3E-02

一対比較の結果を表現する図の提案

水野隆文†
名城大学†

1　はじめに: AHP

AHP (Analytical Hierarchy Process) は，互いに競合しうる複数の代替案を分析し，評価値を数値として提示する意思決定プロセスである．Saaty[1] により提案された．

AHP ではまず，意思決定における階層構造を構築する．この階層構造は，一般に，目標-評価基準の集合-代替案の集合という三層から成る．意思決定において解決すべき目標を T，評価基準の集合を $\{c_1, \cdots, c_n\}$，代替案の集合を $\{a_1, \cdots, a_m\}$ とする．

階層構造が得られた後は，一対比較法により評価基準の重みを算出する．評価基準のペア (c_i, c_j) を取り出し，目標 T の達成にあたり，評価基準 c_i が c_j の何倍重要かを数値 r_{ij} で意思決定者が提示する．r_{ij} は 0 より大きい数値であり，$r_{ij} = 1/r_{ji}$，$r_{ii} = 1$ である．この比較を全てのペアについて行い，r_{ij} を $n \times n$ 行列の i 行 j 列目に配列したものを一対比較行列とよぶ．Saaty が提案した AHP ではこの一対比較行列の正規化された主固有ベクトルの要素を評価基準の重みとして採用する．評価基準の一対比較により作成した一対比較行列を R，この主固有ベクトルを $\boldsymbol{b} = [b_1, \cdots, b_n]^\top$ とすると，つぎの関係がある．

$$R\boldsymbol{b} = \lambda_{\max}\boldsymbol{b} \tag{1}$$

ここで，$\lambda_{\max}$ は行列 R の最大の固有値である．ベクトル $\boldsymbol{b}$ には定数倍の自由度があるが，要素の合計が 1 になるように正規化する ($\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$)．評価基準 c_j の重みは b_j である．

つぎに，各評価基準 c について，すべての代替案のペアの一対比較を行い，目標から見た評価基準の重みを決定したように、評価基準から見た代替案の重みを算出する．評価基準 c_j からみた代替案 a_i の重みを a_{ij} とする．この重みを代替案すべてについてベクトルの形に配列したものを $\boldsymbol{a}_j = [a_{1j}, \cdots, a_{mj}]^\top$ とする．そして，このように作成したベクトルをつぎのように横に並べ行列 A を作成し，これを評価行列とよぶ ($A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$).

代替案 a_i の総合評価値 E_i は，評価行列と評価基準の重みベクトルの乗算として算出される; $\boldsymbol{E} = [E_1, \cdots, E_m]^\top$ とすると，$A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{E}$.

AHP の基本的操作は一対比較であり，これが意思決定の結果を左右する．比較は意思決定者が主観的に行うこともあり，その結果に整合性があるとは限らない．一対比較行列から比較の整合度を測る指標は数多く提案されているが，CI 値がもっともよく利用される．一対比較行列を $R = (r_{ij})$ とし，この行列の最大の固有値を $\lambda_{\max}$ とすると，CI 値は次式で算出される．

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}. \tag{2}$$

行列の各要素 r_{ij} が w_i/w_j と表現されるような w_i，w_j が存在する場合に CI 値は 0 となる．CI 値は算出が容易であるが，個々の比較の整合性を判断できず，例えば，どのペアの比較がおかしいのかを指摘できない．

西澤 [2] は，有向グラフにより一対比較を表現できることを述べ，整合度の改善法を提案した．代替案をノードとし，重要な代替案から重要でない代替案へ有向辺をつなぎ，一対比較行列を表現する．しかし，有向グラフはノードが増えると辺の数も増え，一対比較行と，それをもとに出力される重みとの関係を把握することが困難である．

本研究では，一対比較の結果と，それをもとに導出される重みを可視化するグラフ表現を提案する．

A Link Diagram for Visualization of Pairwise Comparisons
† Takafumi Mizuno, Meijo University

Copyright ©2018 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

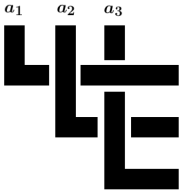

図 1　一対比較の結果を表現する交差.

2　一対比較の可視化

本研究の主なアイデアは，各代替案を，地面の上に浮く輪 (ループ) として表現することである．代替案の重みは，その輪の地面からの高さとする．そして，代替案の優劣を，輪の重なりで表現する．各輪は，自分以外のすべての輪と 2 回交差するように配置する．1 つの交差で一対比較の結果を，もう片方の交差で重みの大小を表現する．

■一対比較行列の表現 (図 1)　つぎの一対比較行列 R を考える．

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

これは，$a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3$ となり，評価の循環が生じている．一対比較行列は，その要素の作り方より逆数対称性があるため，対角要素よりも右上の要素だけを考慮する．$(1,2)$-要素の 1/2 より，a_1 の輪と a_2 の輪が交差する部分は，a_2 を上に配置する．その高さは，a_1 の高さを a_2 の高さの 1/2 倍とする．$(1,3)$-要素の 3 より，a_1 と a_3 が交差する部分は a_1 を上に，$(2,3)$-要素の 1/2 より，a_2 は a_3 が交差する部分は a_3 を上に配置する．

■重みの表現 (図 2)　主固有ベクトル法により重みを算出すると $\boldsymbol{W} = [\sqrt[3]{3/2}, 1, \sqrt[3]{2/3}]^\top$ を正規化したベクトルとなり，$a_1 \succ a_2 \succ a_3$ である．輪の交差の仕方は，a_1 は常に上に，a_2 は a_1 と交差する場合は下，a_3 と交差する場合は上，a_3 は常に下となる．

■比較の整合性の表現　比較の整合性は，輪の凹凸により直感的に確認できる．完全に整合している場合 (行列 $R = (r_{ij})$ の要素が $r_{ij} = w_i/w_j$ と表現できる場合) は，図を横から見ると，輪は地面と平行な線分に見える．評価に循環が生じている場合には，どのように代替案の順番の入れ替えを行っても，分離できない輪のペアがある．

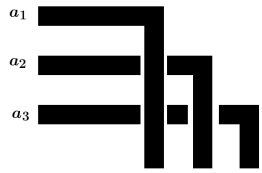

図 2　算出された代替案の重みを表現する交差.

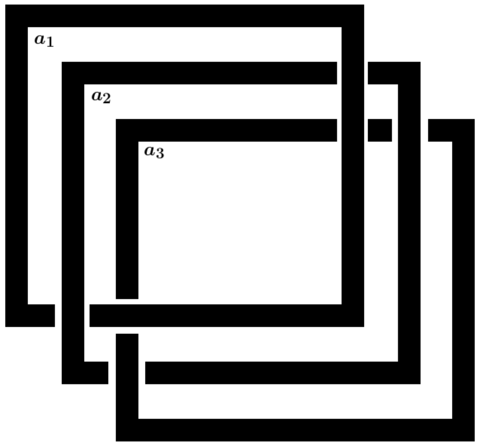

図 3　図を上から地面に向かって見ている.

3　おわりに

本研究では，一対比較の結果，および一対比較から導出した重みを表現する図を提案した．この図は，代替案数と同じ成分数の絡み目であり，その分離可能性により比較の整合性を表現する．現在，一対比較行列を入力とし，3D 空間上にこの図を出力するアプリケーションを開発している．

参考文献

[1] Saaty,T.L.: *The Analytic Hierarchy Process*, MacGraw-Hill, 1980.

[2] Nishizawa, K.: ”A Consistency Improving Method in Binary AHP”, *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.38, No.1, pp.21–33, 1995.

Copyright ©2018 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.