

複数の局所クロックを持つ 時間プッシュダウン・オートマトン

上里 友弥^{1,a)}

受付日 2017年7月23日, 採録日 2017年9月25日

概要: 本論文では, Abdulla らによって導入された Dense-timed pushdown automata (TPDA) を拡張し, 複数の局所クロックを持つ TPDA を考え, この拡張が言語クラスを拡大しないことを示す. TPDA は, 時間オートマトンとプッシュダウン・オートマトンの両方の性質を持つ計算モデルであり, 従来のプッシュダウン・オートマトンにおけるスタックとは異なり, 時間付きスタック (クロック付きスタック) を考える. 時間付きスタックでは, 各要素が1つのスタック記号と1つのクロック (非負実数値をとる変数) の組からなる. 今回提案する複数の局所クロックを持つ TPDA は, スタックの各要素が1つのスタック記号と複数のクロックからなる拡張といえる. 最近になり, TPDA の言語表現能力は, 時間オートマトンに時間なしスタック (スタックの各要素が1つのスタック記号からなる通常の意味でのスタック) を付け加えたものと合致するということが, Clemente らによって示された. このことは, 言語を保存したままに, TPDA のスタックからクロックをすべて取り去ることができることを意味する. 本論文では, Clemente らによる証明手法を基に, 提案する拡張についても, 言語を保存したままにスタックからクロックをすべて除去できることを証明する.

キーワード: 時間オートマトン, プッシュダウンオートマトン, 空性判定問題

Dense-timed Pushdown Automata with Multiple Local Clocks

YUYA UEZATO^{1,a)}

Received: July 23, 2017, Accepted: September 25, 2017

Abstract: We present a new extension of dense-timed pushdown automata (TPDA) called TPDA with multiple local clocks and show the language classes of TPDA and TPDA with multiple local clocks are the same. Abdulla et al. introduced TPDA as a timed extension of pushdown automata. A TPDA can be seen as a timed automaton with a timed stack in which each element is a pair of one stack symbol and one real-valued clock variable. Our TPDA with multiple local clocks can be seen as a timed automaton with a timed stack in which each element consists of one stack symbol and multiple clock variables. Recently, Clemente and Lasota showed that the language class of TPDA equals to the language class of timed automata with an untimed stack. In other words, they showed that we can remove all the clock variables in the timed stack of a given TPDA while preserving its language. In the present paper, as the untiming result of TPDA, we show that all the clock variables in the timed stack of a given TPDA with multiple local clocks can be removed while preserving its language.

Keywords: timed automata, pushdown automata, emptiness problem

1. 序論

時間オートマトンとプッシュダウン・オートマトンは, ソフトウェアの検証のための重要な計算モデルとして知られている. その理由として, これらの計算モデルでは, モデル

¹ 筑波大学システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻
Department of Computer Science, Graduate School of SIE,
University of Tsukuba, Tsukuba, Ibaraki 305-8573, Japan

^{a)} uezato@logic.cs.tsukuba.ac.jp

検査のために有用な判定問題「到達可能性問題 (reachability problem)」が決定可能であることがあげられる [2], [8], [14].

時間オートマトンとプッシュダウン・オートマトンを組み合わせた計算モデルを考えることは、素朴な発想でありながら理論的に興味深い問題であり、なおかつ、ソフトウェアの検証など現実的な側面からも重要な問題である。初期の時間オートマトンのスタックによる拡張として、Bouajjani らによる Pushdown Timed Automata (PTA) がある [7]。時間オートマトンにおける計算状況は状態 q とクロック集合 \mathcal{X} への非負実数の割当て $\nu: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ の組 $\langle q, \nu \rangle$ である [2]。一方、PTA の計算状況は三つ組 $\langle q, \nu, \lambda \rangle$ で、 $\lambda = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \in \Gamma^*$ であり、時間オートマトンをスタックで拡張したものとなっている (Γ はスタックアルファベット)。この拡張は時間オートマトンとプッシュダウン・オートマトンを単純に組み合わせたもので、到達可能性問題の決定可能性は既知の議論の組合せで容易に証明される [7]。

PTA は時間オートマトンの単純なスタックによる拡張であったが、Abdulla らは、時間オートマトンを「時間付きスタック」で拡張した Dense-timed Pushdown Automata (DTPDA) を提案した [1]。DTPDA の計算状況も三つ組 $\langle q, \nu, w \rangle$ ではあるが、 $w = \langle \gamma_1, k_1 \rangle \dots \langle \gamma_n, k_n \rangle \in (\Gamma \times \mathbb{R}_{\geq 0})^*$ という、スタックシンボルと非負実数の組からなる時間付きスタックで拡張されている。時間オートマトンと PTA では計算中のクロックの個数は $|\mathcal{X}|$ -個で一定であるのに対し、DTPDA では計算中のクロックの個数に上限がないといえる。このような拡張にもかかわらず、DTPDA は到達可能性問題を決定可能とする、興味深い計算モデルである。

Clemente らは、DTPDA を時間オートマトンの理論で広く知られる比較制約 (diagonal constraints) で拡張した比較制約付き DTPDA (これを TPDA と呼ぶ) を導入し、Untiming 定理を示した [12]。Untiming 定理は、与えられた TPDA から、同じ言語を受理するがスタック中にはクロックを 1 つも持たない TPDA (すなわち PTA) が構成可能であることを主張する。これは TPDA の言語クラスと PTA の言語クラスが一致すること $\mathcal{L}(\text{TPDA}) = \mathcal{L}(\text{PTA})$ を示し、系として TPDA の到達可能性問題の決定可能性を導く強力な結果である。

本論文では、TPDA を拡張し、複数の局所クロックを持つ時間プッシュダウン・オートマトン (TPDA with Multiple Local Clocks, MTPDA) を提案し、MTPDA における Untiming 定理を示す。MTPDA の計算状況は三つ組 $\langle q, \nu, \omega \rangle$ で、TPDA と同様に、 q は状態で ν は (大域) クロック集合 \mathcal{X} への値割当てである。ただし $\omega = \langle \gamma_1, \mu_1 \rangle \dots \langle \gamma_n, \mu_n \rangle \in (\Gamma \times (\mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}))^*$ は、スタックシンボルと「局所クロック集合 \mathcal{Z} への値割当て」の組からなるスタックである。局所クロックを 1 つも持たない MTPDA ($\mathcal{Z} = \emptyset$) が Bouajjani らの PTA に対応し、局所

クロックをただ 1 つ持つ MTPDA ($\mathcal{Z} = \{z\}$) が Clemente らの TPDA に対応する。また、MTPDA では、以下 2 つの TPDA にはない操作も考える：

- 局所クロックに対するリセット操作を許し；
- 局所クロックの値はいつでも検査できる。

TPDA では大域クロック集合 \mathcal{X} へのリセット操作を許し、かつ、いつでも値を検査できる一方で、局所クロックに対してはリセット操作が許されず、値の検査も限定的であった (この点については 3.2.1 項で述べる)。すなわち、TPDA では大域クロックと局所クロックでは可能な操作に不自然な差があったが、MTPDA では上記の操作に関する拡張を行うことでこの差を埋めている。MTPDA 版の Untiming 定理が成立し、 $\mathcal{L}(\text{PTA}) = \mathcal{L}(\text{TPDA}) = \mathcal{L}(\text{MTPDA})$ が成立するため、局所クロックに対する操作の拡張も、表現力には影響しないことが分かる。MTPDA 版 Untiming 定理の証明手法は、Clemente らの証明手法 [12] をもとにしているが、これら新たな操作に対応するために、証明の単純化ならびに詳細な分析が必要となる。

論文の構成

2 章で記法の準備を行い、3 章で MTPDA を導入したのち、4 章で MTPDA の言語の例をみる。5-9 章で、MTPDA の Untiming 定理を証明する。まず 5 章で証明の流れを述べ、6 章で MTPDA の標準化 (normalization) を行う。7 章で、Untiming 定理の証明の要となる「予測情報付き MTPDA」を導入し、MTPDA のスタックにおける基本的な性質を分析する。8 章では、局所クロックに対するリセット操作がない MTPDA を扱い、9 章で局所クロックへのリセット操作を許す MTPDA へと議論を一般化する。

10 章で関連研究との比較を行う。10.1 節で特に Abdulla らの DTPDA との比較を行う。Clemente らは、論文 [12] (の Section II) で「TPDA は non-trivial generalization of DTPDA with diagonal constraints である」と述べているが、TPDA と DTPDA には比較制約以外にも違いがある。DTPDA では、区間を用いた (大域) クロックに対する更新 (たとえば $x \leftarrow [0:3]$) が許されていたが、TPDA (および MTPDA) ではクロックに対する更新は 0 値へのリセット ($x \leftarrow [0:0]$) に限定される点で異なる。比較制約と区間による更新の両方を備える体系では、計数機械と呼ばれるチューリング完全な計算モデルが模倣できるという時間オートマトンの結果 [10], [11] がある。Clemente らは、この問題を避けるために 0 値へのリセットに制限したことになるが、結果として DTPDA の言語クラスと TPDA の言語クラスが一致するかどうかは自明ではない。この問題は彼らの論文では扱われなかったが、更新を許す時間オートマトンの議論 [9], [10] を用いることで、DTPDA と TPDA の言語クラスが一致する $\mathcal{L}(\text{DTPDA}) = \mathcal{L}(\text{TPDA})$ ことを確認する。10.2 節では、複数の局所クロックを持つ計算モデルとの比較を行う。

2. 準備

整数全体の集合を \mathbb{Z} と書き、実数全体の集合を \mathbb{R} と書く。特に、 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ により、非負実数全体を表す： $\mathbb{R}_{\geq 0} \triangleq \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ 。

区間

両端に整数を持つ 4 種類の区間 $[a : b]$, $[a : b)$, $(a : b]$, $(a : b)$ (ここで $a, b \in \mathbb{Z}$) は、それぞれ実数の集合を表す。たとえば、 $(a : b]$ は、実数の集合 $\{r \in \mathbb{R} : a \leq r \leq b\}$ を意味する。何も要素を持たない区間 $((3 : 2)$ や $[2 : -8]$ など) もあるので、空集合 \emptyset も区間と認める。両端が整数でない特別な区間として、以下を許す：

$$(a : \omega) = \{b \in \mathbb{R} : a < b\}, \quad (-\omega : a) = \{b \in \mathbb{R} : b < a\}$$

$$[a : \omega) = \{b \in \mathbb{R} : a \leq b\}, \quad (-\omega : a] = \{b \in \mathbb{R} : b \leq a\}.$$

各区間 I について、 $a \in I \iff -a \in J$ を成立させる区間 J がただ 1 つ存在する。そのような区間を $-I$ と書くことにする。

区間 I, J で、任意の $a \in I$ と $b \in J$ について $a < b$ が成立するとき、 $I \prec J$ と書くことにする。たとえば $(-\omega : 2) \prec [2 : 3]$ であるが、 $(-\omega : 2] \not\prec [2 : 3]$ である。 $I = J$ または $I \prec J$ のことを、 $I \preceq J$ で表す。

空でない区間 I について、以下で I_{\downarrow} と I_{\uparrow} を定義する。

$$I_{\downarrow} \triangleq \bigcup_{J \prec I} J, \quad I_{\uparrow} \triangleq \bigcup_{I \prec J} J.$$

このとき、

$$(-\omega : -)_{\downarrow} = (-\omega : -)_{\uparrow} = \emptyset, \quad (-)_{\downarrow} = (-)_{\uparrow} = \emptyset,$$

$$[a : -)_{\downarrow} = [a : -)_{\uparrow} = (-\omega : a), \quad [- : a]_{\downarrow} = [- : a]_{\uparrow} = (a : \omega),$$

$$(a : -)_{\downarrow} = (a : -)_{\uparrow} = (-\omega : a], \quad [- : a)_{\downarrow} = [- : a)_{\uparrow} = (a : \omega),$$

が成立するため、空でない区間 I について I_{\downarrow} および I_{\uparrow} は再び区間になる (空となる区間についても定義は有効で $\emptyset_{\downarrow} = \emptyset_{\uparrow} = \mathbb{R}$ とはなるが、本論文ではこれは必要でない)。

本論文で用いる区間に関する性質は以下のとおりである。

命題 1.

- (1) 区間 I をとる。任意の実数 $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ について、 $r_1 \in I$ かつ $r_3 \in I$ ならば、 $r_2 \in I$ が成立する。
- (2) 空でない区間 I をとる。任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ について、 $r \in I_{\downarrow}$, $r \in I$, または $r \in I_{\uparrow}$ のいずれかちょうど 1 つが成立する。
- (3) 空でない区間 I について、 $I_{\downarrow} \prec I \prec I_{\uparrow}$ が成立する。

クロック付値 (Clock Valuation)

本論文では、 \mathcal{X} や \mathcal{Z} により、クロックの有限集合を表す。クロック集合 \mathcal{X} から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への関数 $\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を、 \mathcal{X} のクロック付値 (clock valuation) や \mathcal{X} への割当てと呼ぶ。 \mathcal{X} のすべてのクロックを 0.0 に写す関数を $\mathbf{0}_{\mathcal{X}}$ と書くことにする。任意の $x \in \mathcal{X}$ について $\mathbf{0}_{\mathcal{X}}(x) = 0.0$ が成立する。 \mathcal{X} が文脈から一意に定まる場合は、単に $\mathbf{0}$ と書く。

互いに素なクロック集合への割当て $\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$) について、貼り合わせで得られる割当て $\nu \oplus \mu : (\mathcal{X} \cup \mathcal{Z}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を次で定義する：

$$(\nu \oplus \mu)(c) \triangleq \begin{cases} \nu(c) & \text{if } c \in \mathcal{X}, \\ \mu(c) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

割当て $\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, クロック $x \in \mathcal{X}$, 非負実数 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について、 $\nu[x := r]$ で、 ν 中の x を r で更新する：

$$(\nu[x := r])(c) \triangleq \begin{cases} r & \text{if } x = c, \\ \nu(c) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

割当て $\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ と、非負実数 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について、 $\nu + \delta$ で、 ν のすべての値を δ だけ増やした割当てを表す：

$$(\nu + \delta)(c) \triangleq \nu(c) + \delta.$$

割当て $\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ と、部分集合 $Y \subseteq \mathcal{X}$ について、 $\nu \upharpoonright Y$ で、 ν の Y への制限 $\nu \upharpoonright Y : Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を表す。

\mathcal{X} への割当て $\nu, \mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ について、任意の $x \in \mathcal{X}$ について $\nu(x) \leq \mu(x)$ が成立するとき、 $\nu \leq \mu$ と書く。

3. Timed Pushdown Automata with Multiple Local Clocks

Clemente らの比較制約付き時間プッシュダウン・オートマトン (Timed Pushdown Automata, TPDA) [12] を拡張する、複数の局所クロックを持つ TPDA (TPDA with Multiple Local Clocks, MTPDA) を導入する。

定義 1 (K -TPDA). K -TPDA \mathcal{A} は八つ組 $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta, q_{\text{init}}, F)$ である。各要素は以下のようになっている：

- Q は有限の状態集合であり、 $q_{\text{init}} \in Q$ は初期状態、 $F \subseteq Q$ は受理状態の集合である。
- Σ は有限の入力アルファベットである。
- Γ は有限のスタックアルファベットである。
- \mathcal{X} は有限のクロック集合である。この集合を大域クロック集合と呼び、 $x \in \mathcal{X}$ を大域クロックと呼ぶ。
- \mathcal{Z} は要素数 K のクロック集合である。この集合を局所クロック集合と呼び、 $z \in \mathcal{Z}$ を局所クロックと呼ぶ。
 - 大域クロック集合と局所クロック集合は、互いに素とする： $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ 。
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Op \times Q$ は遷移規則の有限集合であり、各要素を $p \xrightarrow{\tau} q \in \Delta$ の形で表す。ここで $p, q \in Q$, $\alpha \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $\tau \in Op$ である。 Op は以下の文法で定義される「操作」の集合である：

$$\tau \in Op ::= \text{nop} \mid \text{push}(\gamma) \mid \text{pop}(\gamma) \mid \text{reset}(c)$$

$$\mid c_1 \in? I \mid c_1 - c_2 \in? I.$$

ここで $\gamma \in \Gamma$, $c_1, c_2 \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Z}$, I は非空な区間とする

(すなわち $I \neq \emptyset$).

遷移規則の意味を与えるために、まず計算状況を定義する。

定義 2 (計算状況). K -TPDA の計算状況 (configuration) は三つ組 $c = \langle q, \nu, w \rangle$ で、 q, ν, w はそれぞれ以下のようになっている：

- $q \in Q$ は状態で、
- $\nu: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は大域クロック \mathcal{X} への割当てで、
- $w = \langle \gamma_1, \mu_1 \rangle \dots \langle \gamma_n, \mu_n \rangle \in (\Gamma \times (\mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}))^*$ はスタックシンボルと局所クロック \mathcal{Z} への割当てからなる列 (スタック) である。

本論文では、スタック $w = \langle \gamma_1, \mu_1 \rangle \dots \langle \gamma_n, \mu_n \rangle$ の要素のことを「スタックフレーム」と呼ぶ。スタックは右方向に伸びるため、 $\langle \gamma_n, \mu_n \rangle$ がスタックトップのフレームとなる。 ■

操作に関する場合分けで、 K -TPDA におけるラベル付き遷移関係を定める。

定義 3 (ラベル付き遷移関係). 遷移規則 $p \xrightarrow{\tau} q \in \Delta$ について、 τ の場合分けで、ラベル付き遷移関係 $c_1 \xrightarrow{\tau} c_2$ を定義する。

$$\begin{aligned} \text{nop} &: \langle p, \nu, w \rangle \xrightarrow{\text{nop}} \langle q, \nu, w \rangle, \\ \text{push}(\gamma) &: \langle p, \nu, w \rangle \xrightarrow{\text{push}(\gamma)} \langle q, \nu, w \langle \gamma, \mathbf{0} \rangle \rangle, \\ \text{pop}(\gamma) &: \langle p, \nu, w \langle \gamma, \mu \rangle \rangle \xrightarrow{\text{pop}(\gamma)} \langle q, \nu, w \rangle, \\ \text{reset}(c) &: \frac{c \in \mathcal{X}}{\langle p, \nu, w \rangle \xrightarrow{\text{reset}(c)} \langle q, \nu[c := 0], w \rangle}, \\ \text{reset}(c) &: \frac{c \in \mathcal{Z}}{\langle p, \nu, w \langle \gamma, \mu \rangle \rangle \xrightarrow{\text{reset}(c)} \langle q, \nu, w \langle \gamma, \mu[c := 0] \rangle \rangle}, \\ c \in? I &: \frac{c \in \mathcal{X} \quad \nu(c) \in I}{\langle p, \nu, w \rangle \xrightarrow{c \in? I} \langle q, \nu, w \rangle}, \\ c \in? I &: \frac{c \in \mathcal{Z} \quad \mu(c) \in I}{\langle p, \nu, w \langle \gamma, \mu \rangle \rangle \xrightarrow{c \in? I} \langle q, \nu, w \langle \gamma, \mu \rangle \rangle}, \\ c_1 - c_2 \in? I &: \frac{\{c_1, c_2\} \subseteq \mathcal{X} \quad \nu(c_1) - \nu(c_2) \in I}{\langle p, \nu, w \rangle \xrightarrow{c_1 - c_2 \in? I} \langle q, \nu, w \rangle}, \\ & \quad \{c_1, c_2\} \not\subseteq \mathcal{X} \\ c_1 - c_2 \in? I &: \frac{(\nu \oplus \mu)(c_1) - (\nu \oplus \mu)(c_2) \in I}{\langle p, \nu, w \langle \gamma, \mu \rangle \rangle \xrightarrow{c_1 - c_2 \in? I} \langle q, \nu, w \langle \gamma, \mu \rangle \rangle}. \end{aligned}$$

$c \in? I$ は大域クロックまたは局所クロック c の値が、指定された区間 I にあるかどうかを調べる操作で、この操作を「区間検査」と呼ぶ。一方で、 $c_1 - c_2 \in? I$ は 2 つのクロックの値の差が、指定された区間 I にあるかどうかを調べる操作で、この操作を「比較検査」と呼ぶ。

MTPDA には、遷移規則によって誘導されるラベル付き遷移とは別に、時間の経過によって引き起こされる「時間遷移」 $c \xrightarrow{\delta} c'$ がある。これは c のすべてのクロックの値が δ だけ増えたもので、正確には次で定義される。

定義 4 (時間遷移). 計算状況 c から、非負実数 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 秒経過したことを、 $c \xrightarrow{\delta} c + \delta$ で表す。計算状況 $c + \delta$ は、 $c = \langle q, \nu, w \rangle$ について、 $c + \delta \triangleq \langle q, \nu + \delta, w + \delta \rangle$ で定義される。ここで $w = \langle \gamma_1, \mu_1 \rangle \dots \langle \gamma_n, \mu_n \rangle$ について、 $w + \delta \triangleq \langle \gamma_1, \mu_1 + \delta \rangle \dots \langle \gamma_n, \mu_n + \delta \rangle$ とする。 ■

計算状況 c_1 から、計算状況 c_2 に、何らかのラベル付き遷移関係を用いて移れる $c_1 \xrightarrow{\tau} c_2$ 、または時間遷移によって移れる $c_1 \xrightarrow{\delta} c_2$ とき、単に $c_1 \Rightarrow c_2$ と書くことにする。

3.1 言語の定義

MTPDA における計算列 (computation) は、時間遷移とラベル付き遷移の交互の繰返しである。すなわち、すべての計算列 π は、

$$\pi = c_0 \xrightarrow{\delta_1} c_1 \xrightarrow{a_1} c'_1 \xrightarrow{\delta_2} c_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{\delta_n} c_n \xrightarrow{a_n} c'_n$$

で表される。各計算列 π について、時間付きトレース (timed trace) $\text{tt}(\pi) \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}))^*$ を以下のように定める：

$$\text{tt}(\pi) \triangleq (\delta_1, a_1)(\delta_1 + \delta_2, a_2) \dots \left(\sum_{i=1}^n \delta_i, a_n \right).$$

例として、次の計算列 π_{ex} を考える：

$$\pi_{\text{ex}} = c_0 \xrightarrow{0.8 \sigma_1} c_1 \xrightarrow{0.1 \epsilon} c_2 \xrightarrow{1.1 \sigma_2} c_3 \xrightarrow{0.0 \sigma_3} c_4.$$

この例では、見かけ上の簡潔さのために、いくつかの中間計算状況を省いている。この計算列について、時間付きトレースは $\text{tt}(\pi_{\text{ex}}) = (0.8, \sigma_1)(0.9, \epsilon)(2.0, \sigma_2)(2.0, \sigma_3)$ となる。このトレースの意味は次のようになっている：計算開始から 0.8 秒後に入力 σ_1 を消費する遷移を行い、計算開始から 0.9 秒後に入力を消費せずに遷移し、計算開始から 2.0 秒後に σ_2 を消費する遷移を行い、計算開始から 2.0 秒後に σ_3 を消費する遷移を行った。

計算列 π について、時間付き語 $\text{tw}(\pi) \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Sigma)^*$ を定義する。 $\text{tw}(\pi)$ は、時間付きトレース $\text{tt}(\pi) \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}))^*$ から、 ϵ を含む要素をすべて除去することで得られる列である。たとえば、上の計算列 π_{ex} については、 $\text{tw}(\pi_{\text{ex}}) = (0.8, \sigma_1)(2.0, \sigma_2)(2.0, \sigma_3)$ が成立する。

与えられた MTPDA \mathcal{A} の言語 $L(\mathcal{A})$ は、 \mathcal{A} 上の計算列のうち、初期計算状況 $\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle$ から始まり、受理状態を含む計算状況へ入るもの全体で定義される：

$$L(\mathcal{A}) \triangleq \left\{ \text{tw}(\pi) : \begin{array}{l} \pi = \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \rightsquigarrow \dots \rightarrow \langle q_F, \nu, w \rangle, \\ q_F \in F \end{array} \right\}.$$

また、最終状態かつ空スタックで受理される言語 $L_\epsilon(\mathcal{A})$ を次で定義する：

$$L_\epsilon(\mathcal{A}) \triangleq \left\{ \text{tw}(\pi) : \begin{array}{l} \pi = \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \rightsquigarrow \dots \rightarrow \langle q_F, \nu, \epsilon \rangle, \\ q_F \in F \end{array} \right\}.$$

命題 2. 任意の K -TPDA \mathcal{A} について、次を満たす K -TPDA \mathcal{A}_ϵ が存在する： $L(\mathcal{A}) = L_\epsilon(\mathcal{A}_\epsilon)$.

証明. \mathcal{A}_ϵ は、基本的に \mathcal{A} と同じ動きをするが、 \mathcal{A} の受理状態 $q_f \in F_{\mathcal{A}}$ に入ったら、新たな状態 q_F に $q_f \xrightarrow[\epsilon]{\text{nop}} q_F$ で向かうようにし、 q_F では ϵ 遷移でスタックからシンボルを取り出し続けるようにすればよい。この状態 q_F を \mathcal{A}_ϵ の唯一の受理状態とすれば、 $L(\mathcal{A}) = L_\epsilon(\mathcal{A}_\epsilon)$ が成立する。□

この命題により、この先では、特に断りのない限り、最終状態かつ空スタックで受理する MTPDA を考える。

3.2 スタックの単調減少性

MTPDA は「スタックの単調減少性」という重要な性質を持つ。この性質は、7.3 節で重要な補題 2 を示す際に必要となる。

定義 5 (単調減少なスタック). K -TPDA の計算状況 $c = \langle q, \nu, w \rangle$ 中のスタック $w = \langle \gamma_1, \mu_1 \rangle \langle \gamma_2, \mu_2 \rangle \dots \langle \gamma_n, \mu_n \rangle$ について、 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ が成立するとき、 w を (クロック値) 単調減少なスタックと呼ぶ。■

MTPDA では、push 時に局所クロックに割り当てる値は 0.0 であり、また局所クロックを変更する操作として reset だけが許されているため、到達可能なスタックについてつねに単調性が成立する。

命題 3 (到達可能スタックにおける単調性). 計算状況 $\langle q, \nu, w \rangle$ を、初期計算状況から到達可能なものとする：

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow^* \langle q, \nu, w \rangle.$$

このとき、 w は単調減少なスタックである。

証明. 初期計算状況からの計算の長さに関する帰納法で証明できる。□

3.2.1 1-TPDA と TPDA の言語クラス等価性

Clemente らの TPDA は、局所クロックをただ 1 つ持つという意味では 1-TPDA に近いが、1-TPDA と構文的に一致しているわけではない。TPDA では以下の操作は許されない：

- 局所クロックに対する検査 $z \in ? I$, $z - x \in ? I$
- 局所クロックに対するリセット $\text{reset}(z)$

一方で

- + push 時に局所クロックに指定した区間 I から値を (非決定的に) 割り当てる $\text{push}(\gamma, I)$ ことができ；
- + pop 時に局所クロックを検査 $\text{pop}(\gamma, z \in ? I_1 \wedge z - x_1 \in ? I_2 \wedge x_2 - z \in ? I_3)$ できる

という違いがある [12]。ただしこの違いは

- 与えられた TPDA から、言語等価な TPDA で、

$\text{push}(\gamma, I)$ ならば $I = [0:0]$ を満たすものが構成できるとい標準化についての結果 [12], [13] と

- pop 時の検査は 1-TPDA での区間検査と比較検査で容易に置き換えることができる

という 2 点から問題とはならず、TPDA から言語等価な 1-TPDA を構成することができる。

MTPDA についても、push 時に区間から値をとる拡張を考えることができるが、このときに同様の標準化が可能かどうかは分かっていない。Clemente らの標準化の手法は、TPDA における局所クロックに対する値の検査が pop 時にただ 1 度許されることに強く依存しているため、MTPDA のように途中で値が検査できる場合に同じ手法は適用できない。この問題は論文 [12] 中でも触れられている。Untiming 定理の証明において、スタック中の単調減少性が重要であるため、これを保証するために MTPDA では 0-値での push を採用している。実際、Clemente らによる証明も、スタック中の値の単調減少性に強く依存しており、上記の標準化が鍵となっている。

3.3 構成で用いるいくつかの拡張

次章で MTPDA の言語を考える際や、6 章以降での構成のために、新たに 3 種類の操作を考える。ここで考える操作は、いずれも MTPDA の言語クラスを拡張するものではなく、新たな操作を持つ MTPDA から、言語等価な通常の MTPDA に変形することができる。

区間 I に入っていないことの検査 $c \notin ? I$.

クロック c の値が、区間 I に入っていない場合にのみ遷移する規則 $p \xrightarrow[\alpha]{c \notin ? I} q$ を考える。命題 1 により、 $c \notin I$ と、 $c \in I_1$ または $c \in I_1$ が等価であるから、 $p \xrightarrow[\alpha]{c \notin ? I} q$ を 2 つの遷移規則 $p \xrightarrow[\alpha]{c \in ? I_1} q$ と $p \xrightarrow[\alpha]{c \in ? I_1} q$ で置き換えればよい。

時間経過に対してアトミックな連続操作 $\tau_1 \ ; \ \tau_2$

$p \xrightarrow[\alpha]{\tau_1 \ ; \ \tau_2} q$ は、時間経過を許さずに、2 つの操作 τ_1 と τ_2 を連続で行うための遷移規則である。正確には、この遷移規則は、次の遷移を定める： $c \xrightarrow[\epsilon]{\tau_1 \ ; \ \tau_2} c'$ 。ただし、 $c \xrightarrow[\epsilon]{\tau_1} c'$ かつ、 $c' \xrightarrow[\epsilon]{\tau_2} c''$ とする。

この遷移規則は、新たな状態 r による $p \xrightarrow[\alpha]{\tau_1} r$ と $r \xrightarrow[\epsilon]{\tau_2} q$ の分割だけでは模倣できない。このように分割すると、 $c \xrightarrow[\alpha]{\tau_1} c' \xrightarrow[\delta]{\delta} d \xrightarrow[\epsilon]{\tau_2} d'$ として、時間遷移 $\xrightarrow[\delta]{\delta}$ (特に $\delta \geq 0.0$) が割り込んでしまう。そこで、この δ が必ず $\delta = 0.0$ を満たすことを保証するために、新たな状態 r_1, r_2, r_3 と大域クロック y を準備し、以下の遷移規則群で置き換える：

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{reset}(y)} r_1, r_1 \xrightarrow[\epsilon]{\tau_1} r_2, r_2 \xrightarrow[\epsilon]{\tau_2} r_3, r_3 \xrightarrow[\epsilon]{y \in [0:0]} q.$$

一般化された $p \xrightarrow[\alpha]{\tau_1 \ ; \ \tau_2 \ ; \ \dots \ ; \ \tau_n} q$ も用いるが、その意味は $\tau_1 \ ; \ \tau_2$ の場合と同様に定義され、取り除き方も同じである。

スタックに対する検査 $\text{check}(\epsilon)$, $\text{check}(\gamma)$, $\text{rew}(\gamma')$

スタックに対する以下3種類の命令を加える:

- 現在のスタックが空であるかどうかを調べる $\text{check}(\epsilon)$: $\langle p, \nu, \epsilon \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\epsilon)} \langle q, \nu, \epsilon \rangle$.
- 現在のスタックトップシンボルが γ であるかどうかを調べる $\text{check}(\gamma)$: $\langle p, \nu, w(\gamma, \mu) \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma)} \langle q, \nu, w(\gamma, \mu) \rangle$.
- 現在のスタックトップシンボルを γ' に書き換える $\text{rew}(\gamma')$: $\langle p, \nu, w(\gamma, \mu) \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{rew}(\gamma')} \langle q, \nu, w(\gamma', \mu) \rangle$.

スタックトップシンボルだけを状態側に持つようにすれば、これらの命令を持つ MTPDA を通常の MTPDA で模倣することができる。

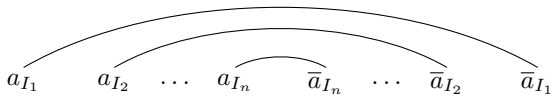
4. MTPDA の言語の例

4.1 1-TPDA の言語の例

区間の有限集合 \mathcal{I} を1つ固定する。各区間を記号と思うことにすると、 \mathcal{I} の要素を添え字に持つ、以下の文脈自由言語を考えることができる:

$$L = \{a_{I_1} a_{I_2} \dots a_{I_n} \bar{a}_{I_2} \dots \bar{a}_{I_n} \bar{a}_{I_1} : I_i \in \mathcal{I}\}.$$

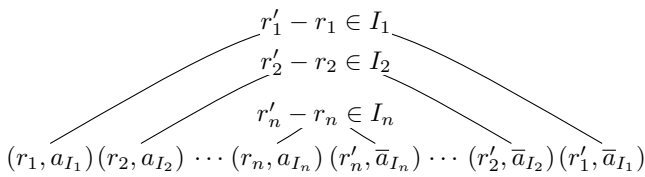
L の語には、次で図示される対応 (釣り合い) があると思うことができる:



これらの対応する a_{I_i} と \bar{a}_{I_i} について、 a_{I_i} が現れてから対応する \bar{a}_{I_i} が現れるまでの経過時間 δ が、 $\delta \in I_i$ を満たすような時間付き語だけからなる言語は、次で定義できる:

$$L_{\text{ex}_1} \triangleq \left\{ (r_1, a_{I_1}) \dots (r_n, a_{I_n}) (r'_n, \bar{a}_{I_n}) \dots (r'_1, \bar{a}_{I_1}) : I_i \in \mathcal{I}, r'_i - r_i \in I_i \right\}.$$

この言語の時間付き語の対応関係は次で図示できる:

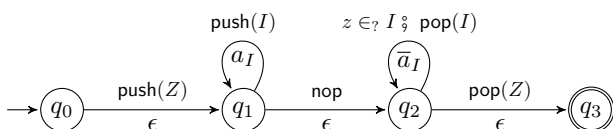


たとえば、次の時間付き語は言語 L_{ex_1} に含まれる:

$$(0.3, a_{[2:3]})(0.8, a_{(0:1)})(1.7, \bar{a}_{(0:1)})(2.4, \bar{a}_{[2:3]}) \in L_{\text{ex}_1}.$$

$2.4 - 0.3 \in [2:3]$ と $1.7 - 0.8 \in (0:1)$ が成立する。

この言語 L_{ex_1} は、スタックアルファベットが $\{Z\} \cup \mathcal{I}$ で、局所クロックを z とし、以下で定義される遷移規則を持つ 1-TPDA で受理できる:

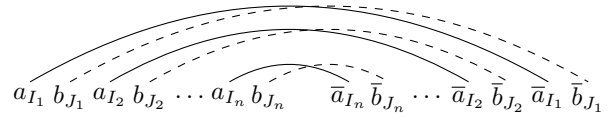


この図では、 $q_1 \xrightarrow[\alpha]{\text{push}(I)} q_1$ と $q_2 \xrightarrow[\bar{\alpha}]{z \in ? I \ ; \ \text{pop}(a_I)} q_2$ を1つずつしか書いていないが、実際には \mathcal{I} のすべての要素だけ遷移を定める必要がある。

4.2 2-TPDA の言語の例

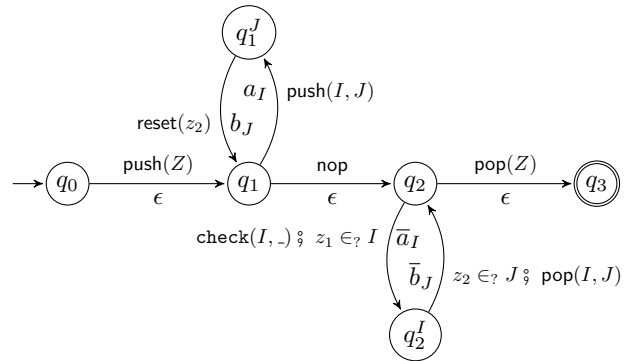
上でみた 1-TPDA の言語の例 L_{ex_1} を拡張して、以下で言語 L_{ex_2} を考える。再び、 \mathcal{I} を区間の有限集合とする。

$$L_{\text{ex}_2} \triangleq \left\{ (r_1, a_{I_1})(r'_1, b_{J_1}) \dots (r_n, a_{I_n})(r'_n, b_{J_n}) (\bar{r}_n, \bar{a}_{I_n})(\bar{r}'_n, \bar{b}_{J_n}) \dots (\bar{r}_1, \bar{a}_{I_1})(\bar{r}'_1, \bar{b}_{J_1}) : I_i \in \mathcal{I}, J_i \in \mathcal{I}, \bar{r}_i - r_i \in I_i, \bar{r}'_i - r'_i \in J_i \right\}.$$



この言語を受理するために、2つの局所クロック z_1, z_2 を使い、それぞれで a_{I_i} と b_{J_i} が現れてからの経過時間を表すようにする。 a_{I_i} を読んだ時点で新しく要素を push し、次に b_{J_i} を読んだ時点で $\text{reset}(z_2)$ を行うことでこれを達成できる。スタックの1フレーム中に、2つの値を覚える必要があるため、これは 1-TPDA よりも 2-TPDA で自然に扱える言語であるといえる。

言語 L_{ex_2} を受理する 2つの局所クロック z_1, z_2 を持つ 2-TPDA を以下で定める。スタックシンボルは Z と $(I, J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ で、局所クロックは z_1, z_2 の2つである。



a_I を読んだ際に、 J について非決定的に $\text{push}(I, J)$ を行い (実際には $\text{push}((I, J))$ であるが、曖昧でない場合は、以降でも組を push したり pop する際には、単に $\text{push}(I, J)$ と書く)、次に予想した J を持つ b_J が来たら遷移を続ける。このときに、 b_J が現れてからの経過時間を覚えるために $\text{reset}(z_2)$ を行う。一方で \bar{a}_I を読んだ際には、現在のスタックトップフレームの第1要素が I であることを確かめたいので、経過時間が制約どおりであるかどうかを $z_1 \in ? I$ で調べる。図では、第1要素の確認を $\text{check}(I, -)$ と省略して書いているが、実際には \mathcal{I} の各要素 J について $\text{check}(I, J)$ を定める必要がある。 \bar{b}_J を読んだら、 $z_2 \in ? J$ で制約を満たしていることを調べ、pop する。

5. ロードマップ

本論文の主定理は、次のとおりである：

任意の K -TPDA \mathcal{A}_K について、 $L(\mathcal{A}_K) = L(\mathcal{A}_0)$ とする 0-TPDA \mathcal{A}_0 が存在する。

このことは、9.4 節で系 1 として証明される。この結果によれば、上の 1-TPDA で受理した言語 L_{ex_1} も、2-TPDA で受理した言語 L_{ex_2} も、局所クロックをいっさい用いずに受理できるということになる。

我々は、上の主定理を次の流れで証明する：

- (1) 6 章で、与えられた K -TPDA から、局所クロックどうしの比較式 $z_1 - z_2 \in? I$ 、局所クロックの区間検査式 $z \in? I$ 、および大域-局所クロックの比較式 $x - z \in? I$ を取り除く。
- (2) 8-9 章で、局所クロック-大域クロックの比較式 $z - x \in? I$ を除去する。
 - 8 章で、 $\text{reset}(z)$ のない K -TPDA における $z - x \in? I$ の除去方法を述べ、
 - それを踏まえたうえで、9 章で、 $\text{reset}(z)$ を許す一般の K -TPDA から $z - x \in? I$ を除去する方法を述べる。
- (3) 9.4 節で、これらの除去方法をあわせ、与えられた K -TPDA \mathcal{A} から、大域クロックどうしの比較検査 $x_1 - x_2 \in? I$ と大域クロックの区間検査 $x \in? I$ だけを持つ 0-TPDA \mathcal{B} を構成する。

6. $z_1 - z_2 \in? I$, $z \in? I$, $x - z \in? I$ の除去

本章では K -TPDA \mathcal{A} から、局所クロックどうしの比較式 $z_1 - z_2 \in? I$ を取り除く方法、局所クロックの区間検査式 $z \in? I$ を取り除く方法、そして大域-局所クロックの比較式 $x - z \in? I$ を取り除く方法を述べる。

6.1 局所クロックの比較 $z_1 - z_2 \in? I$ の除去

K -TPDA \mathcal{A} に含まれる局所クロック比較 $z_1 - z_2 \in? I$ を取り除き、言語等価な K -TPDA \mathcal{B} を構成する。ここでは、diagonal constraint を持つ時間オートマトンから、diagonal constraint を除去するよく知られた方法 [6] で \mathcal{B} を作る。ただし、局所クロックどうしの比較すべてではなく、固定した $z_1 - z_2 \in? I$ だけを取り除くことに注意されたい。

K -TPDA \mathcal{A} が $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_{\mathcal{A}}, q_{\text{init}}, F)$ で与えられているとすると、構成する \mathcal{B} は最終的に次の形をとる：

$$\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \Gamma \times \{0, 1\}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_{\mathcal{B}}, q_{\text{init}}, F).$$

\mathcal{A} と \mathcal{B} のスタック上に、次の対応関係を導入する：

$$\langle \gamma_1, \mu_1 \rangle \dots \langle \gamma_n, \mu_n \rangle \simeq \langle (\gamma_1, b_1), \mu_1 \rangle \dots \langle (\gamma_n, b_n), \mu_n \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} \mu_i(z_1) - \mu_i(z_2) \in I \iff b_i = 1.$$

(γ_i, b_i) のタグ b_i で、比較検査を記号表現し、実際に検査 $z_1 - z_2 \in? I$ を行うのではなく、タグの検査で置き換える。

この対応関係を、計算状況上に自然に拡張しておく：

$$\langle q, \nu, w \rangle \simeq \langle q, \nu, w' \rangle \iff w \simeq w'.$$

我々の狙いは、比較検査 $z_1 - z_2 \in? I$ を使うことなく、次の図式を成立させる \mathcal{B} を構成することにある：

$$(A): \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\tau}_{\alpha} \mathcal{A} & c' \\ \downarrow & \implies & \downarrow \\ d & & d \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\tau}_{\alpha} \mathcal{A} & c' \\ \downarrow & & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\tau'}_{\alpha} \mathcal{B} & d' \end{array}$$

$$(B): \begin{array}{ccc} c & & c \xrightarrow{\tau}_{\alpha} \mathcal{A} c' \\ \downarrow & \implies & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\tau'}_{\alpha} \mathcal{B} d' & d \xrightarrow{\tau'}_{\alpha} \mathcal{B} d' \end{array}$$

(時間遷移 $\overset{\delta}{\rightsquigarrow}$ についても同様の図式が必要だが、 $r_1 - r_2 \in I \iff (r_1 + \delta) - (r_2 + \delta) \in I$ から、これは明らかである)。

以下で、 \mathcal{A} の各遷移規則 $p \xrightarrow{\tau}_{\alpha} q \in \Delta_{\mathcal{A}}$ ごとに、 \mathcal{B} にどのような遷移規則を加えるかを示す。

比較検査 $p \xrightarrow{c_1 - c_2 \in? J}_{\alpha} q \in \Delta_{\mathcal{A}}$ 以下で場合分けする

$c_1 = z_1$, $c_2 = z_2$, $J = I$ の場合： この検査を取り除きたいので、 $p \xrightarrow{\text{check}(\gamma, 1)}_{\alpha} q \in \Delta_{\mathcal{B}}$ を $\Delta_{\mathcal{B}}$ に加える。

それ以外の場合： $p \xrightarrow{c_1 - c_2 \in? J}_{\alpha} q$ を \mathcal{B} に加える。

区間検査 $p \xrightarrow{c \in? J}_{\alpha} q \in \Delta_{\mathcal{A}}$ $p \xrightarrow{c \in? J}_{\alpha} q$ を \mathcal{B} に加える。

push $p \xrightarrow{\text{push}(\gamma)}_{\alpha} q \in \Delta_{\mathcal{A}}$ \mathcal{A} では push 直後のスタックトップフレームは $\langle \gamma, \mathbf{0} \rangle$ となるので、 \mathcal{B} では $0.0 \in I \iff b = 1$ を満たす b を使って、 $\langle (\gamma, b), \mathbf{0} \rangle$ を push したい。したがって、 $0.0 \in I$ かどうかで場合分けをして push する。

$0.0 \in I$ の場合： \mathcal{B} に $p \xrightarrow{\text{push}(\gamma, 1)}_{\alpha} q$ を追加する。

$0.0 \notin I$ の場合： \mathcal{B} に $p \xrightarrow{\text{push}(\gamma, 0)}_{\alpha} q$ を追加する。

reset $p \xrightarrow{\text{reset}(c)}_{\alpha} q \in \Delta_{\mathcal{A}}$ $c \neq z_1$ かつ $c \neq z_2$ の場合は、 $p \xrightarrow{\text{reset}(c)}_{\alpha} q$ を $\Delta_{\mathcal{B}}$ に加える。一方で、 $c = z_1$ または $c = z_2$ の場合には、 \mathcal{B} 側のタグを更新する必要がある。

$c = z_1$ の場合： \mathcal{A} 側で以下の遷移が引き起こされる：

$$\langle p, \nu, \dots \langle \gamma, \mu \rangle \rangle \xrightarrow{\text{reset}(z_1)}_{\alpha} \langle q, \nu, \dots \langle \gamma, \mu[z_1 := 0] \rangle \rangle.$$

$\mu[z_1 := 0](z_1) - \mu[z_2 := 0](z_2) \in I \iff \mu(z_2) \in -I$ であるから、以下の遷移を、各 $\gamma \in \Gamma$, $b \in \{0, 1\}$ ごとに \mathcal{B} に加える：

$$p \xrightarrow{\text{reset}(z_1) \ ; \ z_2 \in? -I \ ; \ \text{check}(\gamma, b) \ ; \ \text{rew}(\gamma, 1)}_{\alpha} q,$$

$$p \xrightarrow{\text{reset}(z_1) \ ; \ z_2 \notin? -I \ ; \ \text{check}(\gamma, b) \ ; \ \text{rew}(\gamma, 0)}_{\alpha} q.$$

$c = z_2$ の場合： 同じ議論に基づき、

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{reset}(z_2) \S z_1 \in ? I \S \text{check}(\gamma, b) \S \text{rew}(\gamma, 1)} q,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{reset}(z_2) \S z_1 \notin ? I \S \text{check}(\gamma, b) \S \text{rew}(\gamma, 0)} q$$

の2種類を、各 $\gamma \in \Gamma, b \in \{0, 1\}$ ごとに追加する。

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{nop}} q, p \xrightarrow[\alpha]{\text{pop}(\gamma)} q \in \Delta_A$$

pop 規則については、そのま
ま $p \xrightarrow[\alpha]{\text{nop}} q$ を \mathcal{B} に加える。pop 規則については、スタック
シンボルを拡張したので、

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{pop}(\gamma, 0)} q, p \xrightarrow[\alpha]{\text{pop}(\gamma, 1)} q$$

の2つを \mathcal{B} に追加する。

ここまでの構成により、前述の図式 (A) と (B) が成立す
る。特に、この構成では reset の場合で $z \in ? I$ と $z \notin ? I$ の
形の検査が追加されるだけであるから、次が成立する。

命題 4. \mathcal{A} を K -TPDA, \mathcal{C}_A を Δ_A に現れる比較検査の全体
とする。局所クロックどうしの比較式 ($z_i - z_j \in ? I$) $\in \mathcal{C}_A$
を固定すると、 K -TPDA \mathcal{B} で、次を満たすものがある：
 $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ かつ $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A \setminus \{z_i - z_j \in ? I\}$ 。ただし \mathcal{B} に
は、 $z_1 \in ? I$ などの局所区間検査が追加されている。

6.2 局所クロックの区間検査 $z \in ? I$ の除去

K -TPDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_A, q_{\text{init}}, F)$ が与えられ
たときに、 Δ_A から局所クロックに対する区間検査 $z \in ? I$
を取り除く方法を述べる。そのために、次の K -TPDA を
構成する：

$$\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X} \cup \{x_0\}, \mathcal{Z}, \Delta_B, q_{\text{init}}, F).$$

新たに大域クロック x_0 を準備する。 Δ_B は、基本的
には Δ_A の遷移規則をコピーすればよいが、遷移規則
 $p \xrightarrow[\alpha]{z \in ? I} q \in \Delta_A$ は、以下の遷移規則で置き換える：

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{reset}(x_0) \S z - x_0 \in ? I} q.$$

これは、Clemente らによる $z \in ? I$ の除去方法と同じ
で [12]、区間検査式 $z \in ? I$ を、局所クロックと大域クロッ
クの比較式 $z - x_0 \in ? I$ (x_0 は検査時に必ず値 0.0 をとる)
で置き換えるというものである。

区間検査式は取り除かれるが、代わりに局所-大域クロッ
クの比較検査が増えることに注意する。

命題 5. \mathcal{A} を K -TPDA, \mathcal{I}_A を Δ_A に現れる区間検査の全体
とする。局所クロックの区間検査式 $z \in ? I \in \mathcal{I}_A$ を固定す
ると、 K -TPDA \mathcal{B} で、次を満たすものがある： $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$
かつ $\mathcal{I}_B = \mathcal{I}_A \setminus \{z \in ? I\}$ 。ただし、 \mathcal{B} には、局所-大域比較
検査式 $z - x \in ? I$ が追加される。

6.3 大域-局所比較検査 $x - z \in ? I$ の除去

K -TPDA \mathcal{A} が $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_A, q_{\text{init}}, F)$ が与え

られたときに、 Δ_A から大域-局所クロックの形をした比較
検査 $x - z \in ? I$ を取り除く方法を述べる。そのために、次
の K -TPDA を構成する：

$$\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_B, q_{\text{init}}, F).$$

基本的には \mathcal{A} の遷移規則をそのまま \mathcal{B} に移せばよく、取
り除きたい比較検査を持つ遷移規則 $p \xrightarrow[\alpha]{x - z \in ? I} q$ が現れ
たら、 $p \xrightarrow[\alpha]{z - x \in ? I} q$ に置き換える。

命題 6. \mathcal{A} を K -TPDA, \mathcal{C}_A を Δ_A の比較検査式全体と
する。大域-局所クロックの比較検査式 $x - z \in ? I \in \mathcal{C}_A$
を固定すると、 K -TPDA \mathcal{B} で $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ かつ $\mathcal{C}_B =$
 $(\mathcal{C}_A \setminus \{x - z \in ? I\}) \cup \{z - x \in ? I\}$ とするものがある。

7. 局所 reset のない MTPDA における性質

前章の命題 4, 5, 6 をふまえると、局所-大域比較検査
 $z - x \in ? I$ を大域クロックのみを用いる検査で置き換えら
れるなら、局所クロックに関する検査をすべて取り除くこ
とができる。本章では「reset(z) を行わない K -TPDA」 \mathcal{A}
を固定し、 \mathcal{A} から単一の局所-大域比較式 $z - x \in ? I$ を除
去する。次章で、reset(z) を許す場合に一般化する。

本章では、「予測情報付き MTPDA」を構成し、reset(z)
を許さない MTPDA から $z - x \in ? I$ を除去する。予測情
報付き MTPDA は、Clemente らの Untiming 定理 [12] の
証明を再形式化するものといえるが、彼らの TPDA では、
reset が存在しないことに加え、局所クロックに対する検査
はスタックからの pop 時に 1 度だけ行えるものであった。
一方で、我々の体系ではいつでも値を検査することができる
ため、より精密な構成を行うことで MTPDA の性質を
明らかにし、それを利用する。

7.1 $z - x \in ? I$ の除去のためのアイデア

局所クロックと大域クロックの比較 $z - x \in ? I$ を除去す
るために、

- (1) 局所クロックが本質的には必要とならない・省いても
よい状況を突き止め、
- (2) ほとんどの場合で局所クロックを省けること、正確に
は、本質的に必要となる局所クロックはたかだか数個
であることを示す。

まず、局所クロックが不要な状況を調べるために、予
測情報付き MTPDA を導入する。予測情報付き MTPDA
は、スタックにフレームを push する際に、そのフレームを
pop するときに $z - x \in I$ が成立するかどうかを予測する
MTPDA である。これを導入したうえで、局所クロックが
省ける状況を明らかにする。

7.2 予測情報付き MTPDA

K -TPDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_A, q_{\text{init}}, F)$ から、予測情
報付き K -TPDA

$$B = (Q, \Sigma, \Gamma \times \{I_{\downarrow}, I, I_{\uparrow}\}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_B, q_{\text{init}}, F)$$

を構成する. B では, 単にスタックシンボル γ を push するのではなく, 区間 $J \in \{I_{\downarrow}, I, I_{\uparrow}\}$ を予測情報として用い, (γ, J) をスタックに push する. これは「 (γ, J) が pop されるときには, $z - x \in J$ が成立するはずである」という予想を意味する.

B の遷移規則 Δ_B を, 以下のように作る:

- フレームを push する際に, そのフレームが後に pop される際に $z - x \in I_{\downarrow}$, $z - x \in I$, または $z - x \in I_{\uparrow}$ のうちどれが成立するかを予想する.
すなわち, $p \xrightarrow[\alpha]{\text{push}(\gamma)} q \in \Delta_A$ があれば,

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{push}(\gamma, I_{\downarrow})} q, p \xrightarrow[\alpha]{\text{push}(\gamma, I)} q, p \xrightarrow[\alpha]{\text{push}(\gamma, I_{\uparrow})} q$$

の3つを B に追加する. ただし, $I_{\downarrow} = \emptyset$ または $I_{\uparrow} = \emptyset$ であれば, それは追加しない.

- フレームを pop する際に, フレーム push 時にたてた予測が正しかったかどうかを確認する.
すなわち, $p \xrightarrow[\alpha]{\text{pop}(\gamma)} q \in \Delta_A$ があれば,

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S z-x \in J \S \text{pop}(\gamma, J)} q$$

を B に追加する.

- push と pop 以外の遷移規則, $p \xrightarrow[\alpha]{\tau} q \in \Delta_A$ については, これをそのまま B に追加する.
ただし本節の仮定から, $p \xrightarrow[\alpha]{\text{reset}(z)} q \in \Delta_A$ とする遷移規則は存在しないことに注意する.

このようにして作った予測情報付き K -TPDA B は, もとの K -TPDA A と言語等価である.

補題 1. $L_{\epsilon}(A) = L_{\epsilon}(B)$.

証明. A と B の計算状況を, 次の関係で対応付ける:

$$\begin{aligned} & \langle q_A, \nu_A, w_A \rangle \sim \langle q_B, \nu_B, w_B \rangle \\ \iff & q_A = q_B \wedge \nu_A = \nu_B \wedge w_A = \phi(w_B). \end{aligned}$$

$\phi: (\Gamma \times \{I_{\downarrow}, I, I_{\uparrow}\})^* \rightarrow \Gamma^*$ は, $\phi((\gamma_1, J_1) \dots (\gamma_n, J_n)) \triangleq \gamma_1 \dots \gamma_n$ で定義される, 予測情報を忘れる準同型射とする.

$L_{\epsilon}(A) \subseteq L_{\epsilon}(B)$. 次の性質を示せば十分である:

$$(*) : \begin{array}{ccc} c \xrightarrow[\alpha]{\tau} A & c' & c \xrightarrow[\alpha]{\tau} A & c' \\ \wr & \implies & \wr & \wr \\ d' & & d \xrightarrow[\alpha]{\tau'} B & d'. \end{array}$$

ラベル付き遷移 $\xrightarrow[\alpha]{\tau}$ だけでなく, 時間付き遷移についても同じことを言う必要があるが, その場合は明らか.

性質 (*) は $c \xrightarrow[\alpha]{\tau} A c'$ についての場合分けで証明できる. ここでは, 次の場合だけを考えるが, 残りの場合はどれも容易である.

$\langle p, \nu, w \langle \gamma, \mu \rangle \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{pop}(\gamma)} A \langle q, \nu, w \rangle$ の場合:

仮定から, 以下を満たす B 側の計算状況が存在する:

$$\langle q, \nu, w \rangle \sim \langle q, \nu, w' \rangle.$$

$\mu(z) - \nu(x) \in J$ とする $J \in \{I_{\downarrow}, I, I_{\uparrow}\}$ が存在し (命題 1),

$$\langle p, \nu, w' \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S z-x \in J \S \text{pop}(\gamma, J)} B \langle q, \nu, w' \rangle$$

とできる. $w = \phi(w')$ から, $w \langle \gamma, \mu \rangle = \phi(w' \langle (\gamma, J), \mu \rangle)$ が成立する.

$L_{\epsilon}(B) \subseteq L_{\epsilon}(A)$. この場合は以下の性質から示せる:

$$\begin{array}{ccc} c & & c \xrightarrow[\alpha]{\tau} A & c' \\ \wr & \implies & \wr & \wr \\ d \xrightarrow[\alpha]{\tau'} B & d' & d \xrightarrow[\alpha]{\tau'} B & d'. \end{array}$$

$d \xrightarrow[\alpha]{\tau'} B d'$ に関する場合で証明できるが, どの場合も明らかである. \square

7.3 局所クロックの節約

必要局所クロックの個数を減らすことができる場合を, 以下の予測情報付きスタックを用いて説明する.

...
$\langle (\gamma_j, J), \mu_j \rangle$
...
$\langle (\gamma_i, J), \mu_i \rangle$
...
$\langle (\gamma_h, J), \mu_h \rangle$
...

2つのフレーム $\langle (\gamma_j, J), \mu_j \rangle$ と $\langle (\gamma_h, J), \mu_h \rangle$ に挟まれたフレームのすべてで, pop 時に $z - x \in J$ が成立すると予測している状況である. このとき, (γ_j, J) を持つフレームと, (γ_h, J) を持つフレームの, 2つのフレームの局所クロック z の値が分かっていたら, これらに挟まれたすべてのフレームの局所クロック z の値は不要であることが分かる. 正確には, (γ_j, J) を持つフレームと (γ_h, J) を持つフレームの pop 時に $z - x \in J$ が成立していれば, 挟まれたフレーム (たとえば (γ_i, J) を持つフレーム) の pop 時に, 自動的に $z - x \in J$ が成立することが分かる.

このことを示すために, 次の重要な補題を証明する.

補題 2. 初期計算状況から到達可能な計算状況 c を考える:

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow^* \langle p, \nu, \dots \langle \gamma_i, \mu_i \rangle \dots \langle \gamma_j, \mu_j \rangle \rangle (= c).$$

このとき, c から到達可能な計算状況 d

$$(*) : c \Rightarrow^* \langle p', \nu', \dots \langle \gamma_i, \mu'_i \rangle \rangle (= d)$$

について, $\mu_j(z) - \nu(x) \leq \mu'_i(z) - \nu'(x)$ が成立する. ただし, 計算状況 d のスタック長は, c のスタック長以下 ($i \leq j$) とする.

証明. 到達可能スタックの単調減少性 (命題 3) により, $\mu_j \leq \mu_i$ が成立する. (*) の計算で, 合計 δ 秒経過しているとする, $\text{reset}(z)$ を許していないため, $\mu'_i(z) = \mu_i(z) + \delta$ が成立する. 大域クロックに関しては $\nu'(x) \leq \nu(x) + \delta$ が成立する (ここで $=$ でないのは, $\text{reset}(x)$ が行われた可能性があるから). これらを合わせると, 目的とする不等式が得られる:

$$\begin{aligned} \mu_j(z) - \nu(x) &\leq \mu_i(z) - \nu(x) \\ &= (\mu_i + \delta)(z) - (\nu(x) + \delta) \\ &\leq \# \mu'_i(z) - \nu'(x). \end{aligned}$$

□

この証明では, 「(*) 中に $\text{reset}(z)$ が行われていない」ことが本質的である. 仮に, $\text{reset}(z)$ が行われていると, $\mu'_i(z) \leq \mu_i(z) + \delta$ となり, 最後の $\leq \#$ が示せない.

この補題は次の性質を導く. 上の例でいえば, (γ_j, J) と (γ_h, J) を持つフレームが (局所クロックの値を用いて) 予測どおりに pop できれば, 間にあるフレームは局所クロックを用いて検査する必要がない, ということに対応する.

補題 3. 以下の計算列を考える:

$$\begin{aligned} \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle q_1, \nu, \dots \langle \gamma_h, \mu_h \rangle \dots \langle \gamma_i, \mu_i \rangle \dots \langle \gamma_j, \mu_j \rangle \rangle &\xrightarrow{\text{pop}} \\ \langle q_2, \nu, \dots \langle \gamma_h, \mu_h \rangle \dots \langle \gamma_i, \mu_i \rangle \dots \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle q_3, \nu', \dots \langle \gamma_h, \mu'_h \rangle \dots \langle \gamma_i, \mu'_i \rangle \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle q_5, \nu'', \dots \langle \gamma_h, \mu''_h \rangle \rangle &\xrightarrow{\text{pop}} \langle q_6, \nu'', \dots \rangle. \end{aligned}$$

このとき, $\mu_j(z) - \nu(x) \in J$ かつ $\mu'_h(z) - \nu''(x) \in J$ ならば, $\mu'_i(z) - \nu'(x) \in J$ が成立する.

証明. 補題 2 により, $\mu_j(z) - \nu(x) \leq \mu'_i(z) - \nu'(x) \leq \mu''_h(z) - \nu''(x)$ が成り立つ. また, $\mu_j(z) - \nu(x) \in J$ かつ $\mu''_h(z) - \nu''(x) \in J$ であるから, 命題 1 から $\mu'_i(z) - \nu'(x) \in J$ が得られる. □

補題 2 は, 予測情報付き MTPDA のスタックに関する, 次の重要な性質も導く.

補題 4. 予測情報付き MTPDA \mathcal{B} について, 受理に関わる計算 π は以下のように表せる:

$$\pi = \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow^* \langle q, \nu, w \rangle \Rightarrow^* \langle q_F, \nu_F, \epsilon \rangle.$$

このとき, 途中で現れる予測情報付きスタックについて, 次のように表せる:

$$w \in \Upsilon(I_\uparrow)^* \cdot \Upsilon(I)^* \cdot \Upsilon(I_\downarrow)^*.$$

ここで $\Upsilon(J) \triangleq (\Gamma \times \{J\}) \times (\mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$ とする.

証明. π は, 次のように分解できる:

$$\begin{aligned} \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle q, \nu, w = \dots \langle (\gamma_i, J), \mu_i \rangle \langle (\gamma_j, J'), \mu_j \rangle \dots \rangle &\Rightarrow^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle q_1, \nu_1, \dots \langle (\gamma_i, J), \mu'_i \rangle \langle (\gamma_j, J'), \mu'_j \rangle \rangle &\xrightarrow{\text{pop}} \\ \langle q_2, \nu_2, \dots \langle (\gamma_i, J), \mu'_i \rangle \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle q_3, \nu_3, \dots \langle (\gamma_i, J), \mu''_i \rangle \rangle &\xrightarrow{\text{pop}} \langle q_4, \nu_4, \dots \rangle \Rightarrow^* \langle q_F, \nu_F, \epsilon \rangle. \end{aligned}$$

補題 2 により, $\mu'_j(z) - \nu_1(x) \leq \mu''_i(z) - \nu_3(x)$ が成立する. また, pop に成功していることから $\mu'_j(z) - \nu_1(x) \in J'$ と $\mu''_i(z) - \nu_3(x) \in J$ も分かる. $I_\downarrow \prec I \prec I_\uparrow$ かつ, $J \not\prec J'$ であるから, $J' \preceq J$ でなければならない.

この議論は, w のどの隣り合う 2 フレームでも成立するので, $w \in \Upsilon(I_\uparrow)^* \cdot \Upsilon(I)^* \cdot \Upsilon(I_\downarrow)^*$ が得られる. □

この補題と補題 3 をあわせると, 計算中に現れる任意のスタック

$$\begin{aligned} w = &\langle (\gamma_1, I_\uparrow), \mu_1 \rangle \dots \langle (\gamma_\ell, I_\uparrow), \mu_\ell \rangle \\ &\langle (\gamma_{\ell+1}, I), \mu_{\ell+1} \rangle \dots \langle (\gamma_n, I), \mu_n \rangle \\ &\langle (\gamma_{n+1}, I_\downarrow), \mu_{n+1} \rangle \dots \langle (\gamma_m, I_\downarrow), \mu_m \rangle \end{aligned}$$

についても, \dots によって省略していない 6 つフレームについての局所クロック z の値は必要となるが, \dots によって省略している場所では, 局所クロック z の値は必要でないことが分かる.

8. $\text{reset}(z)$ なし MTPDA からの $z - x \in ? I$ 除去

前章では, 予測情報付き MTPDA を分析し「正確に分かっている必要のある局所クロック z の値はたかだか 6 つ」という結論が得られた. 本章では, この必須となる局所クロックを, 大域クロックを用いて表現することで, 避けられない局所-大域比較検査 $z - x \in ? I$ を, 大域クロックどりの比較検査で置き換えられることを示す.

前章の予測情報付き K -TPDA $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \Gamma \times \{I_\downarrow, I, I_\uparrow\}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta_{\mathcal{B}}, q_{\text{init}}, F)$ から, 次の予測情報付き K -TPDA \mathcal{C} を構成する:

$$\mathcal{C} = (Q, \Sigma, \Gamma_{\mathcal{C}}, \mathcal{X}_{\mathcal{C}}, \mathcal{Z}, \Delta_{\mathcal{C}}, q_{\text{init}}, F).$$

ここで $\Gamma_{\mathcal{C}}$ と $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ は, それぞれ以下のように拡張されている:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{C}} &\triangleq \Gamma \times \{ J^\blacktriangle, J, J^\blacktriangledown : J \in \{I_\downarrow, I, I_\uparrow\} \}, \\ \mathcal{X}_{\mathcal{C}} &\triangleq \mathcal{X} \cup \{ x_{J^\blacktriangle}, x_{J^\blacktriangledown} : J \in \{I_\downarrow, I, I_\uparrow\} \}. \end{aligned}$$

\mathcal{C} は, \mathcal{B} をもとに構成を行い, 到達可能なスタックは, 補題 4 をもとに (細分化して), 次のような形をとることを目指す (補題 7):

$$\begin{aligned} &(\gamma_1, I_\uparrow^\blacktriangle)(\gamma_2, I_\uparrow) \dots (\gamma_{\ell-1}, I_\uparrow)(\gamma_\ell, I_\uparrow^\blacktriangledown) \\ &(\gamma_{\ell+1}, I^\blacktriangle)(\gamma_{\ell+2}, I) \dots (\gamma_{n-1}, I)(\gamma_n, I^\blacktriangledown) \\ &(\gamma_{n+1}, I_\downarrow^\blacktriangle)(\gamma_{n+2}, I_\downarrow) \dots (\gamma_m, I_\downarrow^\blacktriangledown). \end{aligned}$$

J^\blacktriangle が連続区間の下端を, J^\blacktriangledown が連続区間の上端を表している. J^\blacktriangle および J^\blacktriangledown を持つフレームの局所クロック z の値を, それぞれ x_{J^\blacktriangle} と x_{J^\blacktriangledown} で覚える.

以上の考えに基づき, 遷移規則集合 $\Delta_{\mathcal{C}}$ を定義する:

$p \xrightarrow[\alpha]{\text{push}(\gamma, J)} q \in \Delta_B$ について

空スタックに対する **push** を行う場合: 次の遷移規則に対応する:

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\epsilon) \S \text{push}(\gamma, J^\blacktriangle) \S \text{reset}(x_J^\blacktriangle)} q \in \Delta_C$$

スタックトップで予測している区間が J の場合: これは, 次の遷移規則に対応する:

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangle) \S \tau} q \in \Delta_C,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S \tau} q \in \Delta_C,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangledown) \S \text{rew}(\gamma, J) \S \tau} q \in \Delta_C.$$

ただし, $\tau = \text{push}(\gamma, J^\blacktriangledown) \S \text{reset}(x_J^\blacktriangledown)$ とする. 1つ目と2つ目の遷移規則は, それぞれ $wJ^\blacktriangle \rightarrow wJ^\blacktriangle J^\blacktriangledown$ および $wJ^\blacktriangle J \rightarrow wJ^\blacktriangle J J^\blacktriangledown$ という遷移を誘導する. 3つ目の遷移規則は, $wJ^\blacktriangle J J^\blacktriangledown \rightarrow wJ^\blacktriangle J J J^\blacktriangledown$ という遷移を誘導する.

スタックトップで予測している区間が J' かつ $J \prec J'$:

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J'^\blacktriangle) \S \tau} q, p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J') \S \tau} q,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J'^\blacktriangledown) \S \tau} q \in \Delta_C.$$

ただし, $\tau = \text{push}(\gamma, J^\blacktriangle) \S \text{reset}(x_J^\blacktriangle)$ とする.

スタックトップで予測している区間が J' かつ $J' \prec J$: 補題 4 により, この場合は考えなくてよい.

$p \xrightarrow[\alpha]{\text{pop}(\gamma)} q \in \Delta_B$ について

pop 遷移については, 補題 3 をもとに, クロックの割り当てられているフレーム $(\gamma, J^\blacktriangle)$ または $(\gamma, J^\blacktriangledown)$ では, 割り当てられているクロック用いて正確な検査を行い, クロックの割り当てられていないフレームでは単に **pop** を行う.

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangle) \S x_J^\blacktriangle - x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J^\blacktriangle)} q \in \Delta_C,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangledown) \S x_J^\blacktriangledown - x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J^\blacktriangledown)} q \in \Delta_C,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S \text{pop}(\gamma, J)} q \in \Delta_C. \quad (*_1)$$

$p \xrightarrow[\alpha]{z-x \in ? I} q \in \Delta_B$ について

取り除きたい比較 $z - x \in ? I$ については, クロックが割り当てられていればそれを用いて実際に検査を行い, クロックが割り当てられていない場合は, そのフレームが I を予測する場合にだけ遷移を許す:

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangle) \S x_J^\blacktriangle - x \in ? I} q,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangledown) \S x_J^\blacktriangledown - x \in ? I} q \in \Delta_C,$$

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, I)} q \in \Delta_C. \quad (*_2)$$

その他の遷移規則 $p \xrightarrow[\alpha]{\tau} q \in \Delta_B$ について
同じ遷移規則を Δ_C にも加えるとよい.

pop 規則の場合の $(*_1)$ と, $z - x \in ? I$ の場合の $(*_2)$ の定義の正当性を示したい. これは, 以下の 8.1 節と 8.2 節で示される補題 6 によって保障される.

8.1 予測付き MTPDA \mathcal{C} に関する性質

予測付き MTPDA \mathcal{C} は, $\text{reset}(z)$ を許さない K -TPDA \mathcal{A} をもとに構成を行って得られた MTPDA である. したがって, あるフレームが **push** されてからの経過時間と, そのフレームにおける局所クロック z の値は一致している. 特に J^\blacktriangle または J^\blacktriangledown を持つフレームについては, 大域クロック x_J^\blacktriangle と x_J^\blacktriangledown においてその値を覚えているため, 次の補題が成立する.

補題 5. 以下の 2 種類の到達可能な計算状況を考える:

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_{\mathcal{C}}^* \langle q_1, \eta_1, \dots, \langle (\gamma_1, J^\blacktriangle), \mu_1 \rangle \rangle,$$

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_{\mathcal{C}}^* \langle q_2, \eta_2, \dots, \langle (\gamma_2, J^\blacktriangledown), \mu_2 \rangle \rangle.$$

このとき, $\mu_1(z) = \eta_1(x_J^\blacktriangle)$ と $\mu_2(z) = \eta_2(x_J^\blacktriangledown)$ が成立する.

証明. 計算列の長さに関する帰納法から明らかである. \square

上の補題は, スタックトップで J^\blacktriangle または J^\blacktriangledown を持っている場合に関する性質であるが, J を持っている場合についても, 次のよい性質が成り立つ.

補題 6. 到達可能かつ空スタックまで遷移する計算状況を考える:

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_{\mathcal{C}}^* \langle q, \eta', \dots, \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle \Rightarrow_{\mathcal{C}}^* \langle q_F, \eta_F, \epsilon \rangle.$$

このとき, $\mu'(z) - \eta'(x) \in J$ が成立する.

この補題により, スタックトップに J を持つときには, $z - x \in J$ が成立すると思ってよいことが分かる. この補題を証明するために, \mathcal{C} において到達可能なスタックの形を明らかにする.

8.2 補題 6 の証明とそのための準備

\mathcal{C} のスタック w が,

$$w \in \mathcal{F}(I_\uparrow) \cdot \mathcal{F}(I) \cdot \mathcal{F}(I_\downarrow)$$

を満たすとき, *well-formed* であると呼ぶ. ここで, $\mathcal{F}(J)$ は以下のように定義している:

$$\mathcal{F}(J) \triangleq \epsilon \cup \Upsilon(J^\blacktriangle) \cdot \Upsilon(J)^* \cup \Upsilon(J^\blacktriangle) \cdot \Upsilon(J)^* \cdot \Upsilon(J^\blacktriangledown).$$

ただし, $\Upsilon(J) \triangleq (\Gamma \times \{J\}) \times (\mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$ とする. これは, 補題 4 で得られる形を, 記号 \blacktriangle および \blacktriangledown を用いて細分化したものである.

補題 7. \mathcal{C} について, $\langle q, \nu, w \rangle$ が初期計算状況から到達可能であるとすると, w は *well-formed* である.

証明. 初期計算状況 $\langle q, \nu, \epsilon \rangle$ について, ϵ は well-formed である. したがって, 以下を示せば十分である.

w が well-formed であり, $\langle p, \eta, w \rangle \Rightarrow_C \langle q, \eta', w' \rangle$
 ならば, w' も well-formed となる.

この主張は, w に関する場合分けからただちに証明できる. \square

この補題により, 次の補題が証明される.

補題 8. $c' = \langle q', \eta', \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle$ を初期状態から到達可能な計算状況とする:

$$\pi = \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_C^* \langle q', \eta', \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle,$$

この計算 π は次のように分解できる:

$$\begin{aligned} \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle p, \eta, \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu \rangle \dots \langle (\gamma_j, J^\blacktriangledown), \mu_j \rangle \rangle &\xrightarrow{\text{pop}} \\ \langle q, \eta, \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu \rangle \dots \rangle &\Rightarrow^* \\ c' = \langle q', \eta', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu'_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle. & \end{aligned}$$

証明のアイデア. ここでは, スタックフレーム中の局所クロックに対する割当ては省いて考える. 補題 7 により,

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow^* c' = \langle q', \eta', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots (\gamma, J) \rangle$$

とする c' において (γ, J) の下に J^\blacktriangle が必ず現れる. J をスタック中に作るには, push 時に $J^\blacktriangledown \mapsto J$ の書き換えを行うほかにないため, 以下のような分解が存在する:

$$\begin{aligned} \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle &\Rightarrow^* \langle q'', \eta'', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots (\gamma, J^\blacktriangledown) \rangle \rangle \xrightarrow{\text{push}} \\ \langle q''', \eta''', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots (\gamma, J) \rangle \langle (\gamma', J^\blacktriangledown) \rangle \rangle &\Rightarrow_{\sharp}^* \\ \langle q', \eta', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots (\gamma, J) \rangle \rangle. & \end{aligned}$$

\Rightarrow_{\sharp}^* の計算中では, 場合分けによる議論で, 必ず J^\blacktriangledown を持つフレームを pop しなければならないことが示せる (ただし, それが $(\gamma', J^\blacktriangledown)$ とは限らない). これにより, 望む分解が存在することが分かる. \square

補題 6 の証明.

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_C^* \langle q, \eta', \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle \Rightarrow_C^* \langle q_F, \eta_F, \epsilon \rangle.$$

この計算は, 補題 8 を用いて, 次のように分解できる:

$$\begin{aligned} \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle p, \eta, \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu \rangle \dots \langle (\gamma_j, J^\blacktriangledown), \mu_j \rangle \rangle &\xrightarrow{\text{pop}} \\ \langle p', \eta', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu \rangle \dots \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle q, \eta', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu'_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle &\Rightarrow^* \\ \langle q', \eta'', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu''_i \rangle \rangle \xrightarrow{\text{pop}} \langle q'', \eta'', \dots \rangle &\Rightarrow^* \langle q_F, \eta_F, \epsilon \rangle. \end{aligned}$$

pop 遷移の定義から, 次が分かる:

$$\eta(x_j^\blacktriangledown) - \eta(x) \in J, \quad \eta''(x_j^\blacktriangle) - \eta''(x) \in J.$$

補題 5 により, $\mu_j(z) = \eta(x_j^\blacktriangledown)$ と $\mu'_i(z) = \eta''(x_j^\blacktriangle)$ であるから, $\mu_j(z) - \eta(x) \in J$ と $\mu'_i(z) - \eta''(x) \in J$ が成立する. このとき, 補題 3 により, $\mu'(z) - \eta'(x) \in J$ が成立する. \square

8.3 予測付き MTPDA \mathcal{B} と \mathcal{C} の言語等価性

\mathcal{B} と \mathcal{C} の計算状況の間に, 次の対応関係を定義する:

$$\begin{aligned} \langle q_B, \nu, w_B \rangle &\approx \langle q_C, \eta, w_C \rangle \iff \\ q_B = q_C \wedge \nu = \eta \upharpoonright \mathcal{X} \wedge w_B = \psi(w_C). & \end{aligned}$$

ただし, $\psi: \Gamma_C^* \rightarrow (\Gamma \times \{I_\downarrow, I, I_\uparrow\})^*$ は,

$$\begin{aligned} \psi((\gamma, J)) &= (\gamma, J), \quad \psi((\gamma, J^\blacktriangle)) = (\gamma, J), \\ \psi((\gamma, J^\blacktriangledown)) &= (\gamma, J) \end{aligned}$$

を拡張して得られる, $J^\blacktriangle \mapsto J$ および $J^\blacktriangledown \mapsto J$ で記号 $\blacktriangle, \blacktriangledown$ を忘れる準同型射とする.

定理 1. 予測付き MTPDA \mathcal{B} と, $z - x \in ? I$ を除去した予測付き MTPDA \mathcal{C} で, $L_\epsilon(\mathcal{B}) = L_\epsilon(\mathcal{C})$ が成立する.

一般に, \mathcal{C} には, \mathcal{B} には存在しなかった大域クロックの比較 ($x_j^\blacktriangle - x \in ? J$ や $x_j^\blacktriangledown - x \in ? J$) が追加されている. ただし, 局所クロックを用いる検査はいつさい追加されない.

証明. 補題 5 と 6 から証明される.

$L_\epsilon(\mathcal{B}) \subseteq L_\epsilon(\mathcal{C})$ 次のことを証明すれば十分である.

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_{\mathcal{B}}^* c \Rightarrow_{\mathcal{B}} c' \Rightarrow_{\mathcal{B}}^* \langle q_F, \nu_F, \epsilon \rangle$$

とする任意の $c \Rightarrow_{\mathcal{B}} c'$ について, 次が成立する:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\tau}_{\mathcal{B}} & c' \\ \Downarrow & \implies \Downarrow & \Downarrow \\ d & & d \xrightarrow{\tau}_{\mathcal{C}} d'. \end{array}$$

$c \xrightarrow{\tau}_{\mathcal{B}} c'$ についての場合分けで証明できる. ここでは, 自明でない場合だけを証明する.

push について

現在のスタックトップで予想している区間 J と異なる区間 J' を予想して push する場合を考える. すなわち

$$\begin{aligned} \langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle &\xrightarrow{\text{push}(\gamma', J')}_{\mathcal{B}} \\ \langle q, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \langle (\gamma', J'), \mathbf{0} \rangle \rangle. & \end{aligned}$$

$\langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \approx \langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \rangle$ の場合

補題 4 から, $J' \prec J$ が成立する. よって, 次の遷移が存在する:

$$\begin{aligned} \langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \rangle &\xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangle) \sharp \text{push}(\gamma', J') \sharp \text{reset}(x_{j'}^\blacktriangle)}_{\mathcal{C}} \\ \langle q, \eta', w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \langle (\gamma', J^\blacktriangle), \mathbf{0} \rangle \rangle. & \end{aligned}$$

$\nu = \eta \upharpoonright \mathcal{X}$ と $\eta \upharpoonright \mathcal{X} = \eta' \upharpoonright \mathcal{X}$ から $\nu = \eta' \upharpoonright \mathcal{X}$ であるから, 以下が成立する:

$$\begin{aligned} \langle q, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \langle (\gamma', J'), \mathbf{0} \rangle \rangle \\ \approx \langle q, \eta', w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \langle (\gamma', J^\blacktriangle), \mathbf{0} \rangle \rangle. \end{aligned}$$

その他の場合も, まったく同様に証明できる.

pop について

次の遷移を考える：

$$\langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S z-x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J)}_{\mathcal{B}} \langle q, \nu, w \rangle$$

$\langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \approx \langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \rangle$ の場合

$$\langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangle) \S x^\blacktriangle - x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J^\blacktriangle)}_{\mathcal{C}} \langle q, \eta, w' \rangle$$

が成立することを言うために、 $\eta(x^\blacktriangle) - \eta(x) \in J$ を示す。 $\mu(z) - \nu(x) \in J$ は成立しており、仮定から $\nu(x) = \eta(x)$ で、補題 5 から $\mu(z) = \eta(x^\blacktriangle)$ が成立するので、明らか。その他の場合についても、同様に示せる。

$L_c(\mathcal{C}) \subseteq L_c(\mathcal{B})$ 次のことを証明すれば十分である。

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_{\mathcal{C}}^* d \Rightarrow_{\mathcal{C}} d' \Rightarrow_{\mathcal{C}}^* \langle q_F, \eta_F, \epsilon \rangle$$

とする任意の $d \Rightarrow_{\mathcal{C}} d'$ について、次が成立する：

$$\begin{array}{ccc} c & & c \xrightarrow{\tau}_{\mathcal{B}} c' \\ \Downarrow & \Rightarrow & \Downarrow \\ d \xrightarrow{\tau'}_{\mathcal{C}} d' & & d \xrightarrow{\tau'}_{\mathcal{C}} d'. \end{array}$$

$d \xrightarrow{\tau'}_{\mathcal{C}} d'$ についての場合分けで証明できる。自明でない場合は、 \mathcal{B} 側では局所クロックの値を実際に用いた検査を行う一方で、 \mathcal{C} 側ではスタックシンボルの確認だけで済ませてしまう pop と $z-x \in ? I$ の場合である。ここでは、pop の場合を考えるが、 $z-x \in ? I$ の場合もまったく同じ議論で証明できる。

pop について

$\langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \approx \langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \rangle$ の場合。次の遷移を考える：

$$\langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\blacktriangle) \S x^\blacktriangle - x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J^\blacktriangle)}_{\mathcal{C}} \langle q, \eta, w' \rangle$$

以下が成立することを示したい：

$$\langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S z-x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J)}_{\mathcal{B}} \langle q, \nu, w \rangle$$

$\mu(z) - \nu(x) \in J$ を示したいが、仮定から $\nu(x) = \eta(x)$ が分かっているので、 $\mu(z) - \eta(x) \in J$ を示せばよい。 $\eta(x^\blacktriangle) - \eta(x) \in J$ であり、補題 5 から $\eta(x^\blacktriangle) = \mu(z)$ であるから、 $\mu(z) - \eta(x) \in J$ が示せた。

$\langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \approx \langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle$ の場合。

$$\langle p, \eta, w' \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \xrightarrow{\text{check}(\gamma, J) \S \text{pop}(\gamma, J)} \langle q, \eta, w' \rangle$$

であるときに、

$$\langle p, \nu, w \langle (\gamma, J), \mu \rangle \rangle \xrightarrow{\text{check}(\gamma, J) \S z-x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J)} \langle q, \nu, w \rangle$$

が成立することを示したい。 $\mu(z) - \nu(x) \in J$ を確認すればよいが、仮定から $\nu(x) = \eta(x)$ が分かっているので、 $\mu(z) - \eta(x) \in J$ を示せば十分である。ところで、これは補題 6 によりただちに得られる。□

9. MTPDA からの $z-x \in ? I$ の除去

本章では、 $z-x \in ? I$ を持つ K -TPDA で、特に $\text{reset}(z)$ を許す \mathcal{A} を固定し、 $z-x \in ? I$ を、前章同様に大域クロックの比較で置き換える。

$\text{reset}(z)$ のない MTPDA については、フレームが push されてからの経過時間と、局所クロック z 値が一致しているという性質があったため、フレームに関する時間の予測で十分であった。一方で、 $\text{reset}(z)$ が許される場合は、この性質は成り立たない。そこで、局所クロック z に関する正確な時間を表すクロックが必要となる。本章では、フレームの除去時間の予測を有効に使うと、 $\text{reset}(z)$ を許したとしても、正確に記憶する必要のある局所クロック z は、たかだか数個で十分であることを示す。

我々は、 $\text{reset}(z)$ を持つ K -TPDA

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta, q_{\text{init}}, F)$$

から、 $z-x \in ? I$ を持たない言語等価な K -TPDA

$$\mathcal{D} = (Q, \Sigma, \Gamma_{\mathcal{D}}, \mathcal{X}_{\mathcal{D}}, \mathcal{Z}, \Delta_{\mathcal{D}}, q_{\text{init}}, F)$$

を構成する。 $\Gamma_{\mathcal{D}}$ と $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ は、それぞれ以下で定義される：

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{D}} &= \Gamma \times \{ J^\blacktriangle, J, J^\blacktriangledown, J^{\blacktriangle, \circ}, J^\circ, J^{\blacktriangledown, \circ} : J \in \{I_\downarrow, I, I_\uparrow\} \}, \\ \mathcal{X}_{\mathcal{D}} &= \mathcal{X} \cup \{ x^\blacktriangle, x^\blacktriangledown : J \in \{I_\downarrow, I, I_\uparrow\} \} \cup \{ \mathbb{C}_{I_\downarrow}, \mathbb{C}_I, \mathbb{C}_{I_\uparrow} \}. \end{aligned}$$

3 種類のスタックシンボル $J^{\blacktriangle, \circ}$ 、 J° 、 $J^{\blacktriangledown, \circ}$ を追加する。 \mathcal{D} では、フレームの予測区間に \circ が付いている場合に、そのフレームの局所クロック z の実際の値を大域クロック \mathbb{C}_J で覚えることにする。これは、 $\text{reset}(z)$ が発生すると、スタックシンボルを $J^\blacktriangle \mapsto J^{\blacktriangle, \circ}$ 、 $J \mapsto J^\circ$ 、または $J^\blacktriangledown \mapsto J^{\blacktriangledown, \circ}$ によって書き換え、 $\text{reset}(\mathbb{C}_J)$ を行うことで実現される。したがって、 \circ 付きのフレームでの $z-x \in ? I$ は、大域クロックどうしの比較 $\mathbb{C}_J - x \in ? I$ で代用できる。これはちょうど、前章の補題 5 に対応する。一方で、 \circ 付きでないフレームについても、前章の補題 6 と類似した性質が成り立ち、結果的に正確な計算ができる、ということが本章の主張である。

9.1 遷移規則集合 $\Delta_{\mathcal{D}}$ の定義

7.2 節の構成は、 $\text{reset}(z)$ を持つ \mathcal{A} についても有効であるので、それによってすでに予測情報付き K -TPDA \mathcal{B} を得ているとする。 \mathcal{B} の各遷移規則から、 $\Delta_{\mathcal{C}}$ と同じ方針で遷移規則を定義していく。ただし、 \circ については、以下の考えに基づいて扱う：

- $\text{reset}(z)$ については, $\text{reset}(z)$ と $\text{reset}(\mathbb{C}_J)$ を行う。また, シンボルの書き換え $\cdot \mapsto \cdot^\circ$ で, 記号 \circ を付ける。
- J で予測するフレームを push する場合は, 以下の場合分けをする:
 - トップフレームの予測が J' で $J \prec J'$ の場合は, $\text{reset}(\mathbb{C}_J)$ を行い, $J^{\blacktriangle, \circ}$ を push する。
 - トップフレームの予測も J の場合は, 現在の z の値を忘れ, 新しく積むフレームの z を優先的に覚えることにする。したがって, push 前に $J^{\blacktriangle, \circ} \mapsto J^{\blacktriangle}, J^\circ \mapsto J, J^{\nabla, \circ} \mapsto J^\nabla$ のように書き換えを行う。

$$\begin{aligned}
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{reset}(z)} q \in \Delta_{\mathcal{B}} \text{ について} \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S \text{rew}(\gamma, J^\circ) \S \tau} q, \quad p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\circ) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle}) \S \text{rew}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S \tau} q, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\nabla, \circ}) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}},
 \end{aligned}$$

ただし, $\tau = \text{reset}(z) \S \text{reset}(\mathbb{C}_J)$ とする。スタックトップに J^∇ は現れない (補題 11) ので, その場合は省いている。

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{push}(\gamma, J)} q \in \Delta_{\mathcal{B}} \text{ について}$$

空スタックに対する push を行う場合:

$$p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\epsilon) \S \text{push}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S \text{reset}(x_J^\dagger)} q \in \Delta_{\mathcal{D}}$$

スタックトップの予測区間が J の場合:

$$\begin{aligned}
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle}) \S \tau} q, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S \text{rew}(\gamma, J^{\blacktriangle}) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S \tau} q, \quad p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\circ) \S \text{rew}(\gamma, J) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\nabla, \circ}) \S \text{rew}(\gamma, J) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}.
 \end{aligned}$$

ただし, $\tau = \text{push}(\gamma, J^{\nabla, \circ}) \S \text{reset}(x_J^\nabla) \S \text{reset}(\mathbb{C}_J)$ とする。

スタックトップの予測区間が J' かつ $J \prec J'$ の場合:

$$\begin{aligned}
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle}) \S \tau} q, \quad p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J') \S \tau} q, \quad p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J'^\circ) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\nabla, \circ}) \S \tau} q \in \Delta_{\mathcal{D}}.
 \end{aligned}$$

ただし, $\tau = \text{push}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S \text{reset}(x_J^\dagger) \S \text{reset}(\mathbb{C}_J)$ とする。

$$\begin{aligned}
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{pop}(\gamma)} q \in \Delta_{\mathcal{B}} \text{ について} \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle}) \S x_J^\dagger - x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J^{\blacktriangle})} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J) \S \text{pop}(\gamma, J)} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S x_J^\dagger - x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ})} q \in \Delta_{\mathcal{D}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\nabla, \circ}) \S x_J^\nabla - x \in ? J \S \text{pop}(\gamma, J^{\nabla, \circ})} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\circ) \S \text{pop}(\gamma, J^\circ)} q \in \Delta_{\mathcal{D}}.
 \end{aligned}$$

$p \xrightarrow[\alpha]{z - x \in ? I} q \in \Delta_{\mathcal{B}}$ について

$$\begin{aligned}
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, I^{\blacktriangle})} q, \quad p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\blacktriangle, \circ}) \S \mathbb{C}_J - x \in ? I} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, I)} q, \quad p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^\circ) \S \mathbb{C}_J - x \in ? I} q \in \Delta_{\mathcal{D}}, \\
 & p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, J^{\nabla, \circ}) \S \mathbb{C}_J - x \in ? I} q \in \Delta_{\mathcal{D}}.
 \end{aligned}$$

実際に検査をしない $p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, I^{\blacktriangle})} q$ と $p \xrightarrow[\alpha]{\text{check}(\gamma, I)} q$ の定義の正当性が問題になるが, これは 9.2 節と 9.3 節で証明する補題 10 と補題 13 によって保障される。

その他の遷移規則 $p \xrightarrow{\tau} q \in \Delta_{\mathcal{B}}$ について

同じ遷移規則を $\Delta_{\mathcal{D}}$ にも加える。

9.2 \mathcal{D} における性質

前章の補題 5 に対応する, 次の性質が成立する:

補題 9. 以下の 3 種類の到達可能な計算状況を考える:

$$\begin{aligned}
 \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle & \Rightarrow_{\mathcal{D}}^* \langle q_1, \eta_1, \dots, \langle (\gamma_1, J^{\blacktriangle, \circ}), \mu_1 \rangle \rangle, \\
 \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle & \Rightarrow_{\mathcal{D}}^* \langle q_2, \eta_2, \dots, \langle (\gamma_2, J^{\nabla, \circ}), \mu_2 \rangle \rangle, \\
 \langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle & \Rightarrow_{\mathcal{D}}^* \langle q_3, \eta_3, \dots, \langle (\gamma_3, J^\circ), \mu_3 \rangle \rangle.
 \end{aligned}$$

このとき, $\mu_1(z) = \eta_1(\mathbb{C}_J)$, $\mu_2(z) = \eta_2(\mathbb{C}_J)$, $\mu_3(z) = \eta_3(\mathbb{C}_J)$ が成立する。

証明. 計算列の長さに関する帰納法から明らかである。□

この補題により, $p \xrightarrow[\alpha]{z - x \in ? I} q \in \Delta_{\mathcal{B}}$ から $\Delta_{\mathcal{D}}$ に遷移を加える際の, スタックトップに \cdot° を持つフレームについての定義が正当化される。 \cdot° を持たないフレームについての定義の正当化は, 以下の補題 (これは補題 6 に対応する) によって行われる。

補題 10. 以下の計算列を考える。

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_{\mathcal{D}}^* \langle p, \eta', \dots, \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle \Rightarrow_{\mathcal{D}}^* \langle q_F, \eta_F, \epsilon \rangle$$

このとき, $\mu'(z) - \eta'(x) \in J$ が成立する。

この補題の証明は, 次節で行うが, ここでは証明のアイディアを述べる。次の計算列を考える (スタックシンボルを省き, 局所クロックを 1 つとし, その値を k_i で表す):

$$\begin{aligned}
 \langle q_1, \eta, \left[\begin{array}{l} \langle J^{\nabla, \circ}, k_1 \rangle : F_1 \\ \langle J, k_2 \rangle : F_2 \\ \langle J^{\blacktriangle}, k_3 \rangle : F_3 \end{array} \right] \rangle_{(A)} & \xrightarrow{\text{pop}} \langle q_2, \eta, \left[\begin{array}{l} \langle J, k_2 \rangle \\ \langle J^{\blacktriangle}, k_3 \rangle \end{array} \right] \rangle \Rightarrow_{\delta}^* \\
 \langle q_3, \eta', \left[\begin{array}{l} \langle J, k'_2 \rangle \\ \langle J^{\blacktriangle}, k'_3 \rangle \end{array} \right] \rangle_{(B)} & \xrightarrow{z - x \in ? I} \langle q_4, \eta', \left[\begin{array}{l} \langle J, k'_2 \rangle \\ \langle J^{\blacktriangle}, k'_3 \rangle \end{array} \right] \rangle \xrightarrow{\text{pop}} \\
 \langle q_5, \eta', \left[\begin{array}{l} \langle J^{\blacktriangle}, k'_3 \rangle \end{array} \right] \rangle & \Rightarrow^* \langle q_6, \eta', \epsilon \rangle.
 \end{aligned}$$

説明のため、計算状況 (A) のスタックフレームに名前を付け、スタックトップから F_1, F_2, F_3 と呼ぶ。また、 \Rightarrow_δ^* の計算中に経過した時間は δ で、この間にフレーム F_2 に対して reset は行われなとする。 $\xrightarrow{z-x \in \tau I}$ の遷移に注目する。 F_2 の局所クロック z の値 ($k'_2 = k_2 + \delta$) は覚えていないが、最終的に空スタックにするまで計算が進むので、補題 6 と同様の議論から $k'_2 - \eta'(x) \in J$ であることが分かる。正確には、以下の議論から導かれる。

- (1) $J^{\nabla, \circ}$ が pop できるので、 $\eta(x_j^\nabla) - \eta(x) \in J$ が成立する。同じく J^\blacktriangle が pop できるので、 $\eta'(x_j^\blacktriangle) - \eta'(x) \in J$ が成立する。
- (2) $\eta(x_j^\nabla) - \eta(x) \leq k'_2 - \eta'(x) \leq \eta'(x_j^\blacktriangle) - \eta'(x)$ を示せば、命題 1 から、 $k'_2 - \eta'(x) \in J$ が分かる。
- (3) $\eta(x_j^\nabla)$ は、フレーム F_1 がスタックに push されてから (A) に至るまでの経過時間を表している。一方で、 k_2 は、 $J^{\nabla, \circ}$ が push される時点の F_2 の z の値に $\eta(x_j^\nabla)$ を加えたものなので、 $k_2 \geq \eta(x_j^\nabla)$ が成立する。また、 $k'_2 = k_2 + \delta$ かつ $\eta'(x) \leq \eta(x) + \delta$ であるから、これらをまとめると以下が成立する：

$$\begin{aligned} \eta(x_j^\nabla) - \eta(x) &\leq k_2 - \eta(x) = k'_2 - (\eta(x) + \delta) \\ &\leq k'_2 - \eta'(x). \end{aligned}$$

- (4) 地点 (B) に注目すると、 $\eta'(x_j^\blacktriangle)$ はフレーム F_3 が push されて、 (B) に至るまでに経過した時間を表しているため、 $k'_2 \leq \eta'(x_j^\blacktriangle)$ も明らかである。したがって、 $k'_2 - \eta'(x) \leq \eta'(x_j^\blacktriangle) - \eta'(x)$ が成立する。

この議論では、(3) で、 $k'_2 = k_2 + \delta$ が成立するのが重要である。 $\eta(x_j^\nabla) - \eta(x) \leq k_2 - \eta(x)$ は (A) のみから導かれるが、 (A) から経過した時間 δ を考慮して $k_2 - \eta(x) = (k_2 + \delta) - (\eta + \delta)(x) \leq k'_2 - \eta'(x)$ を示すには、 $k'_2 \geq k_2 + \delta$ と $\eta'(x) \leq (\eta + \delta)(x)$ の 2 つを示す必要がある。後者はつねに成立するが、前者を示すには、 $J^{\nabla, \circ}$ を持つフレームを pop した後に、 F_2 で $\text{reset}(z)$ が行われなかったという条件が必要となる。 $K\text{-TPDA } \mathcal{D}$ の構成で、 reset の際には \cdot° を付与するようにしたことで、次節の補題 12 で見るが、スタックトップが J° ではなく J で予想されている場合には、上のような $\text{reset}(z)$ が行われな部分計算を持つように分解できる。

9.3 補題 10 の証明とそのための準備

補題 10 を証明するために、補題 7 と補題 8 に対応する性質を証明する。 \mathcal{D} のスタック w が以下を満たすとき、 w は *well-formed* であるという：

$$w \in \mathcal{F}(I_\uparrow) \cdot \mathcal{F}(I) \cdot \mathcal{F}(I_\downarrow)$$

ここで、 $\mathcal{F}(J)$ は以下のように定義される：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(J) \triangleq &\epsilon \cup \Upsilon(J^{\blacktriangle, \circ}) \cup \Upsilon(J^\blacktriangle) \cdot \Upsilon(J)^* \\ &\cup \Upsilon(J^\blacktriangle) \cdot \Upsilon(J)^* \cdot (\Upsilon(J^\circ) \cup \Upsilon(J^{\nabla, \circ})). \end{aligned}$$

ただし、 $\Upsilon(J) \triangleq (\Gamma \times \{J\}) \times (\mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$ とする。

補題 11. $K\text{-TPDA } \mathcal{D}$ について、計算状況 $\langle q, \eta, w \rangle$ が到達可能であるとすると、 w は *well-formed* である。

証明. 補題 7 と同様にして証明できる。 \square

補題 12. $c' = \langle q', \eta', \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle$ を到達可能な計算状況とする。このとき、以下を満たす計算列が存在する：

$$\begin{aligned} &\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow^* \\ &\langle q, \eta, \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu \rangle \dots \langle (\gamma_j, J^{\nabla, \circ}), \mu_j \rangle \rangle \\ &\xrightarrow{\text{POP}} \langle q, \eta, \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu \rangle \dots \rangle \Rightarrow_\#^* \\ &c' = \langle q', \eta', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu'_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle. \end{aligned}$$

特に、 $\Rightarrow_\#^*$ の部分では、 (γ, J) を持つフレームに対して $\text{reset}(z)$ に対応する遷移が行われな。

証明のアイデア. まず補題 8 と同じ発想で、 $\Rightarrow_\#^*$ の部分で $\text{reset}(z)$ を行うかもしれないが、それ以外は条件を満たす計算列の存在を保障できる。

そのように保障した計算列をさらに分解し、望む計算列を得る。仮に $\Rightarrow_\#^*$ で $\text{reset}(z)$ に対応する遷移が行われていたとすると、最後に行われた箇所について注目し、 $\Rightarrow_\#^*$ を以下のように分解する (簡単のため、状態や割当ては無視する)：

$$\begin{aligned} &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle (\gamma, J) \dots \Rightarrow^* \\ &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle (\gamma, J) \xrightarrow{\text{check}(\gamma, J)^\# \text{rew}(\gamma, J^\circ)^\# \text{reset}(z)^\# \text{reset}(J)^\#} \star \\ &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle (\gamma, J^\circ) \Rightarrow^* \xrightarrow{\text{push}} \\ &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle (\gamma, J) \langle \gamma', J^{\nabla, \circ} \rangle \Rightarrow^* \\ &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle (\gamma, J) \dots \langle \gamma'', J^{\nabla, \circ} \rangle \xrightarrow{\text{POP}} \Rightarrow^* \\ &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle (\gamma, J) \end{aligned}$$

1 度 $\text{reset}(z)$ に対応する遷移が行われると、 $J \mapsto J^\circ$ への書き換えが行われ、再び $J^\circ \mapsto J$ を行うには push を行うこととなるため、上のような構造が必ず現れる。最後に実行した $\text{reset}(z)$ に対応する遷移が $\xrightarrow{\text{POP}} \Rightarrow^*$ であるから、

$$\begin{aligned} &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle \underline{(\gamma, J)} \dots \langle \gamma'', J^{\nabla, \circ} \rangle \xrightarrow{\text{POP}} \Rightarrow^* \\ &\dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle) \dots \langle \underline{(\gamma, J)} \end{aligned}$$

の間には、 $\underline{(\gamma, J)}$ を持つフレームに対する $\text{reset}(z)$ 相当の遷移はない。よって、補題の 2 つ目の条件を満足できた。 \square

補題 10 の証明.

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_{\mathcal{D}}^* \langle p, \eta', \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle \Rightarrow_{\mathcal{D}}^* \langle q_F, \eta_F, \epsilon \rangle$$

を、補題 12 を用いて、以下のように分解する：

$$\begin{aligned} &\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow^* \\ &\langle q, \eta, \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu \rangle \dots \langle (\gamma_j, J^{\nabla, \circ}), \mu_j \rangle \rangle \\ &\xrightarrow{\text{POP}} \langle q', \eta, \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu_i \rangle \dots \langle \underline{(\gamma, J)}, \mu \rangle \dots \rangle \Rightarrow_\#^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c' &= \langle p, \eta', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu'_i \rangle \dots \langle (\gamma, J), \mu' \rangle \rangle \Rightarrow^* \\ &\langle p', \eta'', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu''_i \rangle \rangle \xrightarrow{\text{pop}} \\ &\langle p'', \eta'', \dots \langle (\gamma_i, J^\blacktriangle), \mu''_i \rangle \rangle \Rightarrow^* \epsilon. \end{aligned}$$

このとき、pop の定義から $\eta(x_j^\blacktriangledown) - \eta(x) \in J$ と、 $\eta''(x_j^\blacktriangle) - \eta''(x) \in J$ が分かるので、命題 1 により、次を示せば $\mu'(z) - \eta'(x) \in J$ が成立することが分かる：

$$\eta(x_j^\blacktriangledown) - \eta(x) \leq \mu'(z) - \eta'(x) \leq \eta''(x_j^\blacktriangle) - \eta''(x).$$

このことは、 \Rightarrow^* の間に $\langle (\gamma, J), \mu \rangle$ のフレームについて reset(z) 相当の操作が行われなことを利用し、9.2 節で行ったことと同じ議論を行えば、証明できる。□

補題 10 は、スタックトップに J があるときのことを扱っているが、 J^\blacktriangle があるときにも、同じことが成立する。

補題 13. 以下の計算列を考える。

$$\langle q_{\text{init}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow_D^* \langle p, \eta, \dots \langle (\gamma, J^\blacktriangle), \mu \rangle \rangle \Rightarrow_D^* \langle q_F, \eta_F, \epsilon \rangle$$

このとき、 $\mu(z) - \eta(x) \in J$ が成立する。

9.4 MTPDA の Untiming 定理

補題 9, 10 および 13 を用いれば、定理 1 と同様にして $L_\epsilon(B) = L_\epsilon(D)$ を証明できる。

定理 2. 予測付き K -TPDA B と、 $z - x \in ? I$ を除去した予測付き K -TPDA D で、 $L_\epsilon(B) = L_\epsilon(D)$ が成立する。

D には、 B にはない大域クロックの比較 ($x_j^\blacktriangle - x \in ? J$ や $\mathbb{C}_J - x \in ? J$) が追加されている。ただし、局所クロックを用いる区間検査や比較検査はいっさい追加されない。

この定理から、与えられた K -TPDA A に対応する、言語等価な 0-TPDA \mathcal{E} が構成できる。

系 1. A を K -TPDA とする。このとき、0-TPDA \mathcal{E} で、 $L(A) = L(\mathcal{E})$ とするものが構成できる。

証明. 命題 2 により、 $L(A) = L_\epsilon(A_\epsilon)$ とする、最終状態空スタック受理 K -TPDA A_ϵ を構成する。

A_ϵ 中の、局所クロック同士の比較式 $z_1 - z_2 \in ? I$ を、命題 4 を繰り返し適用しすべて取り除く。この結果得られる K -TPDA を A_1 とする。 A_1 には、命題 4 を適用した副作用として、 A には本来含まれていなかった局所クロックに対する区間検査が含まれている可能性がある。

A_1 中の、局所クロックに対する区間検査 $z \in ? I$ を、命題 5 を繰り返し適用しすべて取り除く。この結果得られる K -TPDA を A_2 と呼ぶ。この A_2 には、 A_1 には含まれていなかった局所-大域比較が含まれている可能性がある。

A_2 中の、大域-局所比較 $x - z \in ? I$ を、命題 6 を繰り返し適用しすべて取り除く。この結果得られる K -TPDA を A_3 と呼ぶ。この A_3 に含まれているのは、大域区間検査 $x \in ? I$ 、大域比較検査 $x_1 - x_2 \in ? I$ 、または局所-大域比較検査 $z - x \in ? I$ の 3 種類である。

最後に、定理 2 を繰り返し適用することで、局所-大域比較検査 $z - x \in ? I$ をすべて取り除く。この結果得られる K -TPDA を A_4 と呼ぶことにする。

$$A_4 = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \Delta, q_{\text{init}}, F)$$

とすると、 Δ 中の検査は、大域区間検査 $x \in ? I$ と、大域比較検査 $x_1 - x_2 \in ? I$ の 2 種類である。ただし局所クロックに対する reset は存在するので、そのようなもの全体を $\mathcal{R} = \{\text{reset}(z_1), \dots\} \subseteq \Delta$ とする。局所クロックの値を検査する術は Δ 中にないので、局所クロックの値は計算に影響しない。したがって、局所クロックをすべて取り去り、以下の 0-TPDA \mathcal{E}_ϵ を定義できる：

$$\mathcal{E}_\epsilon = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \emptyset, \Delta \setminus \mathcal{R}, q_{\text{init}}, F).$$

このとき、 $L(A) = L_\epsilon(A_4) = L_\epsilon(\mathcal{E}_\epsilon)$ が成立する。 \mathcal{E}_ϵ をもとに、 $L_\epsilon(\mathcal{E}_\epsilon) = L(\mathcal{E})$ とする 0-TPDA \mathcal{E} も構成できる。□

Untiming 定理の応用：空性判定問題の決定可能性

0-TPDA は、Bouajjani らの提案した Pushdown Timed Automata (PTA) [7] と本質的に等しく、PTA に関する結果を用いると、MTPDA の空性問題と到達可能性問題の決定可能性を示せる。

系 2. • MTPDA の言語の空性判定問題は決定可能である。すなわち、 K -TPDA A について、言語の空性判定 $L(A) = ? \emptyset$ を解くことができる。

- MTPDA の到達可能性問題が決定可能である。すなわち、 K -TPDA A と、その状態 q が与えられたときに、 $\langle q_{\text{ini}}, \mathbf{0}, \epsilon \rangle \Rightarrow^* \langle q, \nu, w \rangle$ とする ν, w が存在するかどうかを解くことができる。

証明. K -TPDA の到達可能性問題は、別の K -TPDA の空性判定に変換できるので、空性判定の決定可能性を示す。系 1 により、言語等価な 0-TPDA (PDTA) \mathcal{E} が構成できる。PTA の空性判定問題は、受理状態への到達可能性問題 (の論理和) に変換でき、一方で、Bouajjani らの結果により PTA の到達可能性問題は決定可能 [7] である。□

10. 関連研究

本章では、大きく分けて以下 2 つの内容を扱う。

10.1 節で、Abdulla らの DTPDA と MTPDA の関連を述べる。序論でも言及したが、Clemente らの TPDA は、Abdulla らの DTPDA の完全な拡張ではなく、DTPDA において許されていた (大域) クロックの更新と呼ばれる操作を取り除かれている。しかし、この更新と呼ばれる操作を取り除いても DTPDA の言語クラスが変化しないことを述べ、その意味では TPDA が DTPDA の拡張になっていることをみる。同時に、なぜ TPDA では更新操作を考えないかについても述べる。

10.2 節で、局所クロックを複数持つ既存の拡張との比較を行う。

10.1 Abdulla らの DTPDA と MTPDA の比較

Clemente らは、Abdulla らの DTPDA をもとに TPDA を提案し、TPDA における Untiming 定理を示した。ところが、TPDA と DTPDA には、自明ではない差があるため、2つの言語クラスが等しいかどうかは明らかではない。Clemente らの論文 [12] ではこの点に関する議論が行われていなかったが、本節では2つの体系の言語クラスが等しいことをみる。

10.1.1 DTPDA の定義

DTPDA は、1-TPDA における以下の操作を取り除き：

- 比較による検査 $c_1 - c_2 \in? I$
 - 局所クロックのリセット $\text{reset}(z)$
 - 局所クロックの区間検査 $z \in? I$
- 代わりに以下の操作を加えることで得られる：
- + 区間を用いた大域クロックの更新 $x \leftarrow I$
 - + push 時に区間を用いた局所クロックへの値の割当て $\text{push}(\gamma, I)$
 - + pop 時に区間を用いた局所クロックの検査 $\text{pop}(\gamma, I)$
- 形式的には DTPDA \mathcal{A} は八つ組 $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \mathcal{X}, \{z\}, \partial, q_{\text{init}}, F)$ であり、 ∂ を除く各要素は MTPDA と同様の意味を持つ。 $\partial \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Op_{\text{DTPDA}} \times Q$ は遷移規則の有限集合であり、 Op_{DTPDA} は以下の文法で定義される操作の集合である：

$$Op_{\text{DTPDA}} ::= \text{nop} \mid x \in? I \mid x \leftarrow I \mid \text{push}(\gamma, I) \mid \text{pop}(\gamma, I)$$

ここで $\gamma \in \Gamma$, $x \in \mathcal{X}$, I は非空な区間とする。DTPDA の計算状況 $\langle q, \nu, w \rangle$ は 1-TPDA と同様である。

遷移規則 $p \xrightarrow{\tau} q \in \partial$ について、 τ の場合分けで、ラベル付き遷移関係 $c_1 \xrightarrow{\tau} c_2$ が以下で定義される（ここでは MTPDA になかった3つの規則を扱う）：

$$x \leftarrow I: \frac{x \in \mathcal{X} \quad k \in I \cap \mathbb{R}_{\geq 0}}{\langle p, \nu, w \rangle \xrightarrow{x \leftarrow I} \langle q, \nu[x := k], w \rangle},$$

$$\text{push}(\gamma, I): \frac{k \in I \cap \mathbb{R}_{\geq 0}}{\langle p, \nu, w \rangle \xrightarrow{\text{push}(\gamma, I)} \langle q, \nu, w \langle \gamma, k \rangle \rangle},$$

$$\text{pop}(\gamma, I): \frac{k \in I}{\langle p, \nu, w \langle \gamma, k \rangle \rangle \xrightarrow{\text{pop}(\gamma, I)} \langle q, \nu, w \rangle}.$$

DTPDA の言語は MTPDA と同様に定義されるため、ここでは省略する。

10.1.2 $\mathcal{L}(\text{DTPDA}) = \mathcal{L}(\text{TPDA})$

本項で、DTPDA と TPDA の言語クラスが等しいこと $\mathcal{L}(\text{DTPDA}) = \mathcal{L}(\text{TPDA})$ を述べる。 $\mathcal{L}(\text{TPDA}) = \mathcal{L}(\text{PTA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DTPDA})$ は明らかであるから、

$\mathcal{L}(\text{DTPDA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{TPDA})$ を確認すればよい。そのために、次の標準化に関する性質が成立することをみる：

どんな DTPDA \mathcal{A} についても、 $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ を満たす DTPDA \mathcal{B} で、 \mathcal{B} の遷移規則中に $x \leftarrow I$ があるならば、 $I = [0:0]$ を満たすものが存在する。

DTPDA における区間を用いた大域クロックの更新 $x \leftarrow I$ は、DTPDA で新しく考えられた操作ではなく、更新可能時間オートマトン (Updatable timed automata) と呼ばれる時間オートマトンの拡張で研究されたものである。時間オートマトンにおけるクロックの更新は $x \leftarrow [0:0]$ の形だけが許されているが、これを区間を用いた $x \leftarrow I$ の形に一般化したものが更新可能時間オートマトンである [9], [10], [11]。Bouyer らは、論文 [9], [10] において、比較制約が存在しない更新可能時間オートマトンから、言語等価な時間オートマトンを構成する手続きを与えている。この手続きそのまま DTPDA に適用することができるため、結果として上で述べた標準化が成立し、 $\mathcal{L}(\text{DTPDA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{TPDA})$ が分かる。

10.1.3 DTPDA with diagonal constraints

Clemente らの TPDA は、DTPDA の大域クロックに対する更新 $x \leftarrow I$ を 0-値へのリセット $x \leftarrow [0:0]$ に制限し、その一方で比較検査 $c_1 - c_2 \in? I$ を付与したものだと考えられる。このとき、0-値へのリセットへ制限せず、DTPDA に比較検査を加えた計算モデルを考えることもできる。これは自然な発想であるが、その結果得られるモデルはチューリングマシンを模倣することができる強力なものとなり、言語の空性判定問題や到達可能性問題の決定可能性が崩れてしまう。この結果は、比較検査を許す更新可能時間オートマトンがチューリングマシンを模倣可能という結果 [10], [11] から導かれる。Clemente らの TPDA で更新を $x \leftarrow [0:0]$ に限定したのは、論文 [12] で明確な言及がされているわけではないが、この問題を回避するためということと、上述のとおり DTPDA においては更新操作が本質的ではなかったことの2つが考えられる。

10.2 複数の局所クロックを持つ計算モデル

10.2.1 時間経過がスタック全体に及ぶモデル

到達可能性問題が決定可能で、複数の局所クロックを持つ体系としては、Li らによる Nested Timed Automata (NeTA) [15] がある。この体系では、クロックの比較検査を許さないが、更新可能時間オートマトンに見られるクロックの更新操作 $x \leftarrow I$ を許している [10]。NeTA は大域クロックを持たないが、TPDA と同じように大域クロックを追加した拡張を考えることもできる。そのようにしても到達可能性問題は決定可能であることが示せ、このとき明らかに（拡張された）NeTA の言語クラスは TPDA の言語クラスを含む。ただし、2つの言語クラスが一致するかどうかは明らかでない。これは、大域クロックに対する

更新操作の標準化とは異なり、局所クロックの更新操作の標準化については Bouyer らの手法がただちに適用できないことが原因である。大域クロックを持つように拡張した NeTA と TPDA の言語クラスが一致するかどうかは興味深い問題となっている。

一方で、到達可能性問題が決定可能であり、かつ TPDA の言語クラスを真に含むものとして、我々の提案した Synchronized Recursive Timed Automata (SRTA) [18] がある。SRTA も複数の局所クロックを持つ体系であり、特に fractional constraint と呼ばれる制約式を持っている。この制約式を用いることで、SRTA では次の言語 L_{SRTA} を受理することができるが、一方でこの言語は TPDA で受理できないことが分かっている [18]：

$$L_{SRTA} \triangleq \{ (r_1, a)(r_2, a) \dots (r_n, a)(r'_n, \bar{a}) \dots (r'_2, \bar{a})(r'_1, \bar{a}) : r'_i - r_i \in \mathbb{N} \}.$$

10.2.2 時間経過がスタックトップに限定されたモデル

その他の複数の局所クロックを持つ計算モデルとしては、Benerecetti らによる Timed Recursive State Machines (TRSM) [4], [5], Trivedi らによる Recursive Timed Automata (RTA) [17] がある。TRSM と RTA は、どちらも Alur らの Recursive State Machines [3] を拡張したもので、等価な計算モデルである。

TRSM と RTA では時間遷移において、スタックトップの局所クロックの値だけを進めるという点で、MTPDA と異なる。この違いは決定的で、TRSM と RTA では言語の空性判定問題が決定不能となる。一方で、pass-by-reference RTA や、pass-by-value RTA、あるいはこの両方の特徴をあわせ持つ glitch-free RTA といった、空性判定問題が決定可能となるサブクラスが知られている [17]。これらサブクラスの定義は省略するが、pass-by-reference RTA と PTA は同等な計算モデルであり、その言語クラスも等しい。Pass-by-value RTA は、時間遷移でスタックトップだけ影響を受ける、大域クロックを1つも持たない MTPDA だと思えることができる。この pass-by-value RTA でも、上で見た言語 L_{SRTA} を受理することができる。

10.2.3 時間経過がスタックの一部に影響するモデル

Li らは、DTPDA with Frozen Ages (DTPDA-F) [16] と呼ばれる、スタックの各フレームについて時間経過による影響を受けるかどうかを指定できる計算モデルを提案した。DTPDA-F は、DTPDA に freeze push $fpush(\gamma)$ と呼ばれる新たなスタックへのプッシュ操作と、局所クロックから大域クロックへの値のコピー $x \leftarrow z$ ならびに、大域クロックから局所クロックへの値のコピー $z \leftarrow x$ を加えて得られる。大域クロックと、通常の $push(\gamma)$ で作られたフレームは時間経過による影響を受けるが、freeze push され

たフレームは時間経過による影響を受けない。この freeze push だけを行う DTPDA-F で pass-by-value RTA を模倣することができる。

ただし DTPDA-F は、pass-by-value RTA と異なり、大域クロックを持ち、大域クロックと局所クロック間で値の受け渡しを行えるため、一般には言語の空性判定問題および到達可能性問題が決定不能となることが分かっている [16]。一方で、大域クロックの個数を1つに限定した場合には決定可能となることが示されている。

11. 結論と今後の課題

Abdulla らの導入した、時間オートマトンとプッシュダウン・オートマトンの両方の特性を持つ計算モデル、時間プッシュダウン・オートマトン (Dense-timed Pushdown Automata, TPDA) を拡張する新たな計算モデルとして、複数の局所クロックを持つ TPDA を導入した。K-TPDA は、K 個の局所クロックを持つ TPDA であり、特に 1-TPDA が Abdulla らの TPDA (に局所クロックの reset や比較制約を加えたもの) に対応する。0-TPDA は、局所クロックを1つも持たない TPDA で、これは時間オートマトンに、(クロックを持たない) スタックを追加した計算モデルである。Clemente らが証明した、与えられた TPDA から局所クロックをすべて取り除くことができるという Untiming 定理 (1-TPDA には、言語等価な 0-TPDA が存在する) を拡張し、任意の K-TPDA から、言語等価な 0-TPDA が構成できることを証明した。我々の証明手法は、Clemente らの Untiming 定理の証明をもとにしたものではあるが、彼らの証明では扱っていなかった reset 操作と、どこでも局所クロックの値を検査できるという一般化を扱えるようになっていく。

今後の課題として、MTPDA に、Li らの DTPDA-F でみられる大域クロックと局所クロック間での値の受け渡し操作 ($x \leftarrow z, z \leftarrow x$) [16] を加えて言語が拡張されるかどうかを考えている。この拡張では、局所クロックの値を大域クロックに記憶させることができるため、スタック中の離れた2つの局所クロックの値を比較できる点で興味深い。現在はまず、MTPDA から比較制約を取り除いたうえで受け渡し操作を加えた場合に、Untiming 定理が成立するかどうか、という問題に本論文の手法を用いて取り組んでいる。

謝辞 本原稿を注意深く読んでいただき、価値ある助言をいただいたことに対して、匿名査読者に感謝する。本研究は JSPS 科研費 15J01843 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Abdulla, P., Atig, M. and Stenman, J.: Dense-Timed Pushdown Automata, *LICS'12*, IEEE, pp.35–44 (2012).
- [2] Alur, R. and Dill, D.: A theory of timed automata, *TCS*,

- Vol.126, No.2, pp.183–235 (1994).
- [3] Alur, R., Benedikt, M., Etessami, K., Godefroid, P., Reps, T. and Yannakakis, M.: Analysis of Recursive State Machines, *ACM Trans. Prog. Lang. Syst.*, Vol.27, No.4, pp.786–818 (2005).
 - [4] Benerecetti, M., Minopoli, S. and Peron, A.: Analysis of Timed Recursive State Machines, *TIME'10*, IEEE, pp.61–68 (2010).
 - [5] Benerecetti, M. and Peron, A.: Timed recursive state machines: Expressiveness and complexity, *TCS*, Vol.625, pp.85–124 (2016).
 - [6] Bérard, B., Diekert, V., Gastin, P. and Petit, A.: Characterization of the Expressive Power of Silent Transitions in Timed Automata, *Fundam. Inf.*, Vol.36, No.2, pp.145–182 (1998).
 - [7] Bouajjani, A., Echahed, R. and Robbana, R.: On the automatic verification of systems with continuous variables and unbounded discrete data structures, *Hybrid Systems II*, pp.64–85, Springer (1995).
 - [8] Bouajjani, A., Esparza, J. and Maler, O.: Reachability analysis of pushdown automata: Application to model-checking, *CONCUR'97*, pp.135–150, Springer (1997).
 - [9] Bouyer, P., Dufourd, C., Fleury, E. and Petit, A.: Expressiveness of Updatable Timed Automata, *MFCS'00*, pp.232–242, Springer (2000).
 - [10] Bouyer, P., Dufourd, C., Fleury, E. and Petit, A.: Updatable timed automata, *TCS*, Vol.321, No.2–3, pp.291–345 (2004).
 - [11] Bouyer, P., Dufourd, C., Fleury, E. and Petit, A.: Are Timed Automata Updatable?, *CAV'00*, LNCS, Vol.1855, pp.464–479, Springer (2000).
 - [12] Clemente, L. and Lasota, S.: Timed pushdown automata revisited, *LICS'15*, IEEE, pp.738–749 (2015).
 - [13] Clemente, L. and Lasota, S.: Timed pushdown automata revisited, *CoRR*, Vol.abs/1503.02422 (online), available from <http://arxiv.org/abs/1503.02422> (2015).
 - [14] Finkel, A., Willems, B. and Wolper, P.: A direct symbolic approach to model checking pushdown systems, *INFINITY'97*, pp.27–37, Elsevier (1997).
 - [15] Li, G., Cai, X., Ogawa, M. and Yuen, S.: Nested Timed Automata, *FORMATS'13*, pp.168–182, Springer (2013).
 - [16] Li, G., Ogawa, M. and Yuen, S.: Nested Timed Automata with Frozen Clocks, *FORMATS'15*, pp.189–205, Springer (2015).
 - [17] Trivedi, A. and Wojtczak, D.: Recursive Timed Automata, *ATVA'10*, pp.306–324, Springer (2010).
 - [18] Uezato, Y. and Minamide, Y.: Synchronized Recursive Timed Automata, *LPAR-20*, pp.249–265, Springer (2015).



上里 友弥 (学生会員)

1989 年生まれ。2013 年筑波大学情報学群情報科学類卒業。2015 年筑波大学大学院システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻博士前期課程修了。同年博士後期課程進学。また同年より日本学術振興会特別研究員。形式言語理論、定理証明支援系に興味を持つ。