2M-03

# 数独エントロピーを用いた数独ソルバーの高速化

小河 遥† 井本 智明‡ 武藤 伸明††
静岡県立大学経営情報学部

## 1. はじめに

数独は、世界的に有名なパズルである。数独とは、9×9の81マスに1〜9の数字を、紙にペンで書き込んでいく、ペンシルパズルである。各行各列に1〜9の数字が一回ずつ入る。さらに、81 個のマスは、3×3 の 9 つの小ブロックに仕切り、そのブロックの中にも 1〜9 の数字が一度ずつ出現するように埋めるパズルである。

現在、世界でトップクラスの数独ソルバーは、数独の問題を exact cover の問題とみなして、Knuth の Algorithm X [1] を用いて解くものが主流である。このような総当たり探索アルゴリズムにおいては、探索の順序が処理効率に影響することが知られている。

本研究では、探索順序の決定について、数独エントロピー [2] をもっとも減少させるものから探索するという戦略を提案し、その効果について評価実験を行う。

## 2. Exact cover と Algorithm X

Exact cover とは集合$S$と、その部分集合の集合である$S^*$があったとき、$S^*$からいくつか選んで$S$の要素がちょうど一回ずつ現れるようにする問題である。数独は、すべてのマスに数が埋まっている（$r1c1$〜$r9c9$ の 81 個）、$r$ 行目に数 $n$ が入っている、$c$ 列目に数 $n$ が入っている、$b$ ブロックに数 $n$ が入っているという 324 個の状態を満たす問題と考えることができる。この状態の集合を$S$とする。数独のマスへの数の入れ方は、9×9×9 の 729 通りあるが、それぞれは$S$のうち、4 つの状態を充足する。したがって、数独を解くことは 729 通りから、81 個を選んで、ちょうど$S$になるようにせよ、という exact cover の問題とみなすことができる。

Exact cover の問題を効率よく解くアルゴリズムとして、Knuth の Algorithm X [1] があり、これは$S$の要素$x$で、$S^*$の要素で$x$を含むものの個数が最小であるものから探索していく手法である。

Fast Solving Algorithm of Sudoku with Sudoku Entropy
† Haruka Ogawa, University of Shizuoka
‡ Tomoaki Imoto, University of Shizuoka
†† Nobuaki Mutoh, University of Shizuoka

## 3. 提案手法

本研究では、総当たり探索で数独を解く際に、探索順序の決定に、数独エントロピー [2] を用いる手法を提案する。具体的には、あるマスに数を入れたとき、数独エントロピーをもっとも減少させるマスから探索する手法である。

本研究では、対数をとらない下式を数独エントロピーの減少率と定義する。

$$E = \prod_{(r,c)\epsilon V} |U(r,c)|$$

マス$(r',c')$に $n$ を入れたときの数独エントロピーの減少率$d(r',c',n)$を求める。まず、マス$(r',c')$に $n$ を入れる前のマス$(r,c)$に入れることができる数の集合$U(r,c)$を求める。次に、マス$(r',c')$に数 $n$ を入れた後のマス$(r,c)$に入れることができる数の集合は、数 $n$ が入れられなくなるので、$U(r,c) \setminus \{n\}$となる。後者の要素数を前者の要素数で割ったものが、マス$(r,c)$についての数独エントロピーの減少率である。これをすべてのマスについて計算し、積をとる。すなわち、$d(r',c',n)$は下式となる。

$$d(r',c',n) = \prod_{(r,c)\epsilon V} \frac{|U(r,c) \setminus \{n\}|}{|U(r,c)|}$$

さらに、あるマスについて減少率を計算するには、同行同列同ブロックの影響を与えるマス$(r,c) \in W(r',c')$についてだけ減少率を求めれば十分である。また、マス$(r',c')$に入れる数によって減少率は変わるので、平均をとると、下式になる。

$$d(r',c') = \frac{1}{|U(r',c')|} \sum_{n\epsilon U(r',c')} d(r',c',n)$$

しかし、数独エントロピーの減少率を求めるには、入れることができる候補の数それぞれについて、数独エントロピーの減少率を求めなければならないので、計算コストがかかってしまう。

本研究では、数独エントロピーの減少率は、試行錯誤の目安として使うため、必ずしも正確な数独エントロピーの減少率である必要はないと考えられる。あるマスに数を入れたときに、影響を与えるマスに対して、あるマスに入る数の可能性が常に 1 減ると考え、それをそのマスの数独エントロピーの減少率の近似値とする。

入れる数の集合の個数$|U(r,c)|$から 1 ずつ減らし、入れる数の集合の個数$U(r,c)$で割り、影響を与えるマスについて積をとる。これを擬数独エントロピーの減少率$pd(r',c')$とすると下式となる。

$$pd(r',c') = \prod_{(r,c)\epsilon W(r',c')} \frac{|U(r,c)|-1}{|U(r,c)|}$$

## 4. 評価

本研究では、通常の Algorithm X を用いたソルバー、提案手法である数独エントロピーの減少率を導入した Algorithm X によるソルバーと、擬数独エントロピーの減少率を導入した Algorithm X によるソルバーの 3 つを実装した。次に、この 3 つのソルバーを用いて、9×9 の数独の問題、16×16 の巨大数独の問題を、探索回数と実行時間について比較実験を行った。

図 1,2 に 3 つのソルバーについて探索回数と実行時間の比較を示す。図で、既存法は Algorithm X を用いたソルバー、提案法 1 は数独エントロピーの減少率を用いたソルバー、提案法 2 は擬数独エントロピーの減少率を用いたソルバーである。既存法と提案法 1 を比較すると、9×9 の数独の問題（[3]の高難易度問題を使用）では、数独ソルバーの呼び出し回数は 59.5%に削減され、実行時間はほぼ変化がなかった。また、16×16 の巨大数独の問題（自作の問題 10,000 問を使用）では、数独ソルバーの呼び出し回数は 14.2%に減り、実行時間が 24.0%に短縮された。既存法と提案法 2 を比較すると、9×9 の数独の問題では、数独ソルバーの呼び出し回数は 66.8%に減らすことができ、実行時間は 79.2%に短縮された。また、16×16 の数独の問題では、11.8%に減り、実行時間が 14.5%に短縮された。

## 5. おわりに

本研究では、従来の Algorithm X を用いた数独ソルバーに、数独エントロピーの減少率を導入した。従来の Algorithm X を用いた数独ソルバーは十分高速であるが、数独エントロピーの減少率を導入した Algorithm X は、総当たり探索の探索効率が大きく向上し、それに伴い実行時間を短縮することができた。さらに、数独エントロピーの減少率を求める部分について、近似計算を行う擬数独エントロピーの減少率を用いると、実行時間の短縮がみられた。16×16 の巨大数独の問題では、顕著に性能向上がみられた。

数独エントロピーの減少率と、擬数独エントロピーの減少率を比較すると、探索回数の削減に目立った差はなく、計算コストの少ない擬数独エントロピーの減少率を用いた方が、実行時間の短縮に優位であると考えられる。

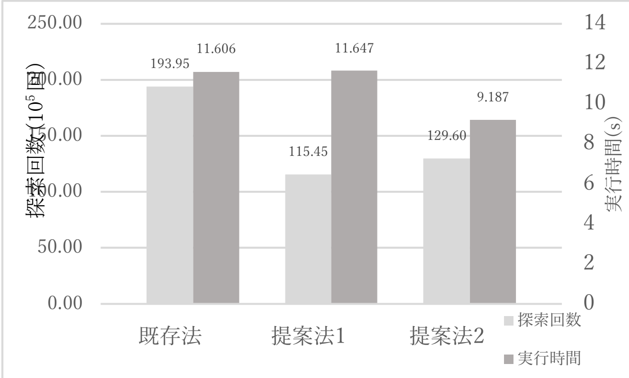


図 1　9×9 の数独での 3 つのソルバーの比較

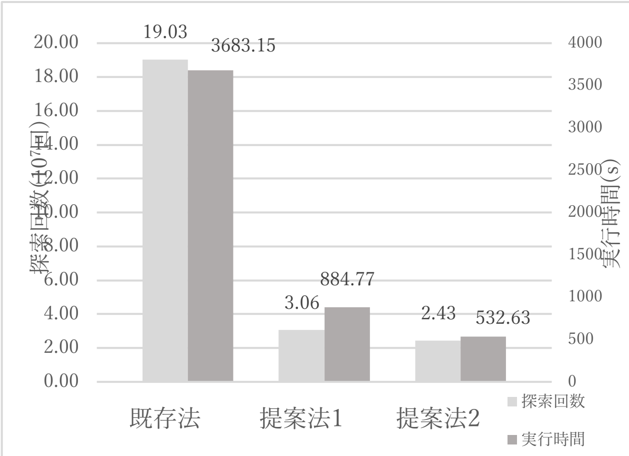


図 2　16×16 の数独での 3 つのソルバーの比較

## 参考文献

[1] Knuth, Donald E. Dancing links. In Davies, Jim; Roscoe, Bill; Woodcock, Jim, Millennial Perspectives in Computer Science: Proceedings of the 1999 Oxford-Microsoft Symposium in Honour of Sir Tony Hoare, Palgrave, pp. 187–214. 2000.
[2] Z. Chen. Heuristic Reasoning on Graph and Game Complexity of Sudoku. arXiv:0903.1659. 2009.
[3] The hardest sudokus (new thread). The New Sudoku Players’ Forum. http://forum.enjoysudoku.com/the-hardest-sudokus-new-thread-t6539.html