2Q-01

列生成法と LP ラウンディングによる提携構造形成アルゴリズム *

小浦 隆之 [1†]　平山 勝敏 [2‡]　沖本 天太 [2§]

神戸大学海事科学部 [1]　神戸大学大学院海事科学研究科 [2]

1 はじめに

提携形ゲームは，エージェント集合およびエージェントの可能な部分集合（提携）の利得を計算する特性関数で構成される．提携構造形成問題（Coalition Structure Generation Problem）は，提携形ゲームにおける基本問題の一つであり，社会的余剰が最大となる提携構造（エージェント集合の集合分割）を求める問題である．この問題は NP 困難であることが知られており，汎用かつ効率的な厳密解法の存在は絶望視されている．

一方，従来の提携形ゲームでは，特性関数は，可能な提携を与えれば値を返すブラックボックス関数とされ，それを具体的にどう表記するか明確ではなかった．アルゴリズム的ゲーム理論の分野では，特性関数を簡略表記する基本的な表記法として SCG（Synergy Coalition Group）[1] や MC-nets（Marginal Contribution Networks）[3] 等が提案されており，それらを入力として受理した上で提携形ゲームの計算問題を解くアルゴリズムの研究が進められている．例えば，MC-nets で記述された提携構造形成問題を MaxSAT 問題に変換して解く方法 [4] 等が提案されている．

本論文では，MC-nets で記述された提携構造形成問題を解く新しいアルゴリズムとして，列生成法と LP ラウンディングに基づく近似アルゴリズムを提案し，初期の実験結果を報告する．列生成法とは，潜在的に膨大な数の変数を含む線形計画問題を解く解法であり，変数の部分集合からなる制限された主マスター問題（Restricted Prime Master Problem）および RPM 問題の双対実行可能性を検証する価格問題（Pricing Problem）を順に解き，後者の検証判定が真のときは終了，偽のときは RPM 問題に変数を追加してこれを繰り返す．本提案アルゴリズムでは，提携構造形成問題を 01 整数計画問題として定式化し，それを線形緩和した線形計画問題に対して列生成法を適用する．また，得られた線形計画問題の最適解に対して，素朴なラウンディング処理を適用することにより提携構造形成問題の実行可能解を生成する．

以下，2 節で提携構造形成問題と MC-nets の定義を与え，3 節で提案アルゴリズムの概要を述べる．

2 準備

2.1 提携構造形成問題

提携形ゲームは 2 つ組 (A, v) で記述される．A はすべてのエージェント $\{1, \ldots, n\}$ の集合であり，その部分集合 $S(\subseteq A)$ を**提携**という．また，任意の提携 S に対して，それに属するエージェントは互いに協力関係にあり，協力による相乗効果の結果として利得を得る．その利得を計算する関数 $v : 2^A \to \Re$ を**特性関数**という．

提携の集合 $CS = \{S_1, \ldots, S_m\}$ で特に $S_1, \ldots, S_m$ がエージェント集合 A の分割となるもの，すなわち，$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$ かつ $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \ldots, m\}$ を満たすものを**提携構造**という．**提携構造形成問題**とは，提携形ゲーム (A, v) に対し，要素である提携の特性関数値の総和が最大となるような提携構造を求める問題である．提携構造形成問題は以下の 01 整数計画問題として定式化することができる．

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \sum_{\forall S \subseteq A} v(S) x_S \\ \text{s.t.} & \sum_{S \in \{T \mid i \in T, T \subseteq A\}} x_S = 1,\ \forall i \in A, \\ & x_S \in \{0, 1\},\ \forall S \subseteq A. \end{array} \tag{1}$$

2.2 MC-nets

MC-nets では，提携が満たすべきルールの集合 R により特性関数を表現する．各ルール $r \in R$ は，$(P_r, N_r) \to v_r$ という形式で記述され，P_r は存在すべきエージェントの集合，N_r は存在すべきでないエージェントの集合であり，$P_r \cap N_r = \emptyset$ を満たす．また，$v_r \in \Re$ は，ルール r の条件部が満たされた場合の（正または負の）利得である．ある提携 S について $P_r \subseteq S$ かつ $N_r \cap S = \emptyset$ のとき，ルール r は提携 S に適用可能であるという．任意の提携 S に適用可能なルール全体の集合を R_S とするとき，S の特性関数値は $v(S) = \sum_{r \in R_S} v_r$ で与えられる．

3 提案アルゴリズム

基本アイデアは，MC-nets のルールを入力し，式 (1) で示した 01 整数計画問題を数理計画ソルバーを用いて解くというものである．しかし，式 (1) でエージェント集合 A の冪集合のサイズである 2^n 個の 01 変数を使用するため，エージェント数 n が大きくなると事実上破綻する．そこで，式 (1) を線形緩和して列生成法を適用することにより，まずは最適値の上界を得ることを目指す．

---

* Coalition Structure Generation Algorithm with Column Generation and LP Rounding

† Takayuki Koura, Faculty of Maritime Sciences, Kobe University

‡ Katsutoshi Hirayama, Graduate School of Maritime Sciences, Kobe University

§ Tenda Okimoto, Graduate School of Maritime Sciences, Kobe University

3.1 列生成法

提案する列生成法の手続きは以下の通りである．

Step 1．提携集合 $\mathcal{T}$ に，すべての可能な単独提携を含む任意の提携集合を代入する．

Step 2．次の線形計画問題（RPM 問題）の主最適解 $\hat{x}$，双対最適解 $\hat{y}$，最適値 ub を求める．

$$\begin{array}{ll} \max. & \sum_{\forall S\in\mathcal{T}} v(S)x_S \\ \text{s.t.} & \sum_{S\in\{T|i\in T,T\in\mathcal{T}\}} x_S = 1,\ \forall i\in A, \\ & x_S \geq 0,\ \forall S\in\mathcal{T}. \end{array} \quad (2)$$

Step 3．双対最適解 $\hat{y} = (\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_n)$ を用いて次の整数計画問題（価格問題）を構成し，その最適値 z^* と最適解の一部である $(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$ を求める．なお，R^+ は正の利得をもつルールの集合，R^- は負の利得をもつルールの集合である．

$$\begin{array}{ll} \max. & \sum_{r\in R} v_r\beta_r - \sum_{i\in A}\hat{y}_i\alpha_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i\in P_r}\alpha_i + \sum_{i\in N_r}(1-\alpha_i) \geq |P_r\cup N_r|\beta_r,\ \forall r\in R^+, \\ & \sum_{i\in P_r}(1-\alpha_i) + \sum_{i\in N_r}\alpha_i \geq 1-\beta_r,\ \forall r\in R^-, \\ & \sum_{i\in A}\alpha_i \geq 1, \\ & \alpha_i,\beta_r\in\{0,1\},\ \forall i\in A, \forall r\in R. \end{array} \quad (3)$$

Step 4．$z^* \leq 0$ ならば，最後に求めた主最適解 $\hat{x}$ と最適値 ub を出力して終了する．そうでなければ $(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$ で 1 の値をとるエージェントのみを選択して提携を構成し，提携集合 $\mathcal{T}$ に追加した後，Step 2 に戻る．

3.2 LP ラウンディング

列生成法の手続き Step 4 において，終了した際に出力される主最適解 $\hat{x}$ と最適値 ub は，提携構造形成問題である式 (1) を線形緩和した線形計画問題の最適解と最適値に相当する．従って，一般に，ub は式 (1) の最適値の上界であり，また $\hat{x}$ の各要素 $\hat{x}_S$ は 0 以上 1 以下の任意の値をとり得る．そこで，式 (1) の実行可能解を得るために，$\hat{x}$ の各要素 $\hat{x}_S$ に対して次のようなルールでラウンディング操作を実行する．

Step 1．$\hat{x}_S = 1$ である提携 S をすべて選択し，提携集合 CS とする．

Step 2．$0 < \hat{x}_S < 1$ である提携をすべて選択し，提携集合 $\mathcal{T}'$ とする．

Step 3．$\mathcal{T}'$ が非空である間以下を繰り返す．

1. 提携集合 $\mathcal{T}'$ 内で最も特性関数値が大きい提携 S_{max} を $\mathcal{T}'$ から削除し，提携集合 CS に追加する．
2. 提携 S_{max} に含まれる任意のエージェント i について，i を含むすべての提携を $\mathcal{T}'$ から削除する．

Step 4．提携集合 CS が条件 $\bigcup_{S\in CS} S = A$ を満たすなら，CS とその利得和 lb（式 (1) の最適値の下界）を出力して終了する．満たしていなければ，提携集合 CS に現れないエージェントをそれぞれ単独提携として CS に追加し，CS とその利得和 lb を出力して終了する．

4 おわりに

本論文では，MC-nets で記述された提携構造形成問題を解く新しいアルゴリズムとして，列生成法と LP ラウンディングに基づく近似アルゴリズムを提案した．今後の課題は，評価実験を行うこと，新たなアルゴリズムとして列生成法を部分手続きとする分枝価格法を考案すること等が挙げられる．

参考文献

[1] Conitzer, V., Sandholm, T.: Complexity of constructing solutions in the core based on synergies among coalitions. *Artificial Intelligence* 170, pp. 607–619 (2006)

[2] Hirayama, K., Hanada, K., Ueda, S., Yokoo, M., Iwasaki, A.: Computing a payoff division in the least core for MC-nets coalitional games. *PRIMA-2014*, pp. 319–332 (2014)

[3] Ieong, S., Shoham, Y.: Marginal contribution nets: a compact representation scheme for coalitional games. *EC-2005*, pp. 193–202 (2005)

[4] Liao, X., Koshimura, M., Fujita, H., Hasegawa, R.: Solving the Coalition Structure Generation Problem with MaxSAT. *ICTAI-2012*, pp. 910–915 (2012)