

Magic Graph の一般化とその性質

杉山 雅英^{1,a)}

受付日 2017年9月11日, 採録日 2018年2月1日

概要: 与えられたグラフの頂点や辺に数字を配置して、辺とその両端の頂点または頂点につながるすべての辺の数字の和が一定になるとき、その和を定和、そのグラフを magic graph、その数字の配置を magic labeling と呼ぶ。数字の和が一定となる配置はグラフに対する魔方陣と見ることできる。従来の magic graph の研究では辺や頂点に配置する数字の個数は 1 個のみであった。本論文では辺や頂点に配置する数字の個数を 1 個に限定しない一般化した magic graph を提案しその性質を述べる。定和が満たす定和方程式を定式化し、それを用いてある条件を満たすグラフに magic labeling が存在しないことを示す。多角形 (C_k) や正多面体などの次数一定の正則グラフに対して最大・最小定和の計算式を導出し、ある条件を満たすグラフに最大・最小定和を持つ magic labeling が存在しないことを示す。さらに与えられた magic graph の変換と合成の概念を述べ、アフィン変換による magic labeling の双対性、漸化的な構成方法、を述べる。

キーワード: グラフラベリング, マジックラベリング, エッジマジック, 魔方陣, パズル

Generalization of Magic Graphs and Their Properties

MASAHIDE SUGIYAMA^{1,a)}

Received: September 11, 2017, Accepted: February 1, 2018

Abstract: When the vertices and edges in a given graph are labeled with positive integers and all edges connected to a vertex (or an edge and two connecting vertices) have a constant sum, it is called a magic sum, and the corresponding labeling and graph are referred to as magic labeling and magic graph, respectively. This problem can be treated as one extension of a magic square. Conventional studies on magic graphs allow at most one number to be assigned to each vertex and edge. This paper proposes a generalized definition of magic graphs, for which any number of digits can be used to label to a vertex and edge, and describes the construction of such magic graphs and their properties. A magic sum equation is formulated and a generalized property for which a magic graph does not exist is proved. An equation for calculating the minimum and maximum magic sums is derived for regular graphs, including polygons and polyhedrons. Furthermore, techniques of transforming and synthesizing magic graphs, duality of magic labeling using an affine transform, and recursive construction are discussed.

Keywords: graph labelings, magic labelings, edge-magic, magic squares, puzzles

1. まえがき

人間は言葉や数字を使った知的好奇心を喚起する遊びを古くから行ってきており、IT の進歩した現代でも数字を使った数独などのパズルの雑誌が多数発行されている。言葉遊びや数字遊びをコンピュータに行わせることは知的挑戦でありその実現は新たなコンピュータサービスの提供の

可能性を持っている。そのような観点から我々は言葉遊びのコンピュータ上での実現を検討してきた [1], [2], [3]。言葉遊びは言語依存であり数字遊びは言語独立の普遍的な遊びである。数字遊びの中で魔方陣 [4], [5], [6], [7], [8], [9] や虫食い算などのような数字を規則に従って配置する問題はよく知られたパズルである。本論文では与えられたグラフに対して 1 から始まる連続した自然数をグラフの頂点と辺に配置して、辺とその両端の頂点に置かれた数の和がすべて一定になる magic graph の構成とその性質について述べる [10], [11]。1 から始まる連続した自然数をすべてただ 1

¹ 会津大学コンピュータ理工学部
The University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Fukushima 965-8580, Japan

a) sugiyama@u-aizu.ac.jp

回のみ使用することができる。数の和が一定（この値を定和と呼ぶ）となるように配置を行うのでグラフに対する魔方陣と見ることもできる。幾何学的に美しい様々なグラフに数を配置することになるのでデザインとしても有用であると考えられる。

本論文では 2 章で魔方陣と magic graph の研究の歴史について述べ、3 章で定和が満たす定和方程式を定式化する。ある条件を満たすグラフに magic graph が存在しないことを示し、正則グラフに対して最大・最小定和の計算式を導く。4 章でアフィン変換を用いた配置の変換とそれを用いた頂点に複数個を配置する magic graph の構成法、5 章で magic graph の漸化的構成法、を述べる。本論文で使用する記号を表 A.1 に示す。

2. 魔方陣と magic graph

魔方陣 (magic square) は 1 から連続したすべての数字をただ 1 度だけ用いて方形に数字を配置し縦横斜めの数字の和を一定にする数学問題である。方形の大きさ k を次数と呼ぶ。方形の面積が k^2 であるので使用する数字は $n = k^2$ であり、1 から n の総和は $\frac{n(n+1)}{2}$ であり、列の個数が k であるので一定値 S は式 (1) を満たすことになる。

$$k \cdot S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{k^2}{2} \cdot (k^2 + 1) \quad (1)$$

この S を定和 (magic sum)^{*1}と呼ぶ。図 1 に 3 次の魔方陣を示す。定和は式 (1) で与えたとおり、 $S = 15$ である。

魔方陣では定和は容易に計算でき、与えられた次数の魔方陣の具体的な構成法や本質的に異なる配置の個数の算出が課題となる。方形に配置する魔方陣の変形として文献 [4] では複数の円の交点に配置する円陣、星型の図形に配置する星陣、立方体に配置する立体魔方陣などについて、また文献 [5] では平面を埋めつくし定和性が成り立つ汎魔方陣について述べている。文献 [8] では様々な数学パズルを述べる中での 76–80 番目の問題で魔方陣を取り扱っている。文献 [9] では魔方陣と射影幾何学との関係が述べられている。

Magic graph に関連した配置問題に関して魔方陣の変形として文献 [6] では 8 章「いろいろな魔方陣」で三角形の 3 つの頂点と辺に数字を配置する三角陣と正四面体の頂点と辺に数字を配置する四面体陣の具体例を示し図形陣と名前をつけているが一般的なグラフに対する言及はない。さら

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$k = 3, n = 9$

図 1 3 次の魔方陣

Fig. 1 Magic square of order three.

*1 magic constant と呼ぶこともある。

に四面体陣は 3 つの三角形の面に対する定和配置問題^{*2}である。文献 [7] の序章「魔方陣について」においても文献 [6] と同様な三角形陣、多角形陣などの図形陣を紹介している。

グラフに対して数字を配置する問題はグラフラベリング (グラフナンバリング) と呼ばれる。図 2 に示すようにグラフ $G = (V, E)$ の構成要素である頂点の集合 $V = \{v_i\} (i = 1, 2, \dots, v), v = |V|$, 辺の集合 $E = \{e_\ell\} (\ell = 1, 2, \dots, e), e = |E|$ の組合せ^{*3}の定義域 $D = V \cup E$ に対して整数などのラベルを配置することである。図 2 に示したように頂点を丸で表し頂点に配置する数字を丸の中に表示し、辺に配置する数字は辺の途中に表示する。本論文ではグラフは平面グラフに限らない一般の無向グラフであり、多重辺やループを含んでもよいし、連結グラフでなくてもよい。ただし、孤立した頂点を持たないものとする。

Sedláček [12] はグラフの辺への数値ラベルに対して頂点につながる辺のラベルの和が頂点の選び方によらず一定であるとき magic であると定義しグラフが magic であるための必要十分条件を求める問題を提起した。Stewart [13] はその問題に対して辺へのラベルとして実数の範囲で検討し、連続する正の整数を用いた magic を super-magic と定義し、 k 次の魔方陣は完全 2 部グラフ $K_{k,k}$ の super-magic に対応することを指摘し、完全 2 部グラフ $K_{k,k}$ や Wheel W_4, W_5 , 完全グラフ $K_p (p > 5, p$ は 4 の倍数でない) などが super-magic であることや $W_k (k \geq 6)$ などが super-magic でないことを示した。図 3 に示す完全 2 部グラフのたとえば i_1, j_2 を頂点とする辺 i_1j_2 に図 1 の魔方陣の 1, 2 要素 9 を対応させると頂点 i_1, i_2, i_3 および j_1, j_2, j_3 における super-magic は魔方陣の 1, 2, 3 行および 1, 2, 3 列の和が同一であることに対応している。MacDougall ら [14] はさらに $V \cup E$ から $\{1, 2, \dots, v + e\}$ への双射を vertex-magic total labeling (VMTL) と定義し、定和の存在範囲や双対の概念、 k 角形 (C_k) や経路 (P_k)、完全 2 部グラフ、完全グラフに関する結果を述べている。McQuillan [15] は奇数次の完全グラフが VMTL であり、最大・最小定和の間の定和がすべて実現可能であることを示した。

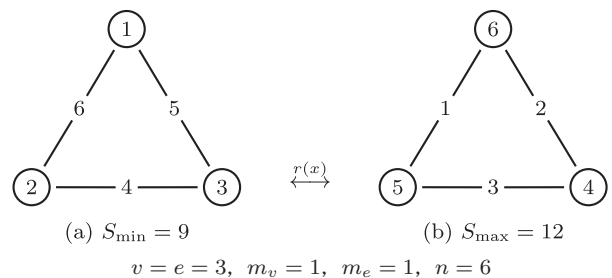


図 2 三角形 (C_3) への [1, 1] EMTL の例
Fig. 2 [1, 1] EMTL examples of a triangle (C_3).

*2 底面にあたる三角形に関しては定和条件を満たしていないので正四面体の意味での face-magic ではない。

*3 G が平面グラフの場合は面の集合 F を加えることもある。

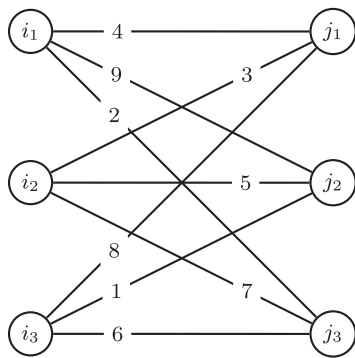


図 3 3 次の魔方陣に対応する完全 2 部グラフ

Fig. 3 Complete bipartite $K_{3,3}$ corresponding to magic square of order three.

一方、辺に着目した magic graph に関して Ringel ら [16] は辺とその両端の頂点のラベルの和が一定であるラベリングを edge-magic と定義した。Enomoto ら [17] は頂点に 1 から v の数を対応させる edge-magic を super edge-magic と定義し、 k 角形が super edge-magic であるのは k が奇数であるときに限ること、 W_k は super edge-magic ではないことなどを示した。Kotzig ら [18] はすべての頂点と辺に 1 から $v + e$ の連続した数字をラベルとして配置し、辺とその両端の頂点のラベルの和が一定であるとき、magic valuation と定義し、完全 2 部グラフ $K_{p,q}$ ($p, q \geq 1$) や k 角形 ($k \geq 3$) が magic valuation であることを示した。Wallis ら [19] は edge-magic total labeling (以降 EMTL と略す) について性質を述べ様々なグラフに対する構成例を述べている。

Magic graph の一般化については Doob [20] は Sedláček の提起した問題を一般化し、頂点に着目した配置問題に関して辺に配置するラベルを整数の代わりにアーベル群の要素とし配置可能性の必要十分条件を検討した。Sandorova ら [21] も同様の枠組みで、辺と頂点への実数値の配置問題に対して特徴付けを行った。Lee [22] は辺に配置した数字に関して頂点での和が頂点の個数による剰余の意味で合同となる弱い条件での magic を定義した。Sugiyama [23] は剰余環 \mathbf{Z}_n の要素の配置問題を用いて定和の代数的構造を検討した。Hartsfield ら [24] は antimagic の概念を提案し、Simanjuntak ら [25] は昇順に並べた辺に対する数字の和が等差数列になる edge-antimagic total labeling (EATL) を提案し、EMTL をその特殊な場合として含むことや多角形 C_k や経路 P_k などの様々なグラフが antimagic なることを示した。図 2 のようにグラフラベリングが同時に edge-magic かつ vertex-magic であるとき、totally magic と定義し Arnold [26] は全数探索で頂点の個数が 11 までのグラフに対して totally magic の探索を行っている。Gallian [27] はグラフラベリングに関する詳細な結果と文献を示している。特に 5 章の Magic-type Labelings, 6 章の Antimagic-type Labelling において様々な定義される magic や antimagic

関連の labeling の研究結果を述べている。

基礎的な概念、性質およびこれまでの研究の歴史を体系的に述べている Mar ら [28] に従って本論文では $D = V \cup E$ から n 個の整数の集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subset \mathbf{Z}$ への式 (2) のグラフラベリングの写像

$$\lambda : D \rightarrow C \tag{2}$$

が双射であり、 λ がグラフの着目する構成要素 (頂点, 辺, 面など) について数字の和が一定になるとき、その和を定和、写像 λ を magic labeling, グラフ G を magic graph と呼ぶ。グラフの辺に着目する場合を edge-magic (EM), 頂点に着目する場合を vertex-magic (VM), グラフの面に着目する場合を face-magic (FM) と呼ぶ。従来の研究では頂点や辺に配置する数字の個数は多くとも 1 個であった。式 (2) の定義域が $D = V$ のとき、写像 λ を vertex labeling (VL), $D = E$ のとき、edge labeling (EL), $D = V \cup E$ のとき、total labeling (TL) と呼ぶ。本論文では edge-magic で定義域はつねに $D = V \cup E$ であるので edge-magic total labeling (EMTL) のグラフラベリング問題となる。

edge-magic は任意の辺 $e_\ell \in E$ ($e_\ell = v_i v_j$) に対して式 (3) で定式化される。

$$\lambda(v_i) + \lambda(e_\ell) + \lambda(v_j) = S \tag{3}$$

式 (2) のラベリング写像の定義では $D = V \cup E$ であり、文献 [13] は辺にのみ数字を配置する問題を扱っているので $D = E$ であり定義域を統一できない。さらに本論文で扱う頂点や辺に複数個の数字を配置する一般化されたグラフラベリング問題を定式化できない。図 A.1 に示すように魔方陣を行 (または列) に分割すると行ごと (または列ごと) の和が一定となる。行をグラフの辺に、行の両端をグラフの頂点に対応させると 4 次以上の魔方陣では辺に 2 個以上の数字を配置していることになる。したがってグラフの辺に複数個の数字を配置するマルチラベルは自然な一般化である。それを扱うことができるラベリング写像 $\bar{\lambda}$ を $D = V \cup E$ から C の部分集合族 2^C への写像として式 (4), 式 (5) で定義する。

$$\bar{\lambda} : D \rightarrow 2^C \tag{4}$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}(z) \cap \bar{\lambda}(z') = \phi & (z, z' \in V \cup E) \\ \bigcup_{z \in V \cup E} \bar{\lambda}(z) = C \end{cases} \tag{5}$$

ここで $\bar{\lambda}(z)$ は頂点 v_i , 辺 e_ℓ に配置する複数個の数字であり C の部分集合である。式 (5) の第 1 式は $\bar{\lambda}$ が同一数字を 1 度だけ用いることを、式 (5) の第 2 式は $\bar{\lambda}$ が C のすべての数字を用いることを表している。 $\bar{\lambda}(v_i)$, $\bar{\lambda}(e_\ell)$ はつねに同一要素数であるとは限定しない。たとえば数字を配置しない場合は $\bar{\lambda}(z) = \phi$ とする。すべての頂点と辺に対して $m_v = |\bar{\lambda}(v_i)|$, $m_e = |\bar{\lambda}(e_\ell)|$ であるとき $[m_v, m_e]$ 齊次

型 $(\lambda_{[m_v, m_e]}$ と表す), そうでない場合, 非斉次型と定義する. この分類を用いると従来の magic graph の研究対象は $[0, 1], [1, 0], [1, 1]$ 斉次型となる.

$C = \{1, 2, \dots, n\}$ で辺 $e_\ell \in E$ ($e_\ell = v_i v_j$) に対して

$$\bar{\lambda}(v_i) + \bar{\lambda}(e_\ell) + \bar{\lambda}(v_j) = S \quad (\ell = 1, 2, \dots, e) \quad (6)$$

であるとき, edge-magic total labeling (EMTL) と定義する. ここで式 (6) の和は各々の部分集合に属する要素の和, すなわち, $A, B \in 2^C$ に対して $A+B = \sum_{a \in A} a + \sum_{b \in B} b$, ただし $A = \phi$ の場合には $\sum_{a \in A} a = 0$ と定義する. 1つの数字だけを配置する写像の場合, $\bar{\lambda}$ は従来のラベリング写像 λ に一致し, 式 (6) は式 (3) と一致する. 以降では $\bar{\lambda}$ を λ と表記することとし, ラベリング写像 λ とその定和との組を (λ, S) で表す.

一般化した magic graph 問題に関して以下の課題が考えられる.

- (1) 定和の計算法, 最大値・最小値の決定
- (2) 最小最大間の定和値を持つ EMTL の可能性
- (3) 任意のグラフに対する EMTL の可能性
- (4) EMTL の構成の手順
- (5) 辺に置く数字の個数に対する漸化的 EMTL
- (6) 1つの EMTL から異なる定和を持つ EMTL の生成
- (7) 全数探索による EMTL 生成 [29], [30]
- (8) 与えられたグラフに対する EMTL の個数決定 [23]

本論文では第 1 の課題については一般のグラフに対する定和方程式 (8) を定式化し, 正則グラフに対する最大・最小定和の計算式 (19), (20) を導く. 第 2 の課題については EMTL 不可能な特異的な定和の例を A.4 章で述べる. 第 3 の課題については任意のグラフが持つ自明な EMTL について述べさらにいくつかのグラフに対して EMTL の実現例を示すとともに定理 1, 定理 2, 定理 4 で EMTL が存在しないグラフを示す. 第 4 の課題については定和方程式を用いて三角形 (C_3), 四角形 (C_4), 正四面体 (W_3), ピラミッド型 (W_4) に対して構成例を示す. 第 5 の課題については定理 5 で漸的に構成する方法を述べる. これより辺に配置する数字の個数 $m_e = 1, 2$ の配置を用いてより大きな m_e に対して構成できることが分かる. 第 6 の課題についてはアフィン変換を用いる方法を述べる. 第 7, 第 8 の課題については稿を改めて述べる.

3. 定和と定和方程式 [10], [11]

グラフ G の頂点 v_i の次数 (頂点に集まる辺の個数) を d_i とすると孤立した頂点を持たないので $d_i \geq 1$ である. 頂点 v_i および辺 e_ℓ に配置する数字集合 $\lambda(v_i), \lambda(e_\ell)$ の総和を $S_V = \sum_{i=1}^v \lambda(v_i), S_E = \sum_{\ell=1}^e \lambda(e_\ell)$ とする. 式 (5) から式 (7) が得られる.

$$S_V + S_E = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (7)$$

定和 S が満たす定和方程式 (8) が導かれる.

性質 1 定和方程式

$$e \cdot S = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i) + \frac{n(n+1)}{2} \quad (8)$$

証明: e 個の辺について式 (6) が成り立つので e 個の定和の総和 $e \cdot S$ は, 辺での総和 S_E と頂点 v_i で次数 d_i 回重複した総和で与えられることになるので式 (9) が成り立つ.

$$\begin{aligned} e \cdot S &= \sum_{i=1}^v d_i \lambda(v_i) + S_E \\ &= \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i) + S_V + S_E \end{aligned} \quad (9)$$

式 (7), 式 (9) から定和方程式 (8) が導かれる.

定和方程式 (8) から定和 S は頂点に配置する数字集合 $\lambda(v_i)$ で決定されることが分かる. 頂点の次数が一定値 $d_i = d$ の正則グラフ (regular graph)^{*4}においてすべての頂点の次数が $d_i = 1$ のときは, 方程式 (8) の右辺の第 1 項が 0 となるので魔方陣に対する定和の計算式 (1) と一致する. A.2 章に示すように魔方陣は次数が 1 の正則グラフの EMTL と見なせる. 式 (8) を用いて文献 [28] の定理 2.1 [16] は n に関する定理 1 に一般化できる. 定理は λ が斉次型であることを仮定しない.

定理 1 EMTL の非存在

グラフ G の辺の個数 e を偶数とし, すべての頂点の次数を奇数とする. $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ であれば G に対して EMTL は存在しない.

証明: e が偶数であるので式 (8) の左辺は偶数である. 一方 d_i はすべて奇数であるので $\lambda(v_i)$ に属する数字の総和によらず右辺の第 1 項は偶数である. $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ であるので $n(n+1) \equiv 2 \pmod{4}$ である. すなわち, $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 1 \pmod{2}$ であるので右辺の第 2 項はつねに奇数である. したがって式 (8) を満たす整数 S は存在しないので EMTL は存在しない.

A.3 章で述べるように定理 1 を用いて図 A.2, 図 A.3 に示す Wheel や正多面体に対して EMTL が存在しないことを導くことができる [31].

以降では斉次 EMTL に限定する. 自明な $[0, 2]$ EMTL について述べる.

性質 2 自明な $[0, 2]$ EMTL の存在

辺の数が e の任意のグラフ G に対して $n = 2e$ で定和 $S = 2e + 1$ の自明な EMTL $\lambda_2^{\text{trivial}} = \lambda_{[0, 2]}$ が存在する.

証明: $\lambda(v_i) = \phi, \lambda(e_\ell) = \{\ell, 2e - \ell + 1\}$ ($\ell = 1, 2, \dots, e$) とすると用いる数字は $n = 2e$ であり, すべての辺 e_ℓ が式 (6) を満たし, 定和 $S = 2e + 1$ である.

λ を $m_v = 1, m_e = m$ の $[1, m]$ 斉次 EMTL とすると使

^{*4} 多角形 (C_k) や正多面体は正則であるが, ピラミッド型 (Wheel W_4) は底辺の頂点の次数が 3 で頂上の頂点の次数は 4 であるので正則ではない.

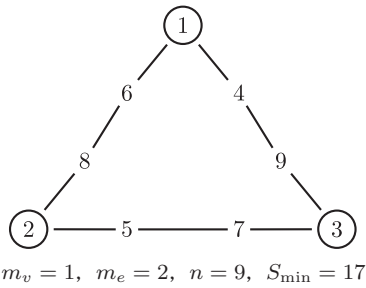


図 4 三角形 (C_3) への [1, 2] EMTL
Fig. 4 [1, 2] EMTL of a triangle (C_3).

用する数字 n は式 (10) で与えられる.

$$n = m_v v + m_e e = v + me \quad (10)$$

$m_v = |\lambda(v_i)| > 1$ については 4.2 節で述べる. 図 4 は三角形 (C_3) の辺に 2 個の数字を配置する [1, 2] EMTL の例である. 辺の上の数字 6, 8 などは文献 [6] の三角形陣の表示法を用いて辺に 2 つの数字を配置することを表している. $m_v = 1, m_e = 2$ であるので式 (10) から $n = 9$ となる. 1 から 9 の数字を頂点に 1 個, 辺に 2 個配置し定和が $S = 17$ である.

式 (8) の右辺の第 1 項を式 (11) で表す.

$$\tilde{S}_V = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i) \quad (11)$$

定和 S と \tilde{S}_V との関係性を述べる.

性質 3 定和の性質

- (1) 定和 S は \tilde{S}_V の値で決定される. \tilde{S}_V の最大・最小 $\tilde{S}_{V,\max}, \tilde{S}_{V,\min}$ に対応する S の最大・最小値を S_{\max}, S_{\min} と表す.
- (2) S_{\max}, S_{\min} および $\tilde{S}_{V,\max}, \tilde{S}_{V,\min}$ の間に以下の関係が成り立つ.

$$e(S_{\max} - S_{\min}) = \tilde{S}_{V,\max} - \tilde{S}_{V,\min} \quad (12)$$

- (3) 頂点 v_i に配置する数字 $\lambda(v_i)$ の総和 S_V の最大値・最小値 $S_{V,\max}, S_{V,\min}$ は式 (13) で, それらの和, 差は式 (14), (15) で与えられる.

$$\begin{cases} S_{V,\max} = nv - \frac{v(v-1)}{2} \\ S_{V,\min} = \frac{v(v+1)}{2} \end{cases} \quad (13)$$

$$S_{V,\max} - S_{V,\min} = mve \quad (14)$$

$$S_{V,\min} + S_{V,\max} = v(n+1) \quad (15)$$

証明: (1) n は定数であるので式 (8) の右辺の第 2 項は定数であり定和 S は \tilde{S}_V の値で決定される. したがって S の最大・最小は \tilde{S}_V の最大・最小 $\tilde{S}_{V,\max}, \tilde{S}_{V,\min}$ で与えられるのでそれらに対応する S を S_{\max}, S_{\min} と表す.

(2) 最大・最小を与える $\tilde{S}_{V,\max}, \tilde{S}_{V,\min}$ との差を求めることで式 (12) が得られる.

(3) 頂点に配置する数字の個数は $m_v = 1$ であるので頂点 v_i に配置する数字 $\lambda(v_i)$ の総和 S_V の最小値は 1 から v を配置する場合であり, その最小値 $S_{V,\min}$ は $\frac{v(v+1)}{2}$ で, S_V の最大値は頂点に $n-v+1$ から n を配置する場合であり, その最大値 $S_{V,\max}$ は $nv - \frac{v(v-1)}{2}$ で与えられる. 式 (14), (15) は式 (13) から得られる.

一般にグラフにおいて頂点の次数 d_i と辺の個数 e について $\sum_{i=1}^v d_i = 2e$ が成り立つ [32]. G が正則グラフの場合には式 (16) が成り立ち, $\tilde{S}_V = (d-1)S_V$ で計算される.

$$d \cdot v = 2e \quad (16)$$

式 (8) から最大・最小定和に関する性質 4 が得られる.

性質 4 正則グラフにおける [1, m] EMTL の最大・最小定和の差

最大・最小定和 S_{\max}, S_{\min} の差は式 (17) で与えられる.

$$S_{\max} - S_{\min} = (d-1)mv \quad (17)$$

証明: $\tilde{S}_V = (d-1)S_V$ および式 (12), 式 (14) から $e \cdot (S_{\max} - S_{\min}) = (d-1)(S_{V,\max} - S_{V,\min}) = (d-1) \cdot mve$ となり, 両辺を e で割って式 (17) を得る.

最小定和 S_{\min} は v 個の頂点に $\{1, 2, \dots, v\}$ を置く場合*5であり, 最大定和 S_{\max} は $\{n, n-1, \dots, n-v+1\}$ を置く場合である. EMTL が存在する定和の最大値・最小値を定和最大値・定和最小値および最大 EMTL・最小 EMTL と呼び, S_{\max}^*, S_{\min}^* および $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ と表す. 定義から $S_{\min} \leq S_{\min}^* \leq S_{\max}^* \leq S_{\max}$ である. 図 2(a) は C_3 の頂点に 1, 2, 3, (b) は 4, 5, 6 を配置し, 各辺に 1 個の数字を置く [1, 1] EMTL であり, 図 2(a) は最小定和 $S_{\min} = S_{\min}^* = 9$, (b) は最大定和 $S_{\max} = S_{\max}^* = 12$ である.

正則グラフの場合は最大・最小定和 S_{\max}, S_{\min} と $S_{V,\max}, S_{V,\min}$ とは式 (18) を満たすことになる.

$$\begin{cases} e \cdot S_{\min} = (d-1)S_{V,\min} + \frac{n(n+1)}{2} \\ e \cdot S_{\max} = (d-1)S_{V,\max} + \frac{n(n+1)}{2} \end{cases} \quad (18)$$

式 (13), 式 (16) を用いて $(d-1)S_{V,\min}$ は以下で求められ, 最小定和 S_{\min} は式 (19) で与えられる.

$$\begin{aligned} (d-1)S_{V,\min} &= (d-1)\frac{v(v+1)}{2} = (2e-v)\frac{(v+1)}{2} \\ S_{\min} &= mv + (v+1) + \frac{1}{2}(m^2e + m) \end{aligned} \quad (19)$$

式 (17) と式 (19) から S_{\max} の式 (20) を得る.

$$S_{\max} = 2me + (v+1) + \frac{1}{2}(m^2e + m) \quad (20)$$

式 (19), 式 (20) から図 2 の C_3 ($m=1$) の定和は最小定和 $S_{\min} = 9$, 最大定和 $S_{\max} = 12$ と計算でき, 表 1 の 4 つの値を持つ可能性が分かる. 同様に図 4 に示した C_3

*5 文献 [17] の super edge-magic に対応している.

表 1 種々のグラフにおける定和の存在範囲

Table 1 Range of magic sums in various graphs.

グラフ	m	定和の候補
三角形 (C_3)	1	9, 10, 11, 12
	2	17, 18, 19, 20, 21, 22, 23
四角形 (C_4)	1	12~15
	2	22~30
Wheel (W_3)	2	26~42
	(W_4)	2

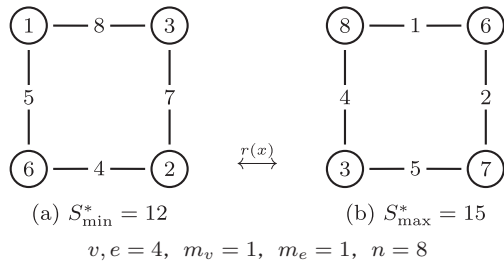


図 5 四角形 (C_4) での $[1, 1]$ EMTL

Fig. 5 $[1, 1]$ EMTLs of a square (C_4).

($m = 2$) の定和が最小であり、定和は表の 7 つの値を持つ可能性が分かる。 $S = 18, 22$ の定和に対応する EMTL が存在しないことを A.4 章に示す。

最大・最小定和を持つ EMTL に関する文献 [17] の一般化である定理 2 が得られる。

定理 2 最大・最小定和を持つ $[1, m]$ EMTL の非存在正則グラフの辺の個数 e を偶数とする。辺に置く数字の個数 m が奇数のとき、最大・最小定和を持つ $[1, m]$ EMTL は存在しない。

証明：辺の個数 e が偶数で辺に置く数字の個数 m が奇数の場合、 $m^2e + m$ は奇数となり、式 (19), (20) で与えられる最小および最大定和が整数とならないので $[1, m]$ EMTL は存在しない。

定理 2 から四角形 C_4 や六角形 C_6 などの k が偶数の C_k に奇数の m の最大・最小定和を持つ $[1, m]$ EMTL は存在しないことが分かる。図 5 に C_4 の $[1, 1]$ EMTL の例を示す。 $v = e = 4, m = 1$ であるので式 (19), (20) から $S_{\min} = 11.5, S_{\max} = 15.5$ であり、 $S_{\min}^* = 12, S_{\max}^* = 15$ である。

4. EMTL の変換と合成

与えられた EMTL から他の EMTL を作り出す方法を述べる。

4.1 アフィン変換と $[1, m]$ EMTL

式 (2) の集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ に対してグラフラベリング写像 $\lambda : D \rightarrow 2^{\{c_1, c_2, \dots, c_n\}}$ と整数係数のアフィン変換 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) との合成 $f \circ \lambda : D \rightarrow 2^{\{f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)\}}$ を以下で定義する。

$$f \circ \lambda(z) = \{f(x) \mid x \in \lambda(z)\} \quad (z \in V \cup E)$$

このとき、 λ が定和 S の edge-magic とし、 $f \circ \lambda$ も edge-magic であり、その定和の値 \tilde{S} は式 (21) で与えられる。

$$\tilde{S} = aS + b(m + 2) \quad (21)$$

したがって特に $C = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $r(x) = -x + n + 1$ ($a = -1, b = n + 1$) とすると $r(1) = n, r(2) = n - 1, \dots, r(n) = 1$ で昇順が降順となるので EMTL λ に対して $r \circ \lambda$ も EMTL となる。 G における 2 つの写像 λ, λ' が $r(x)$ を用いて $\lambda' = r \circ \lambda$ とできるとき、それらの写像 λ, λ' を双対 (dual) [14] と定義し関係式 (22) で表す。

$$(\lambda, S) \iff (\lambda', S') \quad (22)$$

$r \circ r = \text{id}$ (恒等写像) であるので $\lambda' = r \circ \lambda$ と $\lambda = r \circ \lambda'$ とは等価である。

定理 3 $[1, m]$ EMTL における双対定和の性質

双対 $(\lambda, S) \iff (\lambda', S')$ であるとき、以下が成り立つ。

(1) それぞれの定和： $S + S' = (m + 2)(n + 1)$

(2) 対応する頂点： $\lambda(v_i) + \lambda'(v_i) = n + 1$

(3) 頂点での総和： $S_V + S'_V = v(n + 1)$

証明：(1) 2 つの定和の和は式 (21) において $a = -1, b = n + 1$ とすることで得られる。

(2) $|\lambda(v_i)| = 1$ であり $\lambda'(v_i) = r \circ \lambda(v_i) = n + 1 - \lambda(v_i)$ であるので $\lambda(v_i) + \lambda'(v_i) = n + 1$ である。

(3) 各頂点で $\lambda(v_i) + \lambda'(v_i) = n + 1$ であるので頂点での総和 $S_V + S'_V = \sum_i (\lambda(v_i) + \lambda'(v_i)) = v(n + 1)$ である。

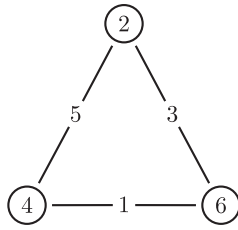
性質 5 最大・最小 $[1, m]$ EMTL の双対性

最大 (最小) EMTL の双対は最小 (最大) EMTL である。

$$S_{\max}^* + S_{\min}^* = (m + 2)(n + 1) \quad (23)$$

$$S_{\max} + S_{\min} = (m + 2)(n + 1) \quad (24)$$

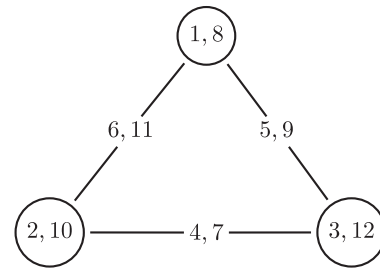
証明：式 (23) が成り立たないとする。 $S_{\max}^* + S_{\min}^* > (m + 2)(n + 1)$ と仮定する。 S_{\max}^* に対応する最大 EMTL λ_{\max} の双対な EMTL およびその定和を λ', S' とすると定理 3 (1) から $S_{\max}^* + S' = (m + 2)(n + 1)$ であるので $S_{\min}^* > S'$ となり、 S_{\min}^* が EMTL で実現できる最小値であることに矛盾である。同様に $S_{\max}^* + S_{\min}^* < (m + 2)(n + 1)$ と仮定しても矛盾を導くことができるので式 (23) が成り立つ。次に最小 EMTL ($\lambda_{\min}, S_{\min}^*$) の双対な EMTL およびその定和を (λ, S) とすると定理 3 (1) から $S_{\min}^* + S = (m + 2)(n + 1)$ が成り立つ。式 (23) から $S_{\max}^* + S_{\min}^* = (m + 2)(n + 1)$ であるので $S = S_{\max}^*$ となる。したがって λ は定和最大値を与える最大 EMTL であることが示された。最大 EMTL の双対が最小 EMTL であることも同様である。最後に式 (24) を示す。頂点の次数を昇順に並べ替えたものを改めて d_i とする。式 (11) は $x_i = \lambda(v_i)$ が $x_i^{(\min)} = v - (i - 1)$ のとき、最小であり、 $x_i^{(\max)} = n - v + i$ のとき、最大となる



$$m_v = 1, m_e = 1, n = 6, S = 11$$

図 6 三角形 (C_3) への $[1, 1]$ EMTL

Fig. 6 $[1, 1]$ EMTL of a triangle (C_3).



$$m_v = 2, m_e = 2, n = 12, S = 38$$

図 7 三角形 (C_3) への $[2, 2]$ EMTL

Fig. 7 $[2, 2]$ EMTL of a triangle (C_3).

ので定和方程式 (8) の両辺を加えて

$$\begin{cases} e \cdot S_{\max} = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)x_i^{(\max)} + \frac{n(n+1)}{2} \\ e \cdot S_{\min} = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)x_i^{(\min)} + \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

$x_i^{(\max)} + x_i^{(\min)} = n + 1$ であるので以下を得る.

$$e(S_{\max} + S_{\min}) = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)(n + 1) + n(n + 1)$$

ここで $\sum_i d_i = 2e$ を用いて変形して式 (24) が得られる.

性質 5 から最大/最小 EMTL の一方が構成できれば他方も構成可能であり, 最大 EMTL・最小 EMTL の構成の存在性は同値となる. 図 2(a) の最小 EMTL (λ_{\min}, S_{\min}) から (b) の最大 EMTL (λ_{\max}, S_{\max}) を変換 $r(x) = 7 - x$ ($n = 6$) で生成できる. 同様に定和 S を持つ配置 λ があればその双対 (λ', S') が必ず存在して $S' = (m+2)(n+1) - S$ を満たす. したがって定和 S ($S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$) を持つ EMTL の存在は定和 S' を持つ EMTL の存在と同値であり, 一方を構成すればよいことになる. 表 1 で示した C_3 ($m = 1$) の定和候補 9, 10, 11, 12 の 9, 12 および 10, 11 は双対な配置から生成できることになる. 定和 $S = 11$ を持つ配置を図 6 に示す. これから C_3 ($m = 1$) に対し定和は $S = 9, 10, 11, 12$ を持つ EMTL がすべて存在することが分かった.

性質 4 では G が正則グラフであることを仮定したが, 定理 3 および性質 5 は正則グラフであることを仮定していない. 式 (24) と式 (17) を用いて S_{\max}, S_{\min} の計算式を式 (19), (20) とは異なる形式で導くことができる.

性質 6 定和 S_{\max}, S_{\min} の計算

$$\begin{cases} S_{\max} = \frac{(m+2)(n+1) + (d-1)mv}{2} \\ S_{\min} = \frac{(m+2)(n+1) - (d-1)mv}{2} \end{cases} \quad (25)$$

一般に $r(x) = n + 1 - x$, $e(x) = x$ 以外のアフィン変換 $f(x) = ax + b$ では値域 $\{1, 2, \dots, n\}$ が変わってしまう. 値域を変えないアフィン変換の実現法として剰余環 \mathbf{Z}_n におけるアフィン変換を用いる方法がある [23].

4.2 頂点に複数個の数字を配置する magic graph

頂点および辺に置く数字の個数を $|\lambda(v_i)| = m_v, |\lambda(e_j)| = m_e$ とする $[m_v, m_e]$ EMTL について述べる. 式 (10) で定義した n は式 (26) で与えられる.

$$n = m_v v + m_e e \quad (26)$$

この EMTL $\lambda_{[m_v, m_e]}$ の定和方程式は式 (8) と同一であり, 定理 1 が成り立つ. グラフ G に対して $n^{(1)} = m_v^{(1)}v + m_e^{(1)}e$ および $n^{(2)} = m_v^{(2)}v + m_e^{(2)}e$ で定和 $S^{(1)}, S^{(2)}$ の 2 つの $[m_v^{(1)}, m_e^{(1)}], [m_v^{(2)}, m_e^{(2)}]$ EMTL $\lambda^{(1)} = \lambda_{[m_v^{(1)}, m_e^{(1)}]}$, $\lambda^{(2)} = \lambda_{[m_v^{(2)}, m_e^{(2)}]}$ を用いて, 一方の $\lambda^{(2)}$ をアフィン変換 $f(x) = x + n^{(1)}$ で変換しもう一方の $\lambda^{(1)}$ で配置する数字と重複しないようにすることで新たな $[m_v, m_e]$ EMTL $\lambda = \lambda_{[m_v, m_e]}$ を式 (27) で構成する.

$$\lambda(z) = \lambda^{(1)}(z) \cup (f \circ \lambda^{(2)})(z) \quad (z \in V \cup E) \quad (27)$$

これを $\lambda = \lambda^{(1)} \oplus \lambda^{(2)}$ と表すことにする. ここで $n = n^{(1)} + n^{(2)}$, $m_v = m_v^{(1)} + m_v^{(2)}$, $m_e = m_e^{(1)} + m_e^{(2)}$ で定和は式 (28) で与えられる.

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + n^{(1)} \cdot (2m_v^{(2)} + m_e^{(2)}) \quad (28)$$

構成法から明らかなように演算 \oplus は非可換, すなわち $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \neq \lambda_2 \oplus \lambda_1$ である. 図 7 に C_3 ($m_v = m_e = 2$) の構成例を示す. 数字 1, 8 は頂点に 2 つの数字を, 数字 6, 11 は辺に 2 つの数字を配置することを示している. これは λ_1 を図 2(a) ($S = 9$), λ_2 を図 6 ($S = 11$) として構成した $\lambda_1 \oplus \lambda_2$ である. 式 (28) に示したように $S = 9 + 11 + 6 \cdot (2 + 1) = 38$ である.

5. EMTL の漸化的構成

魔方陣の構成問題では低次の魔方陣を用いて高次の魔方陣を構成する方法が知られている. 本章では辺に置く数字の個数 m に関する漸化関係を用いた構成法を述べる.

5.1 定和の漸化式とその応用

頂点に配置する数字集合 $\lambda(v_i)$ を変えず辺に置く数字の個数を変化させるときの定和の漸化式を導きそれを用いて EMTL の非存在の性質について述べる.

定理 4 定和漸化式を用いた $[m_v, m_e]$ EMTL の非存在グラフの辺の個数 e を偶数とし、頂点に配置する数字 $\lambda(v_i)$ を変えないとし、辺に配置する数字の個数 m, m' の差 $m - m'$ を奇数とする. m に対して $[m_v, m]$ EMTL が存在すれば、 m' に対しては $[m_v, m']$ EMTL は存在しない. 証明: $m < m'$ ($m' = m + k, k > 0$) としても一般性を失わない. 辺に配置する数字の個数 $m_e = m$ を変数として式 (26) の n を n_m と表し、式 (8) の定和 S を S_m と表すと以下が成り立つ.

$$e \cdot S_m = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i) + \frac{n_m(n_m + 1)}{2}$$

頂点に配置する数字集合 $\lambda(v_i)$ を変えないで辺に置く数字の個数を $m + 1$ にすると漸化式 $n_{m+1} = (m + 1)e + m_v v = n_m + e$ および以下が成り立つ.

$$e \cdot S_{m+1} = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i) + \frac{n_{m+1}(n_{m+1} + 1)}{2}$$

したがって S_m との階差は以下で与えられる.

$$e \cdot (S_{m+1} - S_m) = en_m + \frac{e(e + 1)}{2}$$

両辺を e で割って式 (29) を、さらに式 (30) を得る.

$$S_{m+1} - S_m = n_m + \frac{e + 1}{2} \tag{29}$$

$$S_{m+k} - S_m = n_{m+k-1} + \dots + n_m + k \cdot \frac{e + 1}{2} \tag{30}$$

S_{m+k}, S_m の差は e が偶数で k が奇数のとき、整数にならない. $m, m' = m + k$ に対して $[m_v, m]$ および $[m_v, m']$ EMTL が存在すると仮定すると $S_m, S_{m'}$ はともに整数であり、式 (30) が整数でないことに矛盾である. したがって一方が存在すればもう一方は非存在である.

図 8 に C_4 ($m_v = 1, m_e = 2$) の最小 EMTL の例を示す. 定理 4 から $m_e = 2$ で (最小) EMTL が存在すれば $m_e = 1, 3, 5, \dots$ では存在しないことになり、これは定理 2 と一致する. 一方、図 2(a) および図 4 で頂点に配置する数字を変えずに $m_e = 1, m_e = 2$ で最小 EMTL を構成できるのは辺の数が奇数であるからである.

$m_e = 0$ のとき、 $n_0 = m_v v$ であるので、式 (29) と同様に S_0 との差から式 (31) を得る.

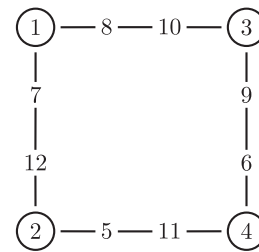
$$e(S_m - S_0) = \frac{1}{2}(m_e^2 e^2 + 2m_v v m_e e + m_e e)$$

$$S_m = S_0 + m_v v m_e + \frac{1}{2}(m_e^2 e + m_e) \tag{31}$$

式 (31) は正則グラフに限定せず任意のグラフに対して成り立つ. $m_e = 0$ のときは式 (9) において辺に配置する数の総和は $S_E = 0$ であり、 S_0 は式 (32) で計算できる.

$$e \cdot S_0 = \sum_{i=1}^v d_i \lambda(v_i) \tag{32}$$

正則グラフ (次数 $d_i = d$) であれば右辺は $d \sum_i \lambda(v_i) =$



$v, e = 4, m_1 = 1, m_e = 2, n = 12, S_{\min} = 22$

図 8 四角形 (C_4) における $[1, 2]$ 最小 EMTL

Fig. 8 $[1, 2]$ minimum magic sum EMTL of a square (C_4).

$d \cdot \frac{m_v v(m_v v + 1)}{2}$ であるので関係式 (16) を用いて $S_0 = m_v(m_v v + 1)$ となる. これより S_m の計算式 (33) が得られる.

$$S_m = m_v(m_v v + 1) + m_v m_e v + \frac{1}{2}(m_e^2 e + m_e) \tag{33}$$

これは $m_v = 1$ とすると式 (19) と同一となり、式 (33) は式 (19) の m_v における一般化となっている.

5.2 EMTL の漸化的構成

辺に m_e 個の数字を配置した EMTL $\lambda_{m_e} = \lambda_{[m_v, m_e]}$ を用いて $m_e + 2$ 個の数字を配置する EMTL $\lambda_{m_e+2} = \lambda_{[m_v, m_e+2]}$ を 4.2 節で述べた EMTL の合成を用いて構成する.

定理 5 $[m_v, m_e]$ EMTL の漸化的構成法

頂点・辺に m_v, m_e 個の数字を配置する $[m_v, m_e]$ EMTL λ_{m_e} を用いて $m_e + 2$ 個の数字を配置する $[m_v, m_e + 2]$ EMTL λ_{m_e+2} を構成できる. λ_{m_e} が最小 EMTL であれば λ_{m_e+2} も最小 EMTL である.

証明: 性質 2 で述べた自明な $[0, 2]$ EMTL $\lambda_2^{\text{trivial}} = \lambda_{[0, 2]}$ を用いて式 (34) で合成により λ_{m_e+2} を構成する.

$$\lambda_{m_e+2} = \lambda_{m_e} \oplus \lambda_2^{\text{trivial}} \tag{34}$$

作成の方法から λ_{m_e} が最小 EMTL であれば λ_{m_e+2} も最小 EMTL となる.

したがって $[m_v, m_e]$ EMTL 構成問題は辺に $m_e = 1$ および $m_e = 2$ 個の数字を配置する $[m_v, 1]$ および $[m_v, 2]$ EMTL 構成問題に帰着できる.

6. むすび

グラフへのラベリング問題である magic graph の一般化について述べ、定和方程式を定式化し、それを用いてある条件を満たすグラフに magic labeling が存在しないことを示した. 多角形や正多面体などの正則グラフに対して最大・最小定和の計算式を導出し、ある条件を満たすグラフに最大・最小定和を持つ magic labeling が存在しないことを示した. さらに変換と合成を述べ magic labeling の双対性、漸化的な構成方法を述べた. 今後は正多面体などの具体的なグラフに対する指定の定和での magic graph の構成方

法, 非正則グラフへの拡張, vertex-magic total labeling への拡張, SAT ソルバーや整数計画ソルバーの magic graph 構成への有効性を検討する.

謝辞 グラフラベリングに関してご教示いただいた林隆史教授 (新潟大学工学部情報工学科), 論文原稿に対して助言をいただいた神保秀司博士 (岡山大学大学院自然科学研究科), 浅井和人上級准教授, 渡邊曜大上級准教授 (会津大学) に感謝します.

参考文献

[1] 坂田千恵美, 杉山雅英: Internet Shiritori using Java, 情報処理学会, 5N-10 (1999).

[2] 赤塚健志, 杉山雅英: 仮名の出現頻度の偏りを用いた「いろは歌」の生成, 情報処理学会, 1Q-6 (2001).

[3] 杉山雅英: ことば遊び「doublet」とグラフ探索問題について, 情報処理学会東北支部第4回研究会, 02-4-B9 (2003).

[4] 内田伏一: 魔方陣, 日本評論社 (2007).

[5] 内田伏一: 魔方陣にみる数のしくみ, 日本評論社 (2004).

[6] 大森清美: 魔方陣の世界, 日本評論社 (2013).

[7] 加納 敏: 数の遊び—魔方陣・図形陣の作り方, 富山房 (1980).

[8] ベレマリノ, 藤川健治訳: 遊びの数学, 社会思想社 (1978).

[9] 佐藤 肇, 一楽重雄: 幾何の魔術, 日本評論社 (2012).

[10] 杉山雅英: グラフへの整数配置問題, 情報処理学会, 3C-2 (2014).

[11] 杉山雅英: グラフへの整数列の定和配置問題, 情報処理学会東北支部研究会, 13-7-A2-4 (2014).

[12] Sedláček, J.: Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163–164 (June 1963).

[13] Stewart, B.M.: Magic Graphs, *Canad. J. Math.*, Vol.18, pp.1031–1059 (1966).

[14] MacDougall, J., Miller, M., Slamin, Wallis, W.D.: Vertex-Magic Total Labelings of Graphs, *Utilitas Math.*, Vol.61, pp.3–21 (2002).

[15] McQuillan, D. and Smith, K.: Vertex-Magic Labeling of Odd Complete Graphs, *Discrete Math.*, Vol.305, pp.240–249 (Nov. 2005).

[16] Ringel, G., and Llado, A.S.: Another Tree Conjecture, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, Vol.17, pp.83–85 (1996).

[17] Enomoto, H., Llado, A.S., Nakamigawa, T. and Ringel, G.: Super Edge-Magic Graphs, *SUT Journal Math.*, Vol.34, No.2, pp.105–109 (1998).

[18] Kotzig, A. and Rosa, A.: Magic Valuations of Finite Graphs, *Canad. Math. Bull.*, Vol.13, pp.451–461 (1970).

[19] Wallis, W.D. Baskoro, E.T. and Miller, M.: Edge-magic total labelings, *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol.22, pp.177–190 (Jan. 2000).

[20] Doob, M.: Generalizations of Magic Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol.17, pp.205–217 (Feb. 1974).

[21] Sandorova, L. and Trenkler, M.: On a Generalization of Magic Graphs, *Proc. 7th Hungary Colloq. Eger/Hung. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, pp.447–452 (1987).

[22] Lee, S.-M., Seah, E. and Tan, S.-K.: On edge-magic graphs, *Congressus Num.*, Vol.86, pp.179–191 (1992).

[23] 杉山雅英: Magic Graph の代数的考察, 情報処理学会, 6A-02 (2015).

[24] Hartsfield, N. and Ringel, G.: *Pearls in Graph Theory*, Academic Press (1990).

[25] Simanjuntak, R., Bertault, F. and Miller, M.: Two New (a, d) -Antimagic Graph Labelings, *Proc. 11th Australia Workshop Combin. Algor.*, pp.179–189 (2000).

[26] Arnold, F.: Totally Magic Graphs, A Complete Search on Small Graphs, *Master Thesis*, Clausthal University of Technology (2012).

[27] Gallian, J.A.: A Dynamic Survey of Graph Labeling, *Electronic J. Combinatorics* (2016).

[28] Marr, A.M. and Wallis, W.D.: *Magic Graphs*, 2nd ed., Birkhäuser/Springer, New York (2013).

[29] 杉山雅英: グラフ探索による Magic Graph の生成, 情報処理学会東北支部研究会, 2014-akita, No.9 (2014).

[30] 杉山雅英: SAT ソルバーを用いた Magic Graph の構成とその応用, 情報処理学会, 3C-03 (2017).

[31] 杉山雅英: 正多面体における Magic Graph の構成, 情報処理学会, 7B-02 (2016).

[32] Bondy, J.A., Murty, U.S.R. 著, 立花俊一, 奈良知恵, 田澤新成訳: *グラフ理論への入門*, 共立出版 (1991).

付 録

A.1 記号表

本論文で使用する記号を表 A.1 に示す.

A.2 魔方陣から得られる EMTL

図 A.1 に図 1 で示した魔方陣から得られる EMTL を示す. 頂点, 辺の個数 $v = 6, e = 3$ であり, 次数 $d = 1$ の正則グラフで, 頂点に $m_v = 1$ 個, 辺に $m_e = 1$ 個の数字を置く $[1, 1]$ EMTL となっている.

A.3 Wheel W_k に対する $[1, m]$ EMTL の非存在の証明

図 A.2, 図 A.3 に示すように Wheel W_k は k 個の頂点と辺を持つ多角形 C_k に, 1つの頂点を加え k 個の頂点とを辺で結んだグラフである. Wheel に関する文献 [28] の系 2.1.1 は一般化して性質 7 とできる.

性質 7 Wheel W_k の $[1, m]$ EMTL の非存在

Wheel W_k は $k \equiv 1(\text{mod. } 4)$ で m が偶数, $k \equiv 3(\text{mod. } 4)$ で m が奇数のとき, EMTL は存在しない.

証明: $v = k + 1, e = 2k$ であり, $n = v + me = k + 1 + 2mk$ である. $k \equiv 1(\text{mod. } 4)$ のときは $n = 2mk + k + 1 \equiv 2m + 2(\text{mod. } 4)$ となる. $m \equiv 0(\text{mod. } 2)$ であるので $m \equiv 0, 2(\text{mod. } 4)$ となり, 上の式より $n \equiv 2(\text{mod. } 4)$

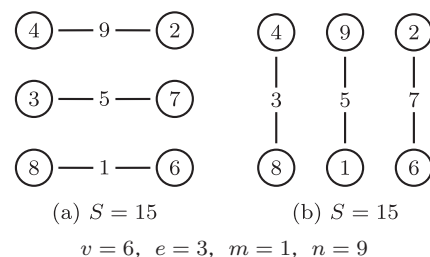


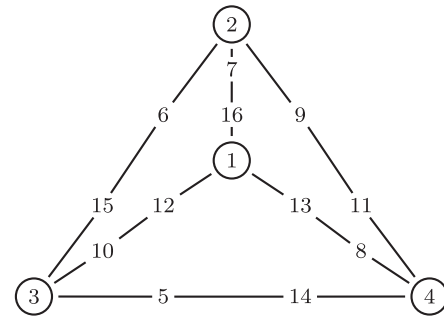
図 A.1 魔方陣から得られる magic graph
Fig. A.1 Magic graphs generated from a magic square.

表 A.1 記号表

Table A.1 List of symbols.

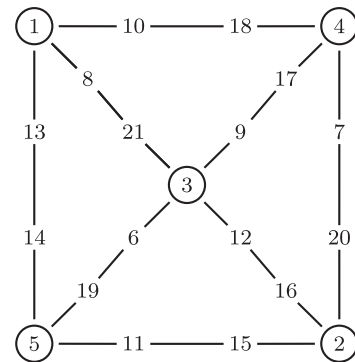
記号	意味
$G, G = (V, E)$	グラフ, 頂点集合 V , 辺集合 E のグラフ
$V = \{v_i\}$	グラフ G の頂点の集合 (v_i は i 番目の頂点)
$E = \{e_\ell\}$	グラフ G の辺の集合
$v = V $	頂点の個数
$e = E $	辺の個数
d_i	頂点 v_i の次数
d	正則グラフの次数 ($d_i = d$)
m_v	頂点に配置する数字の個数
m_e	辺に配置する数字の個数
n	用いる数字の個数 ($n = m_v v + m_e e$)
λ	ラベリング写像 ($\lambda : D \rightarrow C$ または $\lambda : D \rightarrow 2^C$)
D	ラベリング写像の定義域 ($D = V, E, V \cup E$)
$C = \{c_i\}$	ラベルの数字集合 (たとえば $C = \{1, 2, \dots, n\}$)
$[m_v, m_e]$	頂点に m_v 個, 辺に m_e 個の数字を配置すること
$\lambda_{[m_v, m_e]}$	$[m_v, m_e]$ のラベリング写像
S	定和
S_{\max}, S_{\min}	定和 S の最大値, 最小値
S_{\max}^*, S_{\min}^*	実現できる定和 S の最大値, 最小値
S_V	頂点に配置された数字の総和
S_E	辺に配置された数字の総和
\tilde{S}_V	頂点に配置された数字の次数重み付け和
$\tilde{S}_{V, \max}, \tilde{S}_{V, \min}$	\tilde{S}_V の最大値, 最小値
$f(x)$	$ax + b$ ($a \neq 0$) 整数係数のアフィン変換
$r(x)$	$n + 1 - x$ 昇順降順変換のアフィン変換
\oplus	2つのラベル λ_1, λ_2 の合成
VL	Vertex Labeling ($\lambda : V \rightarrow C$)
EL	Edge Labeling ($\lambda : E \rightarrow C$)
TL	Total Labeling ($\lambda : V \cup E \rightarrow C$)
VM	Vertex-Magic
EM	Edge-Magic ($\lambda(v_i) + \lambda(e_\ell) + \lambda(v_j) = \text{一定}$)
FM	Face-Magic
VMTL	Vertex-Magic Total Labeling
EMTL	Edge-Magic Total Labeling
EATL	Edge-Antimagic Total Labeling
P_k	k 点の経路
C_k	k 角形
W_k	k 角形から作られた Wheel
K_k	k 次の完全グラフ
$K_{p,q}$	p, q 完全 2部グラフ

を満たす. 同様に $k \equiv 3 \pmod{4}$ のときは $n = 2mk + k + 1 \equiv 2m \pmod{4}$ となる. $m \equiv 1 \pmod{2}$ であるので $m \equiv 1, 3 \pmod{4}$ となり, 上の式より $n \equiv 2 \pmod{4}$ を満たす. $k \equiv 1 \pmod{4}$ および $k \equiv 3 \pmod{4}$ のときは k は奇数であり, このときはすべての頂点の次数は奇数となる. k によらず e はつねに偶数であるので定理 1 の条件を満たすので EMTL は存在しない.



$v = 4, e = 6, m_v = 1, m_e = 2, n = 16, S_{\min} = 26$

図 A.2 Wheel W_3 (正四面体) の $[1, 2]$ 最小 EMTL
Fig. A.2 $[1, 2]$ minimum magic sum EMTL of Wheel W_3 (a tetrahedron).



$v = 5, e = 8, m_v = 1, m_e = 2, n = 21, S_{\min} = 33$

図 A.3 Wheel W_4 (ピラミッド型) に対する $[1, 2]$ 最小 EMTL
Fig. A.3 $[1, 2]$ minimum magic sum EMTL of Wheel W_4 (a Pyramid).

図 A.3 に示したような k が偶数の場合が今後の課題である.

A.4 三角形における定和 $S = 18, 22$ の $[1, 2]$ EMTL の非存在の証明

三角形 $v = e = 3$ で $m_v = 1, m_e = 2$ とすると $n = 9$ であり, 定理 3 から $S + S' = (2+2)(9+1) = 40$ で $S = 18, 22$ は双対の定和となる. したがって一方の非存在は他方の非存在と同値である.

定和方程式 (8) において $S = 18$ とすると

$$3 \cdot 18 = \sum_{i=1}^3 \lambda(v_i) + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

であり $\sum_{i=1}^3 \lambda(v_i) = 9$ となる. これを満たす $\lambda(v_i)$ の組合せは以下の 3 つのみである.

- (a) : $1 + 2 + 6$, (b) : $1 + 3 + 5$, (c) : $2 + 3 + 4$

(a) の場合には三角形の頂点に 1, 2, 6 を配置するので頂点に 2, 6 を配置した辺に対して $S = 18$ となるためには 3, 7, 頂点に 1, 2 を配置した辺に対して 7, 8 の組合せに限定され, 2つの辺で共通に 7 を必要とするので EMTL 非存在となる. 同様に (b) の場合には頂点に 1, 5 を配置した

辺に対して $S = 18$ となるためには 4, 8, 頂点に 1, 3 を配置した辺に対して $S = 18$ となるためには 6, 8 の組合せに限定され, 2 つの辺で共通に 8 を必要とするので EMTL 非存在となる. (c) の場合には頂点に 3, 4 を配置した辺に対して $S = 18$ となるためには 5, 6, 頂点に 2, 4 を配置した辺に対して $S = 18$ となるためには 5, 7 の組合せに限定され, 2 つの辺で共通に 5 を必要とするので EMTL 非存在となる. したがってすべての組合せに対して EMTL 非存在であることが示されたので $S = 18$ の EMTL は非存在であることが分かった.

定理 3 から $S = 18$ と $S = 22$ は双対であり定和 $S = 18$ を持つ EMTL は非存在であるので $S = 22$ を持つ EMTL も非存在である.



杉山 雅英 (正会員)

1954 年生. 1977 年東北大学理学部数学科卒業. 1979 年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了. 同年日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所(現, NTT 武蔵野研究センター) 入所.

1985 年東北大学より工学博士号を取得. 1986 年米国 AT&T Bell 研究所滞在研究員, 1987 年 NTT 基礎研究所主任研究員, 1990 年 ATR 自動翻訳電話研究所主幹研究員の後, 1993 年から会津大学コンピュータ理工学部ヒューマンインタフェース学講座教授. 現在まで音声特徴キーによる音声検索等の音声認識処理の研究に従事. 日本音響学会, 電子情報通信学会, IEEE 各会員.