報告

吉村 篤[†1]

概要：筆者は、SolidAngle 社が EGSR 2013 で発表した論文、Carlos Ureña, Marcos Fajardo, Alan King , "An Area-Preserving Parametrization for Spherical Rectangles" では、単位長方形$[0,1]^2$の領域から、任意の長方形の領域を単位球面に射影してできた領域への写像を考え、面積を保存する形で提示するものである。これはレンダリングの文脈では特に直接照明の計算に便利である。筆者はこれを実装し、Path Tracing および光源の Explicit Light Sampling に利用した場合の分散低減を確認する。加えてナイーヴな実装に対して可能な最適化と、小さなエラッタについても触れる。

1. 本手法のコアアイディア

この手法は、逆関数法のように、累積分布関数から出発する。

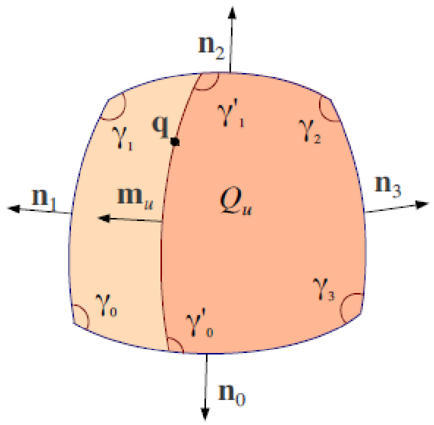

図 1 元論文の Figure 2

まず図 1 のように球面長方形の領域Qの中の領域$\mathrm{Q_u}$を考える。パラメータ u が 0 から 1 に変化するとき、$\mathrm{m_u}$は$-\mathrm{n_3}$から$\mathrm{n_1}$に変化し、$\mathrm{Q_u}$の面積$\mathrm{A(Q_u)}$は 0 から球面長方形の全面積A(Q)へと変化する。この面積変化量を累積分布関数として考えた式が元論文(6)の式、

$$\mathrm{A(Q_u)} = \arccos(-\mathrm{n_0}.m_u) + \arccos(-m_u n_2) + \gamma_2 + \gamma_3 - 2\pi$$

であり、これは言い換えれば、元論文(8)の式、

$$\mathrm{A(Q)u} = \arccos(-\mathrm{b_0} c_u) + \arccos(-b_1 c_u) + \gamma_2 + \gamma_3 - 2\pi$$

となり、ここからuの関数としての$\mathrm{c_u}$を求める。そしてそこから球面に投影される前の長方形の 1 つ目の軸の座標$\mathrm{x_u}$の表現を得る。

次に、2 つ目の軸であるが、領域$\mathrm{Q_u}$の切り口の面は xz 平面と常に直交しているため、面積を保存するには y 軸に対して線形に座標を選ぶだけでこれを達成できることが示されている。このことを利用し、投影される前の長方形の座標$\mathrm{y_v}$の表現を得る。

最後にローカルに定義した空間上の座標をグローバル座標に変換する。

2. 最適化

ナイーヴな実装では、3 次元ベクトルの外積を展開して冗長性を除去し、$\mathrm{n_1}, \mathrm{n_3}$は y 成分が 0 であり、$\mathrm{n_0}, \mathrm{n_2}$は x 成分が 0 であるということ、最終的に必要なのは n の z 成分だけであることなどを利用すると、最適化が可能である。

3. 実装

Path Tracing の Explicit Light Sampling として、光源の面積に一様なサンプルを生成した場合と、立体角に一様なサンプルを生成した場合を実装して、後者の分散の低減を確認した。結果が以下の図 2 と図 3 である。

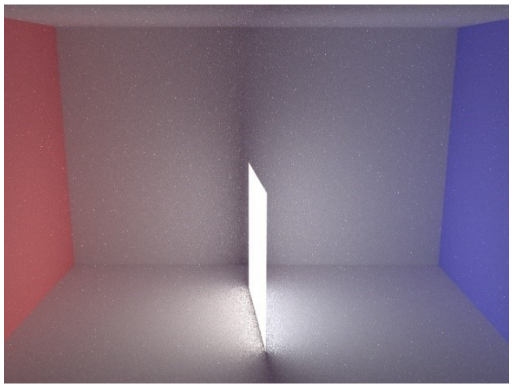

図 2 面積に一様なサンプルを生成した場合(64spp)

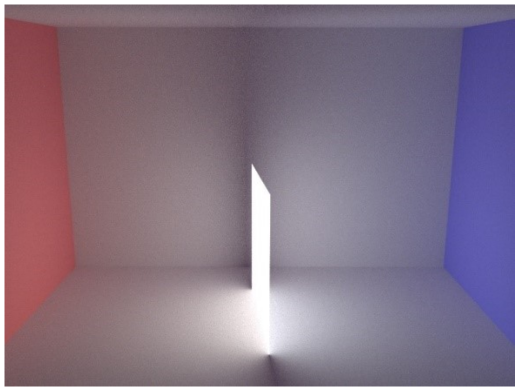

図 3 立体角に一様なサンプルを生成した場合(64spp)

[†1] ワウ株式会社
WOW Inc.

4. エラッタ

元論文Appendices, “A. Expressing c_u as a function of u” では、$\phi(u)$の値は開区間$(\pi, 2\pi)$になると述べられている。これはγ'_0, γ_1'がそれぞれ$\frac{\pi}{2}$よりも大きいことを根拠にしている。しかしながら、これは歪んだ投影長方形のいくつかのケースでは成り立たないため、$\phi(u)$の値は開区間$(\pi, 2\pi)$になるとは限らない。これは筆者である Carlos Ureña 氏と Alan King 氏にメールで確認済みである。

加えてこのエラッタは、実装に大きな影響は無い。なぜなら、$\phi(u) = 0$のケースは、最終的な座標x_uが 0 になる結果になり、特異点として特別避ける必要がないためである。

参考文献

[1] Carlos Ureña, Marcos Fajardo, Alan King , “An Area-Preserving Parametrization for Spherical Rectangles”