

一般化 Anti Magic Graph の性質

杉山 雅英 (会津大学)

1. まえがき Sedláček (1963) [1] が magic graph 問題を提起して以来, Wallis 等 (2000) [2] の Edge-Magic Total Labeling (EMTL) や Sugiyama (2014) [3] の一般化 EMTL, Simanjuntak 等 (2000)[4] による (a, d) Edge Antimagic Total Labeling (EATL) などが検討されてきた. 本論文では頂点・辺に複数の数字を配置する一般化 EATL を提案しその性質を述べる [5].

2. Magic/Antimagic Graph グラフ G の頂点 V と辺 E から連続する自然数の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割への写像 $\lambda : V \cup E \rightarrow 2^{\{1,2,\dots,n\}}$ に対して式 (1) の辺 $e_\ell = v_i v_j$ での重み $\lambda^*(e_\ell)$ が全ての辺 $e_\ell \in E$ に対して $\lambda^*(e_\ell) = S^{(\text{magic})}$ を満たす時, EMTL とよび, $S^{(\text{magic})}$ を定和 (magic sum) とよぶ [6].

$$\lambda^*(e_\ell) = \lambda(v_i) + \lambda(e_\ell) + \lambda(v_j) \quad (1)$$

式 (1) の重み $\lambda^*(e_\ell)$ (辺和と略す) の昇順が等差数列 (初項: α , 公差: δ) となる写像 λ を (α, δ) EATL, そのグラフを antimagic graph とよぶ. 頂点・辺に置く数字の個数が各々一定値 m_v, m_e の時, $[m_v, m_e]$ 型とよび, (α, δ) EATL の初項 α , 公差 δ の EATL を $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)}$ と表す. 使用する数字は $n = m_v v + m_e e$ ($v = |V|, e = |E|$) である. $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)}$ の評価式 (2) が得られる.

命題 1 EATL $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)}$ の初項 α , 公差 δ は以下の不等式を満たす. ここで $n' = 2m_v + m_e$ とする.

$$\begin{cases} \alpha \geq \frac{n'(n'+1)}{2} \\ \delta \leq \frac{n'(m_v(v-2) + m_e(e-1))}{e-1} \end{cases} \quad (2)$$

図 1 の EATL $\lambda_{[1,1]}^{(\alpha, \delta)}$ の場合, 式 (2) で得られる初項の下限は $\alpha \geq 6$, 公差の上限は $\delta \leq 4.5$ である.

EATL $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)}$ では辺和方程式 (3) が成り立つ.

命題 2 EATL $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)}$ に対して次数 d_i のグラフ G の頂点 v_i に配置する数字集合 $\lambda(v_i)$ に対して辺和の初項 α , 公差 δ は辺和方程式 (3) を満たす.

$$e \cdot \alpha + \delta \cdot \frac{e(e-1)}{2} = \sum_{i=1}^v (d_i - 1)\lambda(v_i) + \frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

公差 $\delta = 0$ の時, 式 (3) は定和方程式に一致する. 命題 2 から EATL の非存在に関する定理 1 が得られる.

[†] Properties of Generalized Anti Magic Graphs M. Sugiyama (The Univ. of Aizu)

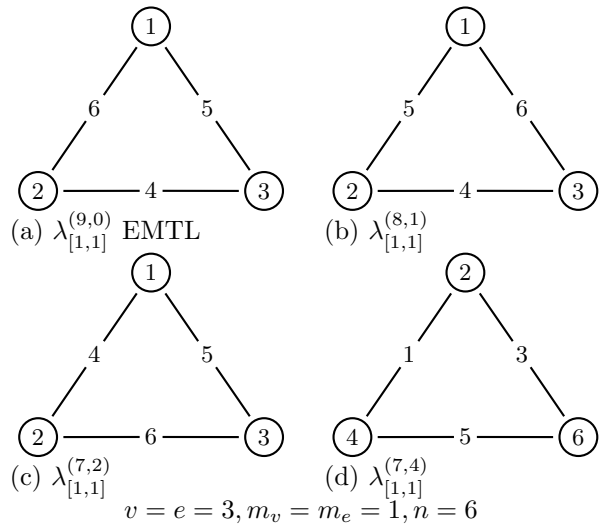


図 1: 三角形 (C_3) に対する EATL $\lambda_{[1,1]}^{(\alpha, \delta)}$ の例

定理 1 辺の数 e を偶数, 全ての頂点の次数 d_i を奇数とする. 以下を満たす時, EATL は存在しない.

- (1) $e \equiv 0 \pmod{4}, n \equiv 2 \pmod{4}$
- (2) $e \equiv 2 \pmod{4}$
 $\delta \equiv 0 \pmod{2}, n \equiv 2 \pmod{4}$
 $\delta \equiv 1 \pmod{2}, n \equiv 0 \pmod{4}$

式 (3) から α の最大・最小は右辺の第 1 項の $\lambda(v_i)$ で決定され, その最大・最小に対応することがわかる. EATL の初項・公差と EMTL の定和との関係式 (4) を示す.

命題 3 グラフ G において同一の $\lambda(v_i)$ に対して EMTL になる場合の定和を $S^{(\text{magic})}$ とすると式 (4) が成り立つ.

$$\alpha + \delta \cdot \frac{e-1}{2} = S^{(\text{magic})} \quad (4)$$

3. EMTL/EATL の合成 EATL $\lambda = \lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)}$ とアフィン変換 $f(x) = ax+b$ との合成 $f \circ \lambda$ を $f \circ \lambda(z) = \{f(x) \mid x \in \lambda(z)\}$ ($z \in V \cup E$) で定義する.

命題 4 EATL $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)}$ の affine 変換 $r(x) = n+1-x$ で EATL $\lambda_{[m_v, m_e]}^{(\hat{\alpha}, \hat{\delta})}$ が得られる.

$$\hat{\alpha} = (n+1)(2m_v + m_e) - (\alpha + \delta(e-1)), \quad \hat{\delta} = \delta \quad (5)$$

写像 $\lambda^{(i)}$ ($n^{(i)} = m_v^{(i)}v + m_e^{(i)}e$, 定和: $S^{(i)}$ ($i = 1, 2$)) の合成 (和) $\lambda = \lambda^{(1)} \oplus \lambda^{(2)}$ を式 (6) で定義する [7].

$$\lambda(z) = \lambda^{(1)}(z) \cup (f_{n^{(1)}} \circ \lambda^{(2)})(z) \quad (z \in V \cup E) \quad (6)$$

ここで $f_{n^{(1)}} = x + n^{(1)}$. 任意のグラフ G に対し以下の free (自由配置可能な) EMTL/EATL が存在する.

- 命題 5 1. EMTL $\lambda_{[2k,0]}^{(\text{magic})}, \lambda_{[0,2\ell]}^{(\text{magic})}$
2. EATL $\lambda_{[0,2\ell+1]}^{(1,1)}$
3. 辺が奇数 $e = 2k + 1$ の時, EATL $\lambda_{[0,2]}^{(3(k+1),1)}$
4. $(2k + 1)$ 角形に対して EATL $\lambda_{[1,0]}^{(k+2,1)}$

和 \oplus は $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ が EMTL の時 EMTL, EMTL と EATL の時 EATL (δ は変化なし) となる. 両者とも EATL の時, 以下の二つの和を定義する. ただし $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ の一方は edge-free とする.

3.1 align 合成 (和) $\lambda^{(1)}$ の昇順辺和 S_i に対して $\lambda^{(2)}$ の辺和を昇順に対応させる. $S_i = \alpha + \delta(i-1), S'_i = \alpha' + \delta'(i-1)$ の合成辺和 \hat{S}_i は $\hat{\alpha} = \alpha + \alpha' + (2m'_v + m'_e)n_1 + (\delta + \delta')(i-1), \hat{\delta} = \delta + \delta'$ の等差数列で $\lambda_{[m_v+m'_v, m_e+m'_e]}^{(\hat{\alpha}, \hat{\delta} + \delta')}$ となる. この合成を $\hat{\lambda} = \lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)} \oplus^{\text{align}} \lambda_{[m'_v, m'_e]}^{(\alpha', \delta')}$ と表す.

3.2 reverse align 合成 (和) $\lambda^{(1)}$ の昇順辺和 S_i に対して $\lambda^{(2)}$ の辺和を降順に対応させる. $S'_i = \alpha' + (e-1)\delta - \delta'(i-1)$ で, 合成辺和 \hat{S}_i は $\hat{\alpha} = \alpha + \alpha' + (2m'_v + m'_e)n_1 + (\delta - \delta')(i-1), \hat{\delta} = \delta - \delta'$ の等差数列で, $\lambda_{[m_v+m'_v, m_e+m'_e]}^{(\hat{\alpha}, \hat{\delta} - \delta')}$ となる. $\delta = \delta'$ の場合 $\hat{\delta} = 0$ 即ち EMTL (magic) となる. この合成を $\hat{\lambda} = \lambda_{[m_v, m_e]}^{(\alpha, \delta)} \oplus^{\text{reverse}} \lambda_{[m'_v, m'_e]}^{(\alpha', \delta')}$ と表す.

図 2-(a), (b) の $\lambda_{[1,0]}^{(3,1)}, \lambda_{[0,1]}^{(1,1)}$ に対し図 2-(c), (d) は合成 $\lambda_{[1,0]}^{(3,1)} \oplus^{\text{align}} \lambda_{[0,1]}^{(1,1)}, \lambda_{[0,1]}^{(1,1)} \oplus^{\text{align}} \lambda_{[1,0]}^{(3,1)}$, 図 2-(e), (f) は合成 $\lambda_{[1,0]}^{(3,1)} \oplus^{\text{reverse}} \lambda_{[0,1]}^{(1,1)}, \lambda_{[0,1]}^{(1,1)} \oplus^{\text{reverse}} \lambda_{[1,0]}^{(3,1)}$ である. 命題 5 と二種類の合成を用いて EMTL/EATL の存在に関する定理 2 が得られる. 定理 2 (4) は Bača (2001)[8] 「 (a, d) EAVL であれば super $(a', d \pm 1)$ EATL である」, (5) は Sugeng(2005) [9] 「 $(a, 1)$ EAVL で辺の数が奇数であれば super $(a', 1)$ EATL である」の一般化である.

定理 2

1. 最大・最小定和 EMTL $\lambda_{[2k,2\ell]}^{(\text{magic})}, \lambda_{[2k,2\ell]}^{(\text{magic})}$
2. 最大及び最小初項の EATL $\lambda_{[2,1]}^{(\alpha_{\max},1)}, \lambda_{[2,1]}^{(\alpha_{\min},1)}$
3. 辺の数が奇数の時, 最大初項及び最小初項を持つ EATL $\lambda_{[2,2]}^{(\alpha_{\max},1)}, \lambda_{[2,2]}^{(\alpha_{\min},1)}$
4. EATL $\lambda_{[m_v,0]}^{(\alpha,\delta)}$ が存在する時, EATL $\lambda_{[m_v,1]}^{(\alpha',\delta \pm 1)}$
5. 辺の数が奇数で EATL $\lambda_{[m_v,m_e]}^{(\alpha,1)}$ が存在する時, EATL $\lambda_{[m_v,m_e+1]}^{(\alpha',1)}$

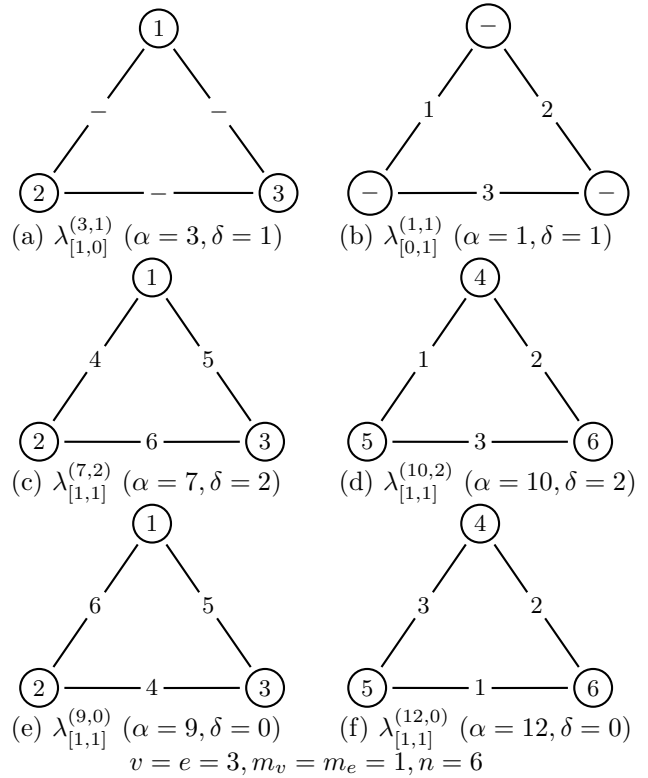


図 2: 三角形 (C_3) に対する EATL 合成の例

4. むすび 本論文では一般化 EATL を提案しその性質を述べた. antimagic graph の二種類の合成を用いて magic/antimagic graph を構成できることを示した.

謝辞 antimagic graph を卒業論文プロジェクトで検討してくれた堀真哲君 (会津大学) に感謝します.

参考文献

- [1] J. Sedláček, Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163-164 (June 1963).
- [2] W. D. Wallis, E. T. Baskoro, M. Miller, Edge-magic total labelings, Australasian Journal of Combinatorics, 22, pp.177-190 (Jan. 2000).
- [3] 杉山, グラフへの整数配置問題, IPSJ, 3C-2 (2014-03).
- [4] R. Simanjuntak, F. Bertault, and M. Miller, Two New (a, d) -Antimagic Graph Labelings, Proc. Eleventh Australia Workshop Combin. Algor., pp.179-189 (2000).
- [5] 杉山, Anti-Magic Graph の構成と性質, IPSJ 東北支部研究会, No.2017-3-9 (2017-12).
- [6] A. M. Marr, W. D. Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhuser/Springer, New York. (2013)
- [7] 杉山, Magic graph の一般化とその性質, IPSJ 論文誌投稿中.
- [8] M. Bača, Y. Lin, M. Miller and R. Simanjuntak, New Construction of Magic and Antimagic Graph Labeling, Util. Math. 60, pp.229-239 (2001).
- [9] K.A. Sugeng, M. Miller, Relationship between Adjacency Matrices and Super (a, d) -Edge Antimagic Total Labelings of Graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput., 55, pp.71-82 (2005).