2Q-02

確率的な提携構造形成問題の解法

Algorithm for Probabilistic Coalition Structure Generation Problem

松村 昂輝 [1]　沖本 天太 [2]　平山 勝敏 [2]

神戸大学海事科学部 [1]　神戸大学大学院海事科学研究科 [2]

1 序論

提携構造形成 (Coalition Structure Generation, **CSG**) [1, 2] 問題とは，協力ゲーム理論における基本的な枠組みの一つであり，与えられたエージェントの集合を社会的余剰が最大化されるように，いくつかの提携（グループ）に分割する問題である．確率的な提携構造形成 (Probabilistic Coalition Structure Generation, **PCSG**) [3] 問題とは，各エージェントの（任意の）提携への参加の有無が確率により与えられている **CSG** 問題である．文献 [4] では，**CSG** 問題の応用例として，災害地域における救助チームの形成問題を挙げているが，その際，救助チームに参加するメンバーの不確実性を考慮した場合 (例えば，スケジュール等によりチームへの参加の有無が事前には分からない等)，この問題は **PCSG** 問題として定式化可能である．

PCSG 問題では，各提携で得られる利得の期待値計算法が重要となる．既存研究 [3] では，ある提携における利得の期待値を，特性関数によって与えられる提携の利得と，提携が成立する確率の積により定義している．また，提携が成立しない場合，すなわち，誰か一人でも欠席した場合は 0 としている．本論文では，提携における許容可能な欠席者を考慮した **PCSG** 問題を定義する．さらに，本モデルの解法を開発し，評価する．

2 準備

提携構造形成 (Coalition Structure Generation, **CSG**) [1, 2] は，A をエージェントの集合，$v : 2^A \to \mathbb{N}$ を特性関数とし，**CSG** $= \langle A, v\rangle$ により定義される．集合 A の部分集合 $C \subseteq A$ を提携 (Coalition)，A の分割を提携構造 (Coalition Structure, CS) と呼ぶ．各エージェントは一つの提携にのみ属し，複数の提携に同時に属することはない．また各エージェントは単独提携を含み，いずれかの提携に属さなければならない．提携の利得は特性関数により与えられ，提携構造の利得は各提携で得られる利得の総和 $V(CS) = \sum_{C\in CS} v(C)$ により与えられる．

例 1 (**CSG** 問題)**.** 3 人のエージェントからなる提携構造形成 **CSG** $= \langle\{a_1, a_2, a_3\}, v\rangle$ 問題を考える．この問題における提携の数は $2^3 - 1 = 7$ であり，各提携における利得は以下とする．

$$v(\{a_1\}) = 2,\ v(\{a_2\}) = 3,\ v(\{a_3\}) = 2,\ v(\{a_1, a_2\}) = 8,$$
$$v(\{a_1, a_3\}) = 7,\ v(\{a_2, a_3\}) = 9,\ v(\{a_1, a_2, a_3\}) = 10.$$

この問題における最適な提携構造（全ての提携における利得の総和が最大化される提携構造）は，$CS^* = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$ であり，CS^* によって得られる利得は $V(CS^*) = 11$ となる．

確率的な提携構造形成 (Probabilistic Coalition Structure Generation, **PCSG**) [3] は，**PCSG** $= \langle A, v, f\rangle$ により定義される．$f : A \mapsto [0, 1]$ は各エージェントの（任意の）提携への参加率を返す関数を表す．ある提携 C において得られる利得の期待値は，$v(C)$ と提携 C が成立する確率の積 $v_e(C) = v(C) \cdot \prod_{a\in C} f(a)$ により与えられる．ここでは，提携が成立しない場合，すなわち，提携 C のメンバーの内，一人でも欠席した場合，得られる利得は 0 となる．ある提携構造 CS において，得られる利得の期待値は，各提携で得られる利得の期待値の総和 $V_e(CS) = \sum_{C\in CS} v_e(C)$ により与えられる．

3 モデル

本論文では，ある提携 C に対して，既存研究のように，提携が成立しない場合の利得の期待値を 0 とするのではなく，許容可能な欠席者に対して，C で得られる利得の期待値を計算するようなモデルを考える*1．具体的には，**PCSG** に関して，欠席者の集合を $\bar{A} \subseteq A$ $(|\bar{A}| = k)$ とする．このとき，可能な欠席者の組合せは 2^k 通り存在する．任意の k 人以下の欠席者の集合 $\bar{a} \in 2^k$ に関して，ある提携 C から $\bar{a}$ を取り除いた残りの提携は，C から $C \cap \bar{a}$ を取り除いた集合（$C \setminus \bar{a}$ と記述する）で表され，得られる利得は $v(C \setminus \bar{a})$ により与えられるものとする．このとき，C から $\bar{a}$ を取り除いた残りの提携 $C \setminus \bar{a}$ において得られる利得の期待値は，以下の式で与えられるものとする．

$$v_e(C \setminus \bar{a}) = v(C \setminus \bar{a}) \cdot \prod_{a\in C\setminus\bar{a}} f(a) \cdot \prod_{a'\in\bar{a}} (1 - f(a')). \qquad (1)$$

また，提携 C の利得の期待値及び，提携構造 CS の利得の期待値は，以下に示す式 (2) 及び (3) により与えられるものとする．

$$v_e(C) = \sum_{\bar{a}\in 2^{\bar{A}}} v_e(C \setminus \bar{a}). \qquad (2)$$

$$V_e(CS) = \sum_{C\in CS} v_e(C). \qquad (3)$$

ある提携構造 CS に関して，$\forall\ CS' : V_e(CS') \le V_e(CS)$ が成立するとき，CS は最適であるといい，CS^*_e と記述する．

*1 文献 [3] では，紹介した計算法以外に，ある提携構造 CS における，すべての可能な欠席者のシナリオを考慮した計算方法が提案されている．本モデルとの詳細な相違点については紙面の都合上，ここでは割愛する．

例 2 (**PCSG** 問題)**.** 例 *1* の **CSG** 問題において，許容可能な欠席者数を $k = 1$ とし，各エージェントの任意の提携への参加の有無を $f(a_1) = 0.8$, $f(a_2) = 0.5$, $f(a_3) = 0.3$. としたときの **PCSG** 問題を考える．このとき，各提携において得られる利得の期待値は，式 (2) より，以下のように計算される．

$$v_e(\{a_1\}) = 1.6,\ v_e(\{a_2\}) = 1.5,\ v_e(\{a_3\}) = 0.6,$$

$$v_e(\{a_1, a_2\}) = 4.3,\ v_e(\{a_1, a_3\}) = 2.92,\ v_e(\{a_2, a_3\}) = 2.7,$$

$$v_e(\{a_1, a_2, a_3\}) = 5.38.$$

例えば，提携 $\{a_1, a_3\}$ における利得の期待値は，全員が参加したときの利得の期待値 ($v_e(\{a_1, a_3\}) = 7 \cdot (0.8 \cdot 0.3) = 1.68$) 及び，任意の 1 人が欠席したときの利得の期待値 ($v_e(\{a_3\}) + v_e(\{a_1\}) = 2 \cdot (0.2 \cdot 0.3) + 2 \cdot (0.8 \cdot 0.7) = 0.12 + 1.12$) の総和 2.92 となる．この問題における最適な提携構造は $CS_e^* = \{a_1, a_2, a_3\}$ であり，得られる利得の期待値は 5.38 となる．

4　解法と評価

本解法では，**PCSG** 問題を 0-1 整数計画問題として定式化し，最適化ソルバー CPLEX を用いて最適な提携構造を求解する．その際，式 (2) を用いて各提携で得られる利得の期待値を計算する．例えば，例 2 の問題は以下のように定式化される．

$$\begin{aligned} max.\ & 1.6 \cdot a_1 + 1.5 \cdot a_2 + 0.6 \cdot a_3 + 4.3 \cdot a_{12} \\ & + 2.92 \cdot a_{13} + 2.7 \cdot a_{23} + 5.38 \cdot a_{123}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$s.t\ \ a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{123} = 1, \tag{5}$$

$$a_2 + a_{12} + a_{23} + a_{123} = 1, \tag{6}$$

$$a_3 + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 1, \tag{7}$$

$$a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123} \in \{0, 1\}. \tag{8}$$

ここで，$a_1, a_2, ..., a_{123}$ は，すべての可能な提携を表している．例えば，a_1 は単独提携 $\{a_1\}$，a_{123} は全体提携 $\{a_1, a_2, a_3\}$ を表している．各提携は変数として定義され，変数値 0 または 1 のいずれかの値を取る (式 (8))．式 (5)-(7) は提携に関する制約条件を表している．例えば，式 (5) には，エージェント a_1 が $\{a_1\}$，$\{a_1, a_2\}$，$\{a_1, a_3\}$，$\{a_1, a_2, a_3\}$ のいずれか 1 つの提携にのみ属し，複数の提携に同時に属することはできないという制約条件が記述されている．式 (6) は a_2，式 (7) は a_3 に関する制約条件を表している．式 (4) は，得られる利得が最大となるような提携構造を求める目的関数を表している．また係数に関しては，各提携で得られる利得の期待値が与えられている．

実験では，異なるサイズの問題に対して，**PCSG** 及び **CSG** の求解時間を調べた．図 1 に異なる k の値における両問題の救解時間の差，すなわち，**PCSG** 問題における求解時間から **CSG** 問題における求解時間を引いた値を示す．x 軸はエージェント数（問題のサイズ），y 軸は実行時間の平均値を表している．各エージェントの提携への参加の有無（確率 p）はランダムに決定し，各提携で得られる利得の値は [1...1000] の範囲からランダムに選択した．実験結果は 100 インスタンスの平均値を表している．図 1 より，エージェント数が小さいとき ($n = 10$ まで)，**PCSG** と **CSG** の求解時間の差はほとんどみられないが，問題のサイズが大きくなるにつれ，求解時間の差は大きくなった．また，エージェント数が大きい問題では，k の値が増えるにつれ，救解時間の差が大きくなることが分かった．このことは，エージェント数が増えるにつれ，提携の数も指数関数的に増加し，各提携で得られる利得の期待値，すなわち，式 (2) の計算に時間がかかるためであると考える．

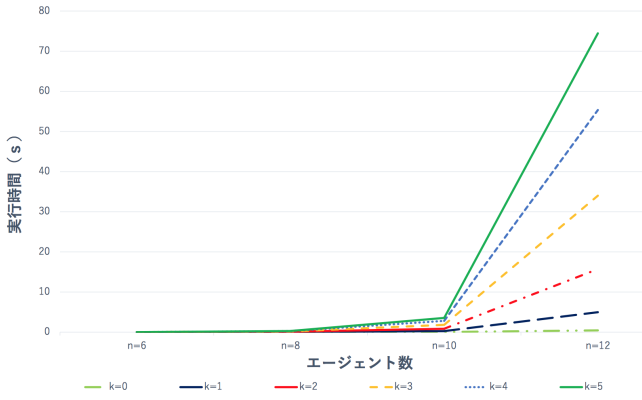

図 1　異なる k における実行時間の平均値．

5　結言

確率的な提携構造形成 (**PCSG**) 問題では，各提携で得られる利得の期待値計算法が重要となる．本論文では，提携における許容可能な欠席者を考慮した新しい利得の期待値計算法を提案し，この期待値計算法を用いた **PCSG** 問題を定義した．また，本モデルを 0-1 整数計画問題として定式化し，異なるサイズの問題における **PCSG** 及び **CSG** の求解時間を調べた．

今後の課題として，実問題への適用，例えば，看護師の勤務グループを考慮したナーススケジューリング問題，レスキューロボット編成，災害派遣医療チーム編成等への適用が挙げられる．

謝辞：本研究の遂行にあたり，高橋産業経済研究財団（整理番号：公財 07-003-105）の研究助成を受けました．ここに深く感謝致します．

参考文献

[1] T. Sandholm, K. Larson, M. Andersson, O. Shehory, and F. Tohmé. Coalition structure generation with worst case guarantees. *Artificial Intelligence*, 111(1-2):209–238, 1999.

[2] T. Sandholm and V. Lesser. Coalitions among computationally bounded agents. *Artificial Intelligence*, 94(1-2):99–137, 1997.

[3] 沖本天太, 平山勝敏, N. Schwind, 井上克巳, and P. Marquis. 確率的な提携構造形成フレームワークの提案. In *FIT*, volume 第 2 分冊, pages 65–70, 2017.

[4] 上田俊, 岩崎敦, 横尾真, M. C. Silaghi, 平山勝敏, and 松井俊浩. 分散制約最適化問題に基づく提携構造形成問題. **人工知能学会論文誌**, 26(1):179–189, 2011.