6K-02

k-外平面的グラフの angular resolution について

小島　大輝 †　　宮田　洋行 †　　中野　眞一 ‡

† 群馬大学大学院理工学府

1　はじめに

グラフは道路網や通信網，交友関係等，さまざまなネットワーク構造をモデル化する離散構造であるが，グラフの描画の仕方には大きな任意性があり，より視覚的に理解しやすい描画の研究が盛んにおこなわれている．

例えば，辺の交差の個数が少ない描画や 2 辺のなす最小の角度が大きい描画はより理解しやすいと考えられ，それらの基準でよりよく描画するアルゴリズや理論的限界等に関し，多くの研究がなされている．例えば，平面的グラフは最小角 $\Omega(1/7^d)$ (d：最大次数) の平面直線描画を持つ [3] 一方で，一般には最小角が $O(\sqrt{\log d/d^3})$ より大きくできないことが知られる [2]．一般の平面的グラフについては，上記結果が現在最良の結果であるが，その部分クラスでは，より大きな最小角の平面直線描画が構成されている．例えば，nested-star グラフや直並列グラフと呼ばれるクラスに属するグラフは最小角が $\Omega(1/d^2)$，外平面的グラフは最小角が $\pi/(d-1)$ の平面直線描画を持つことが明らかとなっている [2]. 本研究では，より広いクラスでグラフの最小角を大きくする描画の理解を目指し，外平面的グラフを一般化したグラフクラスである 2-外平面的グラフについて，最小角 $\Omega(1/d^3)$ の平面直線描画を構成する．

2　諸定義

本稿では，平面的グラフを各頂点を平面上の点，各辺を頂点を結ぶ線分として表現することを考える．そのような表現で特に各線分が交差しないものを**平面直線描画**と呼ぶ．以下，グラフの平面直線描画において，共通の点に接続する 2 辺のなす最小の角度をその描画の**最小角 (angular resolution)** と呼び，それをより大きくする描画を考える．その際，以下のような平面的グラフの部分クラスに着目する．グラフの全ての頂点が外面の境界上にあるように平面描画できるグラフを**外平面的グラフ**という．***k*-外平面的グラフ**とは，ある描画において外面上の頂点と接続する辺を除去したグラフが $(k-1)$-外平面的グラフとなるグラフである (ただし，1-外平面的グラフを外平面的グラフと約束する)．

3　2-外平面的グラフの平面直線描画アルゴリズム

本節では以下の定理を紹介する．なお，紙面の都合上，概要のみ記述する．

定理 1 内面が三角形分割された 2-外平面的グラフは最小角 $\Omega(1/d^3)$ (d：最大次数) の平面直線描画を持つ．

一般に，k-外平面的グラフは k-外平面性を保ちながら内面を三角形分割できることがわかっており [1]，三角形分割されていない 2-外平面的グラフについても，三角形分割した後で上記定理を適用し，後で辺を取り除くことにより，上定理の結果を用いることができる．また，2-連結な場合を考えても一般性を失わないため，以後，2-連結性を仮定する．なお，以下の手法は極大外平面的グラフの平面直線描画アルゴリズム [2] を 2-外平面的グラフに拡張したものとなっている．

内面が三角形分割された 2-連結な 2-外平面的グラフ G の (2-外平面的な) 描画を 1 つ固定し，D とする．D における外面上の頂点は 1 つのサイクルの上に存在するが，そのサイクルを弦によって分割し，誘導部分グラフがサイクルとなる状況を考える．分割されたグラフの描画を後で適切に貼り合わればよいため，以後，G を分割された部品のグラフ，その描画を D と置き直す．G を描画 D の面構造を保ちつつ，角度を大きく描画する．

まず，描画 D における外面上の任意の 1 点を選び r とする．そして，r を根とした幅優先探索木を考え，その木における深さの小さい頂点から配置していく (頂点の幅優先探索木内での深さを**レベル**と呼ぶこととする)．この際，以下のような事実が成り立つ．

(a) D において，各レベルの外面上の頂点は高々2 つである．

(b) 各頂点は自分とレベルが 2 以上離れた頂点とは結ばれない．

(c) 任意の頂点は，ある外面上の頂点と接続する．

(d) 描画 D において，レベル i の頂点とレベル $i+1$ の頂点からなるサイクルで定まる領域の内部にはレベル $i+3$ 以上の頂点は存在しない．

レベル 1 の外面上の 2 頂点を r_1, r_1' とする．描画 D のおいて，任意のレベル 1 の頂点は，$\overrightarrow{rr_1}$ と $\overrightarrow{rr_1'}$ で張ら

On angular resolution of k-outerplanar graphs
†Daiki KOJIMA †Hiroyuki MIYATA　Shin-ichi NAKANO‡
†Department of Computer Science, Gunma University

れる錘の中に属する. 新たな描画において，レベル 1 の頂点を配置するにあたり，以下の命題を利用する．

命題 1 G において，r_1 から r_1' へのパスで，全てのレベル 1 の頂点をちょうど通るパス P が存在する．

命題 1 より，各頂点にパス P に沿って番号をつけることができる．レベル 1 の頂点どうしに上記のパス以外の辺がないならば，レベル 1 の頂点をパス P に沿って直線上に配置する．もしそれ以外の辺があった場合，r_1 から r_1' へのより短いパス Q があるため，描画 D において，Q 上の点と r で定まる領域内に Q の両端を結ぶ P の部分パスが描画されているはずである．このような考察の下，以下のようにレベル 1 の頂点を配置する．まず，r_1 から r_2 へのレベル 1 の頂点だけを使った最短路 $r_1 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to r_1'$ を直線上に描画する．次に，r_1 から v_1 への今まで使用していないレベル 1 の頂点のみを使った最短路を r, r_1, v_1 で定まる領域の内部に描画する．v_1 と v_2 等，その他の組についても同様のことを行う．この手順をレベル 1 同士の辺を全て配置できるまで繰り返す．この手順を注意深く進めることによりレベル 1 の頂点とそれらを結ぶ辺によってできるグラフの最小角を $\Omega(1/d^2)$ となるよう描画できる．

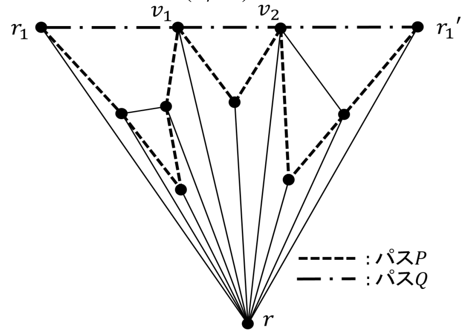

図 1: レベル 1 の頂点までの描画例

次にレベル 2 の頂点を配置していく，その際，レベル 1 までの頂点・辺の描画でできた面のどこに配置するかを描画 D に従って決める．ここで以下の命題を利用する．

命題 2 レベル k の外面上の点を r_k, r_k' とする. r_k, r_k' を結ぶレベル k の点のみを用いたパスが存在する．

r_2, r_2' を結ぶレベル 2 の点のみを用いたパスのうち最も短いパスをレベル 2 における外側を定めるパスとし，直線状に描画する. 各レベル 1 の頂点 r' と r' が接続する面 F を決めるごとに，描画 D において F 内の r' と接続するレベル 2 の頂点を新たにレベル 1 の頂点の場合と同様の手法で配置するという方針が得られる．ただし，レベル 2 の頂点 w がレベル 1 の頂点 r', r'' のように 2 つ以上のレベル 1 の頂点と接続する場合，全てのレベル 1 の頂点についてその手順を独立には進められない．そこで，まず，レベル 2 の頂点のうち，レベル 1 の頂点どうしの共通隣接点を配置する．その後，すでに配置した頂点との辺を描画するとまた新たな面ができるので，各レベル 1 の頂点 r' と現時点で構成された面 F' ごとに上記手順と同様に描画を進める．面 F' を構成する多角形は最小角 $\Omega(1/d^2)$ であり，その中で上記手順と同様のことを行うとレベル 2 までの頂点・辺のみを用いた最小角 $\Omega(1/d^3)$ の描画が得られる．事実 (d) より，r とレベル 1 の頂点を配置したときできた領域内に描画すべき頂点と辺はこの時点で全て描画されたことになる．レベル 3 以降の頂点もレベル 2 の頂点と同様の方針で配置し，辺を描画することにより，G の最小角度 $\Omega(1/d^3)$ の描画が構成される．

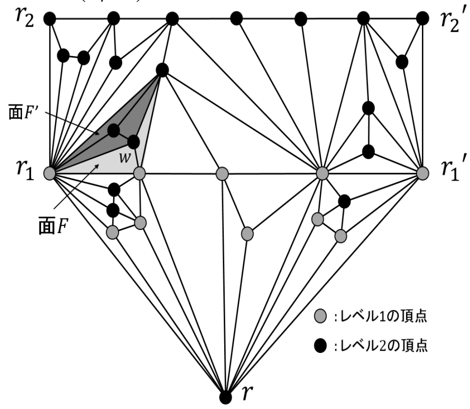

図 2: レベル 2 の頂点までの描画例

4 まとめと今後の課題

本稿では，2-外平面的グラフの最小角が $\Omega(1/d^3)$ であることを紹介した．今後の課題として，今回の結果を拡張して，k-外平面的グラフの描画を与えることが挙げられる．

参考文献

[1] T. Biedl. On triangulating k-outerplanar graphs. Discrete Applied Mathematics, 181, 2015: pp. 275-279.

[2] A. Garg and R. Tamassia, Planar drawings and angular resolution: Algorithms and bounds, Proc. of European Symposium on Algorithms, Springer Berlin Heidelberg, 1994, pp. 12–23.

[3] S. Malitz, On the angular resolution of planar graphs. Proc. of the twenty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, 1992, pp. 527–538.