Vol.2018-AL-169 No.9
2018/9/3

辞書式最適最速到達フロー問題

神山 直之[1,2,a)]

概要：Ford & Fulkerson によって提案された動的ネットワークとは，各辺が容量と移動時間を持つ有向グラフである．動的ネットワーク上の基本的な問題の一つとして避難計画問題がある．この問題の目的は，全てのサプライをシンクまで最も早く流すことのできる動的ネットワーク上の動的フローを求めることである．最速到達フローとは，全ての時刻においてシンクへ到達しているサプライの量を最大化する避難計画問題の解である．シンクの数が 1 つの場合は，最速到達フローが常に存在することが知られている．しかし，シンクが 2 つ以上存在しシンクに容量がある場合は，最速到達フローが存在しない問題例が存在することが知られている．本論文では，この非存在性を回避するために，複数のシンクを持つ動的ネットワークにおける新たな解として辞書式最適最速到達フローを提案する．この解は，Megiddo が提案した通常のネットワークフローにおける辞書式最適フローから発想を得たものである．本論文では，一般の動的ネットワークにおける辞書式最適最速到達フローを求める擬多項式時間アルゴリズムを提案する．さらに，全ての辺の移動時間が 0 の場合に対する多項式時間アルゴリズムを提案する．

Ford & Fulkerson [4] によって提案された動的ネットワークとは，各辺が容量と移動時間を持つ有向グラフである．動的ネットワーク上の基本的な問題の一つとして避難計画問題がある．この問題の目的は，全てのサプライをシンクまで最も早く流すことのできる動的ネットワーク上の動的フローを求めることである．この問題は多項式時間で解くことができることが知られている [7]．

実際の問題への応用を考えると，最後のサプライがシンクへ到達する時刻を最小化するだけでは十分ではない．何故ならば，建物はいつ崩壊するかはわからないからである．もし，任意の時刻に対して，シンクにすでに到達しているサプライの量を最大化することができればさらに望ましい．このような問題を考えるために，Gale [5] は 1 つのソースと 1 つのシンクを持つ動的ネットワーク上の最速到達フローの概念を導入した．複数のソースと 1 つのシンクを持つ動的ネットワーク上には，常に最速到達フローが存在することが知られている [9]．この結果は，時間拡大ネットワークと通常のネットワーク上の辞書式最大フローを用いると示すことができる．さらにこの場合に関して，Baumann & Skutella [1] は入力のサイズと最速到達パターンの折れ点の数に関する多項式時間で求めることができることを示した．しかしながら，最速到達フローのサプライのシンクへの平均到達時刻を求める問題は **NP** 困難であることもしられている [2]．複数のシンクを持つ場合に関しては，シンクが容量を持つ場合は，最速到達フローが必ずしも存在しないことが知られている (そのような例に関しては [3] の図 4.1 を参照)．特殊な場合の最速到達フローの存在性に関しては，例えば [10] 等を参照．さらに，Groß, Kappmeier, Schmidt & Schmidt [6] はこの問題に対する近似アルゴリズムを提案している．

本論文では，容量がある複数のシンクを持つ動的ネットワークにおける最速到達フローの非存在性を回避する方法として，辞書式最適最速到達フローという新たな解を提案する．この解は，Megiddo [8] が提案した通常の (静的な) ネットワークフローにおける辞書式最適フローから発想を得たものである．複数のシンクを持つ動的ネットワークにおける最速到達フローを求める問題では，シンクの容量を厳密に守る必要がある．一方我々の問題では，シンクの容量を厳密に守る代わりに，各シンクに流れ込むフローの量とそのシンクの容量の比を非減少順に並べたものを辞書式順序に関して最大化することを考える．つまり，辞書式最適最速到達フローは常に存在することが保証される．

以下では，$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Z}_+$ で実数，非負実数，非負有理数，非負整数の集合を表すとする．非負実数の順序列 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ および $y = (y_1, y_2, \ldots, , y_\ell)$ が与えられているとする．このとき，(i) $1 \le i \le \ell$，(ii) $1 \le j < i-1$ を満たす任意の整数 j に対して $x_j = y_j$，(iii) $x_i > y_i$ の 3 つの条件をを満たす非負整数 i が存在するならば $x >_{\mathrm{lex}} y$ と書く．各有限有向グラフ G が与えられているとする．こ

[1] 九州大学
[2] JST さきがけ
[a)] kamiyama@imi.kyushu-u.ac.jp

のとき，$\mathsf{V}(G)$ と $\mathsf{A}(G)$ でそれぞれ G の点集合と辺集合を表す．さらに $\mathsf{V}(G)$ の各部分集合 X に対して，$\delta^+_G(X)$ および $\delta^-_G(X)$ で，それぞれ $u \in X, v \notin X$ と $u \notin X, v \in X$ を満たす $\mathsf{A}(G)$ の辺 $a = (u, v)$ の集合を表すとする．

本論文で考える問題は以下のように定義される．有限単純有向グラフ D，辺容量関数 $c\colon \mathsf{A}(D) \to \mathbb{Q}_+$，移動時間関数 $\tau\colon \mathsf{A}(D) \to \mathbb{Z}_+$，シンクの集合を表す $\mathsf{V}(D)$ の部分集合 S，サプライ関数 $b\colon \mathsf{V}(D) \setminus S \to \mathbb{Q}_+$，(ソフトな) シンク容量関数 $\omega\colon S \to \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$ が与えられる．ただし S の任意の点 s に対して $\delta^+_D(\{s\}) = \emptyset$ が成り立つとする．さらに $\mathsf{V}(D) \setminus S$ の任意の点は S の少なくとも一つの点に D 上で到達可能だとする．最後に $k := |S|$ と定義する．

D 上の動的フローとは，関数 $f\colon \mathsf{A}(D) \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ である．$\mathsf{A}(D)$ の各辺 $a = (u, v)$ と各非負整数 θ に対して，$f(a, \theta)$ は時刻 θ に点 u に入り，時刻 $\theta + \tau(a)$ に v に到達するフローの量を表す．D 上の各動的フロー f と各非負整数 θ に対して $\mathbb{R}^{\mathsf{V}(D)}$ のベクトル $\mathbf{ex}^\theta_f$ を以下で定義する．

$$\mathbf{ex}^\theta_f(v) := \sum_{a \in \delta^-_D(\{v\})} \sum_{i=0}^{\theta - \tau(a)} f(a, i) - \sum_{a \in \delta^+_D(\{v\})} \sum_{i=0}^{\theta} f(a, i).$$

各非負整数 θ に対して，D 上の動的フロー f は，以下の条件を満たすとき，θ に関して実行可能な動的フローと呼ばれる．

(D1) $\mathsf{A}(D)$ の各辺 a に対して以下が成り立つ．
- $t \leq \theta - \tau(a)$ を満たす任意の非負整数 t に対して $f(a, t) \leq c(a)$．
- $t > \theta - \tau(a)$ を満たす任意の非負整数 t に対して $f(a, t) = 0$．

(D2) $\mathsf{V}(D) \setminus S$ の各点 v に対して以下が成り立つ．
- $t < \theta$ を満たす任意の非負整数 t に対して $\mathbf{ex}^t_f(v) \geq -b(v)$．
- $\mathbf{ex}^\theta_f(v) = -b(v)$．

もしある非負整数 θ に関して D 上の動的フロー f が実行可能ならば，単に f を実行可能な動的フローと呼ぶ．

D 上の最小避難完了時刻とは，θ に関する実行可能なフローが存在する最小の非負整数 θ のことである．最小避難完了時刻は多項式時間で求めることができることが知られている [7]．以下では，最小避難完了時刻は分かっていると仮定する．ただし，T のサイズは入力サイズの多項式で抑えることができるが，T そのものは入力サイズの多項式で抑えられるとは限らないことに注意する．T に関する D 上の実行可能なフロー f は，D 上の任意の実行可能なフロー g と $\{0, 1, \ldots, T\}$ の任意の非負整数 t に対して，

$$\sum_{s \in S} \mathbf{ex}^t_f(s) \geq \sum_{s \in S} \mathbf{ex}^t_g(s)$$

を満たすとき，D 上の最速到達フローと呼ばれる．つまり，最速到達フローとは全ての時刻において実行可能なフローの中で最も多くのサプライをシンクまで流すことのできる実行可能なフローである．D 上の各最速到達フロー f に対して，

$$\mathbf{dv}(f) := \Big(\frac{\mathbf{ex}^T_f(s_1)}{\omega(s_1)}, \frac{\mathbf{ex}^T_f(s_2)}{\omega(s_2)}, \ldots, \frac{\mathbf{ex}^T_f(s_k)}{\omega(s_k)}\Big),$$

と定義する．ただし $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ および

$$\frac{\mathbf{ex}^T_f(s_1)}{\omega(s_1)} \leq \frac{\mathbf{ex}^T_f(s_2)}{\omega(s_2)} \leq \cdots \leq \frac{\mathbf{ex}^T_f(s_k)}{\omega(s_k)}$$

と仮定している．D 上の最速到達フロー f は，D 上の任意の最速到達フロー g に対して，$\mathbf{dv}(f) >_{\mathrm{lex}} \mathbf{dv}(g)$ または $\mathbf{dv}(f) = \mathbf{dv}(g)$ を満たすとき D 上の辞書式最適最速到達フローと呼ばれる．

本論文の成果は以下のようにまとめられる．まず，一般の動的ネットワークにおける辞書式最適最速到達フローを求める擬多項式時間アルゴリズムを提案する．正確に言えば，提案アルゴリズムは辞書式最適最速到達フローを時間拡大ネットワークのサイズに関する多項式時間で求めることができる．提案アルゴリズムでは，まずある劣モジュラ関数に関する基多面体上での最適化問題を解くことにより，ある辞書式最適最速到達フローに対する，各時刻における各シンクに流れ込むフローの量を計算する．その後，この情報を使って時間拡大ネットワーク上で最大フロー問題を解くことにより，辞書式最適最速到達フローを求める．さらに，全ての辺の移動時間が 0 の場合に対する多項式時間アルゴリズムを提案する．

参考文献

[1] N. Baumann and M. Skutella. Earliest arrival flows with multiple sources. *Mathematics of Operations Research*, 34(2):499–512, 2009.

[2] Y. Disser and M. Skutella. The simplex algorithm is NP-mighty. In *Proc. SODA2015*, pages 858–872, 2015.

[3] L. Fleischer. Faster algorithms for the quickest transshipment problem. *SIAM Journal on Optimization*, 12(1):18–35, 2001.

[4] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

[5] D. Gale. Transient flows in networks. *The Michigan Mathematical Journal*, 6(1):59–63, 1959.

[6] M. Groß, J. W. Kappmeier, D. R. Schmidt, and M. Schmidt. Approximating earliest arrival flows in arbitrary networks. In *Proc. ESA2012*, volume 7501 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 551–562, 2012.

[7] B. Hoppe and É. Tardos. The quickest transshipment problem. *Mathematics of Operations Research*, 25(1):36–62, 2000.

[8] N. Megiddo. Optimal flows in networks with multiple sources and sinks. *Mathematical Programming*, 7(1):97–107, 1974.

[9] E. Minieka. Maximal, lexicographic, and dynamic network flows. *Operations Research*, 21:517–527, 1973.

[10] M. Schmidt and M. Skutella. Earliest arrival flows in networks with multiple sinks. *Discrete Applied Mathematics*, 164:320–327, 2014.