

# 重み付き経験分布と差分進化による機会制約問題の解法

田川 聖治<sup>1,a)</sup>

**概要:** 本稿では、計算統計学の技法である経験分布を拡張した重み付き経験分布と、進化計算アルゴリズムの1種である差分進化を組み合わせた独自の機会制約問題の解法を改良する。まず、Bonferroniの不等式を利用することで、累積分布関数の近似に基づく従来の解法を、個別機会制約問題のみならず、同時機会制約問題にも適用可能とする。さらに、機会制約条件に含まれる確率変数の相関関係を考慮した新たな重み付き経験分布の構築法を提案する。最後に、それらの有効性を貯水池の設計問題で実証する。

## 1. はじめに

現実の世界において様々な意思決定に関わる諸問題は、最適化問題として記述できる。しかし、それらの多くは予測することが難しい不確実性を含む最適化問題である。ここで、不確実性を考慮した最適化問題の定式化は、非確率論的なものと確率論的なものに大別される [1]。

最悪状況を考慮するロバスト最適化問題 [2] は、非確率論的な問題の定式化である。現実の世界でも大きなリスクを避けるため、最悪状況を想定した意思決定が望まれる場合はあるが、一般的にロバスト最適化問題の解は保守的であり、経済的な合理性を欠くものとなる恐れがある。

機会制約問題は確率論的な問題の定式化の1つであり、制約条件が満たされないリスクを確率で評価することで、経済性を加味した合理的な解が得られる。しかし、機会制約問題の解を求めるためには、計算コストの大きなモンテカルロ法で生成した膨大な数の標本による確率の計算が必要となる。また、機会制約問題に対する既存の解法は、関数の微分可能性や凸性を前提とした非線形計画法に基づくものである [3], [4]。近年、進化計算アルゴリズムを用いた機会制約問題の解法も報告されているが [5], [6]、解の実行可能性の評価ではモンテカルロ法を使用している。

機会制約問題は個別機会制約問題と同時機会制約問題に大別される [4]。著者らは、計算統計学の技法である経験分布 [7] を拡張した重み付き経験分布 [8] と、進化計算アルゴリズムの1種である差分進化 [9] を組み合わせた個別機会制約問題の解法を提案している [10], [11]。提案した解法は、重み付き経験分布で累積分布関数を近似することで、モンテカルロ法よりも遥かに少ない標本数で解の実行可能

性を評価し、差分進化により大域的最適解を探索する。

本稿では、上記の解法を以下の2点で改良する。まず、Bonferroniの不等式 [3] を利用することで、同時機会制約問題にも適用可能とする。次に、機会制約条件に含まれる確率変数の相関関係を考慮した新たな重み付き経験分布の構築法を提案する。最後に、それらの有効性をゲリラ豪雨の被害を防ぐための貯水池の設計問題 [12] で実証する。

## 2. 機会制約問題

機会制約問題は個別機会制約問題と同時機会制約問題に大別される。以下に、機会制約問題の記述に用いる記号を定義する。充足水準  $\alpha$  は設計者が任意に与える。

**決定変数**  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{D_x}) \in \mathbf{X} = [\underline{x}_j, \bar{x}_j]^{D_x} \subseteq \mathcal{R}^{D_x}$

**確率変数 (不確実性)**  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{D_\xi}) \in \Xi \subseteq \mathcal{R}^{D_\xi}$

**可測関数**  $g_m : \mathbf{X} \times \Xi \rightarrow \mathcal{R}, m = 1, \dots, M$

**目的関数 (最小化)**  $g_0 : \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}$

**充足水準 (確率)**  $\alpha \in (0, 1)$

### 2.1 個別機会制約問題

個別機会制約問題では、 $M$  個の各制約条件が満たされる確率が  $\alpha$  以上であり、下記のように定式化される。

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & \Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0) \geq \alpha, \\ & m = 1, \dots, M \\ & \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, j = 1, \dots, D_x \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $\Pr(A)$  は事象  $A$  が起きる確率である。

### 2.2 同時機会制約問題

同時機会制約問題では、すべての制約条件が満たされる確率が  $\alpha$  以上であり、下記のように定式化される。

<sup>1</sup> 近畿大学 理工学部  
<sup>a)</sup> tagawa@info.kindai.ac.jp

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & \\ & \Pr \left( \begin{array}{c} \forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \\ m = 1, \dots, M \end{array} \right) \geq \alpha \\ & \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, j = 1, \dots, D_x \end{cases} \quad (2)$$

### 2.3 累積分布関数による定式化

機会制約問題において、 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  は確率変数であるため、関数値  $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}$  も確率変数となり、その累積分布関数 (CDF: Cumulative Distribution Function) は

$$F_m(\mathbf{x}, \gamma) = \Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \quad (3)$$

となる。CDF は解  $\mathbf{x}$  に依存することに注意されたい。

関数値の CDF を用いて、各機会制約問題を記述する。まず、式 (1) の個別機会制約問題は以下の通りである。

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & F_m(\mathbf{x}, 0) \geq \alpha, m = 1, \dots, M \\ & \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, j = 1, \dots, D_x \end{cases} \quad (4)$$

次に、式 (2) の同時確率を式 (3) の CDF を用いて記述するため、以下の Bonferroni の不等式 [3] を利用する。

$$\Pr(A_1 \wedge \dots \wedge A_M) \geq \sum_{m=1}^M \Pr(A_m) - M + 1 \quad (5)$$

式 (3) と式 (5) より、式 (2) の同時機会制約問題は

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & \sum_{m=1}^M F_m(\mathbf{x}, 0) - M + 1 \geq \alpha \\ & \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, j = 1, \dots, D_x \end{cases} \quad (6)$$

となる。

式 (3) の関数値  $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  の CDF が分かれば、式 (4) や式 (6) の最適化問題を解くことで機会制約問題の解が得られる。ここで、確率変数  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  の確率分布は既知であるとする。しかし、現実的な問題では関数  $g_m$  が非常に複雑であったり、ブラック・ボックスであったりするため、 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  の確率分布から  $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  の CDF を解析的に求めることはできない。このため、式 (3) の CDF は未知とする。

## 3. 累積分布関数の近似

### 3.1 経験分布 (ECDF: Empirical CDF)

関数値の標本から式 (3) の CDF を近似する計算統計学の技法 ECDF [7] を紹介する。まず、確率変数  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  の  $N$  個の標本  $\boldsymbol{\xi}^n$ ,  $n = 1, \dots, N$  から、任意の解  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  に対する関数値の標本  $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n)$  を求める。さらに、関数値の標本に対して、以下の指示関数  $\mathbb{1}$  を定義する。

$$\mathbb{1}(g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \leq \gamma) = \begin{cases} 1; & \text{if } g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \leq \gamma \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

ここで、以下のように標本から ECDF を構築する。

$$F_m(\mathbf{x}, \gamma) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}(g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \leq \gamma) \quad (8)$$

式 (8) の  $F_m(\mathbf{x}, \gamma)$  を平滑化した  $\tilde{F}_m(\mathbf{x}, \gamma)$  で式 (3) の  $F_m(\mathbf{x}, \gamma)$  を近似する。ECDF の欠点として、一般的に確率変数  $\boldsymbol{\xi}$  の確率分布には濃淡があり、その密度が薄い部分から得られる標本  $\boldsymbol{\xi}^n$  は少ないため、CDF を高精度に近似するには、標本数  $N$  を十分に大きくする必要がある。

### 3.2 重み付き経験分布 (W\_ECDF: Weighted ECDF)

確率変数  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  の標本を台  $\Xi$  からあまねく採取するため、本来の確率分布に代えて一様分布を用いる。まず、次元数  $D_\xi$  の一様分布の台  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{D_\xi}$  を適切に設定し、一様分布に従う標本  $\mathbf{u}^n \in \mathcal{S}$  から関数値の標本  $g_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n)$  を求める。次に、各標本  $\mathbf{u}^n \in \mathcal{S}$  に本来の  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  の確率密度関数 (PDF: Probability Density Function) の値  $f(\mathbf{u}^n)$  で重みを付けた後、式 (9) のように W\_ECDF を構築する。

$$\begin{cases} F_m(\mathbf{x}, \gamma) = \frac{1}{W} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{u}^n) \mathbb{1}(g_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n) \leq \gamma) \\ W = \sum_{n=1}^N f(\mathbf{u}^n) \end{cases} \quad (9)$$

式 (9) の  $F_m(\mathbf{x}, \gamma)$  を平滑化した  $\tilde{F}_m(\mathbf{x}, \gamma)$  で式 (3) の  $F_m(\mathbf{x}, \gamma)$  を近似する。先行研究 [10], [11] の W\_ECDF では、確率変数  $\xi_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, D_\xi$  は互いに独立であるとし、一様分布の台  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{D_\xi}$  は超直方体で設定した。

#### 3.2.1 一様分布の台の設定法

確率変数  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$  の相関関係を考慮した一様分布の台  $\mathcal{S}$  の設定法を提案する。一様分布の台  $\mathcal{S}$  は本来の確率分布の台  $\Xi$  を覆うような平行多面体とする。このとき、確率変数  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$  は平均  $\boldsymbol{\mu}$  と分散共分散行列  $\mathbf{V}$  によって定義された以下のような多変量の一様分布に従うものとする。

$$\mathbf{u} \sim \mathcal{U}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) \quad (10)$$

式 (10) の一様分布の平均  $\boldsymbol{\mu}$  と分散共分散行列  $\mathbf{V}$  の求め方を説明する。まず、本来の各確率変数  $\xi_j \in \mathbb{R}$  の分布範囲を覆うように、一様分布に従う各確率変数  $u_j \in [\underline{u}_j, \bar{u}_j]$  の上限値  $\bar{u}_j$  と下限値  $\underline{u}_j$  を決める。このとき、一様分布に従う確率変数  $u_j \in [\underline{u}_j, \bar{u}_j]$  の平均  $\mu_j$  と分散  $\sigma_j^2$  は

$$\mu_j = \frac{\bar{u}_j + \underline{u}_j}{2} \quad (11)$$

$$\sigma_j^2 = \frac{(\bar{u}_j - \underline{u}_j)^2}{12} \quad (12)$$

となる [13]。ここで、式 (10) の一様分布の平均  $\boldsymbol{\mu}$  を

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{D_\xi}) \quad (13)$$

とする。

次に、一様分布に従う各確率変数  $u_j$  の標準偏差  $\sigma_j$  から、式 (14) のような対角行列  $\mathbf{B}$  を定義する。

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{D_\xi} \end{pmatrix} \quad (14)$$

確率変数  $\xi_i$  と  $\xi_j$  の相関係数  $\rho_{ij}$  から、相関行列  $\mathbf{R}$  を

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1D_\xi} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2D_\xi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{D_\xi 1} & \rho_{D_\xi 2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

とする。相関係数は  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ ,  $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$  である。

ここで、式 (10) の分散共分散行列  $\mathbf{V}$  を

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B} \quad (16)$$

とする。

### 3.2.2 一様分布に従う標本の生成法

式 (10) の一様分布に従う標本の生成法を説明する。まず、分散共分散行列  $\mathbf{V}$  を Cholesky 分解すると

$$\mathbf{V} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T \quad (17)$$

となる。ただし、 $\mathbf{L}$  は下三角行列である。

互いに独立な一様分布に従う確率変数  $\varepsilon_j \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ,  $j = 1, \dots, D_\xi$  の標本  $\varepsilon_j^n \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, \dots, N$  を生成する。ちなみに、式 (11) と式 (12) より、上記の確率変数  $\varepsilon_j \in \mathbb{R}$  は平均  $\mu_j = 0$ , 分散  $\sigma_j^2 = 1$  に標準化されている。

式 (10) の一様分布に従う標本  $\mathbf{u}^n \in \mathbf{S}$  は、式 (17) の行列  $\mathbf{L}$  と平均  $\boldsymbol{\mu}$  から、以下のように生成できる。

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon}^n + \boldsymbol{\mu}, \quad n = 1, \dots, N \quad (18)$$

ただし、 $\boldsymbol{\varepsilon}^n = (\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{D_\xi}^n) \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]^{D_\xi}$  である。

### 3.3 CDF の近似による定式化

提案する機会制約問題の解法では、式 (4) の個別機会制約問題、並びに、式 (6) の同時機会制約問題において、各関数値  $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  の CDF を、式 (9) の W\_ECDF を平滑化した関数  $\tilde{F}_m(\mathbf{x}, \gamma)$  で近似した最適化問題の解を求める。

式 (4) の個別機会制約問題は

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & \tilde{F}_m(\mathbf{x}, 0) \geq \beta, \quad m = 1, \dots, M \\ & \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, D_x \end{cases} \quad (19)$$

となり、式 (6) の同時機会制約問題は

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & \sum_{m=1}^M \tilde{F}_m(\mathbf{x}, 0) - M + 1 \geq \beta \\ & \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, D_x \end{cases} \quad (20)$$

となる。ただし、W\_ECDF の標本数  $N$  とその推定誤差を考慮した補正確率  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\beta \approx \alpha$  は適切に決める。

## 4. 差分進化に基づく最適化手法

差分進化 (DE: Differential Evolution) [9] に基づく最適化手法により、式 (19) や式 (20) の問題の解を求める。

### 4.1 DE における制約条件の取り扱い

制約条件付き最適化問題に DE を適用するため、制約違反量  $\phi$  を定義する。制約違反量が  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  ならば解  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  は実行可能であり、 $\phi(\mathbf{x}) > 0$  ならば解  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  は実行可能である。まず、式 (19) の個別機会制約問題では

$$\phi(\mathbf{x}) = \max \left\{ \max_m \{ \beta - \tilde{F}_m(\mathbf{x}, 0) \}, 0 \right\} \quad (21)$$

とする。また、式 (20) の同時機会制約問題では

$$\begin{cases} J_P(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \tilde{F}_m(\mathbf{x}, 0) + M - 1 \\ \phi(\mathbf{x}) = \max \{ \beta - J_P(\mathbf{x}), 0 \} \end{cases} \quad (22)$$

とする。 $J_P(\mathbf{x})$  は同時確率の推定値である。

### 4.2 DE のアルゴリズム

DE では対象とする最適化問題の解候補を個体と呼び、 $N_P$  個の個体  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, N_P$  の集団  $\mathbf{P}$  を保持し、より優れた個体によって集団を更新してゆく。通常、DE の探索性能は制御パラメータであるスケール係数  $S_F$  と交叉率  $C_R$  に左右される。そこで、本稿の DE では制御パラメータの自動調整法 [14] を採用し、各個体  $\mathbf{x}_i$  ごとにスケール係数  $S_{F,i}$  と交叉率  $C_{R,i}$  を割り当て、それらを適応的に変化させる。また、DE の世代交代モデルには同期型と非同期型があるが [15]、本稿の DE では後者を採用する。

以下に提案する DE のアルゴリズムを示す。

**手順 1** 個体  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ ,  $i = 1, \dots, N_P$  をランダムに生成して初期集団  $\mathbf{P}$  とする。全個体のスケール係数と交叉率を  $S_{F,i} = 0.5$ ,  $C_{R,i} = 0.9$  と初期化する [14]。

**手順 2** 各個体  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ ,  $i = 1, \dots, N_P$  を  $N$  回評価し、 $g_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}^n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  から  $\tilde{F}_m(\mathbf{x}_i, 0)$  を求める。

**手順 3** 終了条件を満たせば、実行可能な個体の中で目的関数値が最小の  $\mathbf{x}_b \in \mathbf{P}$  を解とする。実行可能な個体が集団  $\mathbf{P}$  に存在しなければ、探索は失敗である。

**手順 4** 各個体  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$  を順番にターゲット・ベクトルに指定し、手順 4.1 から手順 4.3 を繰り返す。

**手順 4.1** 新たな個体の候補であるトライアル・ベクトル

$z \in X \subseteq \mathcal{R}^{D_x}$  を生成する。まず、現在のターゲット・ベクトル  $x_i \in P$  の  $S_{F,i}$  と  $C_{R,i}$  から、スケール係数  $S_F$  と交叉率  $C_R$  を以下のように決める [14]。

$$S_F = \begin{cases} 0.1 + \omega_1 0.9; & \text{if } \omega_2 < 0.1 \\ S_{F,i}; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

$$C_R = \begin{cases} \omega_3; & \text{if } \omega_4 < 0.1 \\ C_{R,i}; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

ただし、 $\omega_k \in [0, 1]$  は一様乱数である。

次に、 $x_i \in P$  とは別に集団  $P$  からランダムに異なる3つの個体  $x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}$  ( $i \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3$ ) を選び、DEの戦略 (DE/rand/1/bin) [9] を用いて、 $z$  の要素  $z_j \in \mathcal{R}$ ,  $j = 1, \dots, D_x$  を以下のように決める。

$$z_j = \begin{cases} x_{r_1,j} + S_F(x_{r_2,j} - x_{r_3,j}); & \text{if } \omega_j < C_R \vee j = j_r \\ x_{i,j}; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

ただし、添字  $j_r \in [1, D_x]$  はランダムに選択する。

上記の結果、 $z$  の要素  $z_j$  が探索範囲  $[x_j, \bar{x}_j]$  の外側に作られた場合は、以下のように  $z_j$  を修正する。

$$z_j = \begin{cases} x_j; & \text{if } z_j < x_j \\ \bar{x}_j; & \text{if } z_j > \bar{x}_j \end{cases} \quad (26)$$

**手順 4.2** トライアル・ベクトル  $z \in X$  を  $N$  回評価し、 $g_m(z, u^n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  から  $\tilde{F}_m(z, 0)$  を求める。

**手順 4.3** トライアル・ベクトル  $z$  とターゲット・ベクトル  $x_i \in P$  を比較し、以下の3つの条件のうち、少なくとも1つが満たされれば、 $z$  が  $x_i \in P$  に勝ると判定し、直ちに  $x_i \in P$  を  $z$  で置き換える。

- $\phi(z) = 0 \wedge g_0(z) \leq g_0(x_i)$
- $\phi(z) = 0 \wedge \phi(x_i) > 0$
- $\phi(z) > 0 \wedge \phi(z) \leq \phi(x_i)$

また、その場合は  $S_{F,i} = S_F$ ,  $C_{R,i} = C_R$  とする。

**手順 5** 手順 3 に戻る。

#### 4.3 制約違反量の評価の高速化

DEのアルゴリズムの手順2と手順4.2では、 $N$ 個の関数値の標本からW\_ECDFを構築する。本稿では、W\_ECDFを構築する回数を減らすことで、制約違反量を高速に評価する技法を提案する。まず、関数値の標本  $g_m(x, u^n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  を以下のように昇順に並べる。

$$g_m(x, u^1) < g_m(x, u^2) < \dots < g_m(x, u^N) \quad (27)$$

次に、式(28)のように  $\tilde{F}_m(x, 0)$  の値を決め、式(28)の条件が成立しない場合のみW\_ECDFを構築する。

$$\tilde{F}_m(x, 0) = \begin{cases} 0; & \text{if } 0 \leq g_m(x, u^1) \\ 1; & \text{if } g_m(x, u^N) \leq 0 \end{cases} \quad (28)$$

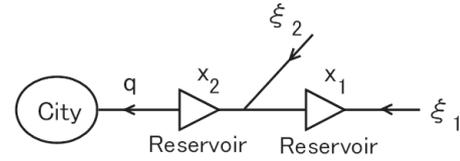


図1 河川と貯水池のモデル

#### 4.4 DEで得られた解の検証

DEによって得られた式(19)や式(20)の最適化問題の解については、式(1)や式(2)の機会制約問題の実行可能解であるか否かをモンテカルロ法で確認する。本来の確率分布に従う膨大な数の標本  $\xi^n \in \Xi$ ,  $n = 1, \dots, N$  を生成し、機会制約条件の左辺の事象  $A$  の経験的確率  $\widehat{\Pr}(A)$  を求める。ここで、任意の  $\epsilon \in (0, 1)$  と  $\delta \in (0, 1)$  から式(29)のように標本数  $N$  を決めると、真の確率  $\Pr(A)$  に対する  $\widehat{\Pr}(A)$  の精度が式(30)により保証される [16]。

$$N \geq \frac{1}{2\epsilon^2} \log\left(\frac{2}{\delta}\right) \quad (29)$$

$$\Pr(|\Pr(A) - \widehat{\Pr}(A)| \leq \epsilon) \geq 1 - \delta \quad (30)$$

本稿では、式(29)で  $\epsilon = 0.01$ ,  $\delta = 10^{-3}$  と設定し、 $N = 2,649,159$  の標本から経験的確率  $\widehat{\Pr}(A)$  を計算する。充足水準  $\alpha$  に対して  $\widehat{\Pr}(A) \geq \alpha$  を満たせば、DEで得られた解は機会制約問題の実行可能解と判定する。一方、 $\widehat{\Pr}(A) < \alpha$  ならば  $\beta$  を増やし、再びDEを適用する。

### 5. 数値実験

#### 5.1 貯水池の設計問題

近年、地球温暖化の影響であろうか、短時間の集中豪雨(ゲリラ豪雨)による洪水を原因とした水害が都市でも増えている。本稿では、同時機会制約問題の応用例として、水害を防ぐための貯水池の設計問題 [12] を考える。

図1は河川のモデルであり、水の流れる方向を矢印で示している。ゲリラ豪雨により河川に流れ込む水量  $\xi_1$  と  $\xi_2$  は確率変数であり、その確率分布は推定できるものとする。本稿では、各流入量  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2$  は式(31)のような正規分布に従うものとし、両者の相関係数を  $\rho_{12}$  とする。

$$\xi_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2), \quad j = 1, 2 \quad (31)$$

ただし、 $\mu_1 = 1$ ,  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\sigma_2 = 0.2$  である。

図1の川下には都市があり、都市を水害から守るため建設を計画している2つの貯水池を三角印で示す。ここで、各貯水池の貯水量  $x_1$  と  $x_2$  を決定変数とする。各貯水池の建設費は貯水量  $x_j$  に比例する。貯水池の設計問題では、都市を水害から守って貯水池の建設費を最小としたい。貯水池を満杯にして都市に流れ込む水量  $q(x, \xi)$  は、

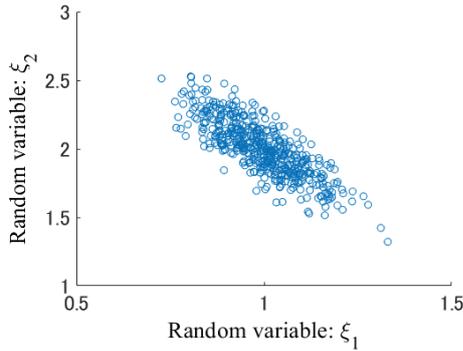


図 2 正規分布に従う標本  $\xi^n \in \Xi$

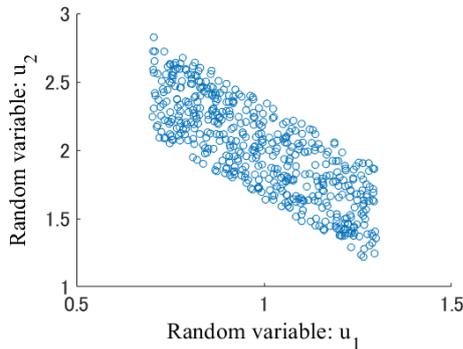


図 3 一様分布に従う標本  $u^n \in S$

$$q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} ((\xi_1 - x_1) + \xi_2) - x_2; & \text{if } (\xi_1 > x_1) \wedge (\xi_1 + \xi_2 > x_1 + x_2) \\ \xi_2 - x_2; & \text{if } (\xi_1 \leq x_1) \wedge (\xi_2 > x_2) \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

となる。そこで、以下のような関数を定義する。

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \xi_1 + \xi_2 - x_1 - x_2 \\ g_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \xi_2 - x_2 \end{cases} \quad (33)$$

水量が  $q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0$  となる確率を  $\alpha = 0.9$  と指定し、貯水池の設計問題を以下のような機会制約問題とする。

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \\ \text{sub. to} & \Pr \left( \begin{matrix} g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \end{matrix} \right) \geq 0.9 \\ & 0 \leq x_1 \leq 0.8, 0 \leq x_2 \leq 2.5 \end{cases} \quad (34)$$

## 5.2 予備実験

式 (34) の機会制約問題を式 (20) の最適化問題に変換して DE を適用する。はじめに、W\_ECDF を構築するために一様分布の台  $S \subseteq \mathcal{R}^2$  を前述の通り設定する。例えば、流入量  $\xi_1$  と  $\xi_2$  の相関係数を  $\rho_{12} = -0.8$  として、正規分布に従う  $N = 500$  個の標本  $\xi^n \in \Xi$  を図 2 に示す。さらに、図 2 の標本の確率分布を考慮して台  $S$  を設定した一様分布に従う  $N = 500$  個の標本  $u^n \in S$  を図 3 に示す。

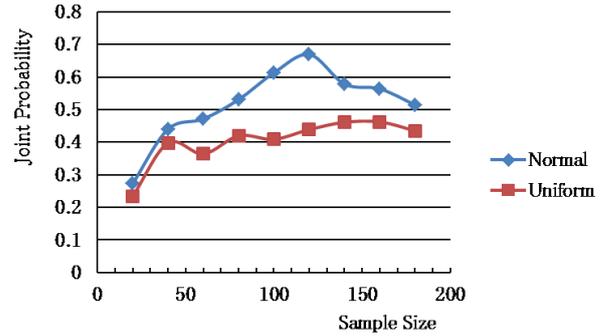


図 4 標本数に対する同時確率の推定値

提案した DE のプログラムは MATLAB® で実装した。DE の終了条件は世代数  $G_{\max}$  とする。DE のパラメータである集団サイズ  $N_P$  と  $G_{\max}$  を決めるため、式 (34) の機会制約問題で確率変数  $\boldsymbol{\xi}$  を定数の平均値に固定し、以下のように機会制約条件を決定論の制約条件に置き換える。

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & g_0(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \\ \text{sub. to} & g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \mu_1 + \mu_2 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \mu_2 - x_2 \leq 0 \\ & 0 \leq x_1 \leq 0.8, 0 \leq x_2 \leq 2.5 \end{cases} \quad (35)$$

式 (35) の最適化問題に DE を適用し、解の収束を確認することで、DE のパラメータは容易に調整できる。式 (35) の最適化問題の最適解は  $\mathbf{x}^* = (0.5, 2.5)$ 、 $g_0(\mathbf{x}^*) = 3.5$  であり、その解  $\mathbf{x}^*$  に対してモンテカルル法で求めた式 (34) の同時確率  $\Pr(A)$  の経験的確率は  $\widehat{\Pr}(A) \approx 0.5$  であった。

上記の最適解  $\mathbf{x}^*$  に対して、式 (22) で定義した同時確率の推定値  $J_P(\mathbf{x}^*)$  を図 4 に示す。図 4 では標本数  $N$  を変えて、ECDF と W\_ECDF で推定した  $J_P(\mathbf{x}^*)$  を比較している。明らかに W\_ECDF による推定値の方が少ない標本数で収束する。図 4 から、式 (20) の最適化問題における補正確率  $\beta$  の初期値と W\_ECDF の標本数  $N$  を決定する。

表 1 に予備実験で決めた提案法のパラメータを示す。

## 5.3 実験結果と考察

流入量の相関係数  $\rho_{12}$  を変えて、各機会制約問題に DE を 10 回ずつ適用した結果を表 2 に示す。表 2 は解  $\mathbf{x}$  の目的関数値  $g_0(\mathbf{x})$  とモンテカルル法による経験的確率  $\widehat{\Pr}(A)$  の平均値であり、括弧内は標準偏差である。すべての問題で標準偏差は小さく、DE の探索性能は安定している。

表 3 に DE で求めた最適解  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  とその目的関数値  $g_0(\mathbf{x})$ 、経験的確率  $\widehat{\Pr}(A)$  を示す。表 3 から、流入量の相関係数が負の場合、貯水池の容量  $x_1$  を減らして建設費を節約している。一方、相関係数が正の場合、両貯水池の容量を最大としても  $\widehat{\Pr}(A) < 0.9$  であり、式 (34) の機会制約問題に対する実行可能解は得られていない。すなわち、流入量に正の相関がある場合、計画している 2 つの貯水池だけでは  $\alpha = 0.9$  の確率で都市を水害から守れない。

表 1 提案法のパラメータ

W_ECDF の標本数	$N = 120$
最適化問題の割増確率	$\beta = 0.95$
DE の集団サイズ	$N_P = 10$
DE の世代数	$G_{\max} = 100$

表 2 DE の探索性能

$\rho$	-0.8	0	0.8
$g_0(\mathbf{x})$	3.877 (0.050)	4.084 (0.013)	4.070 (0.068)
$\widehat{\Pr}(A)$	0.911 (0.015)	0.901 (0.007)	0.839 (0.034)

表 3 DE による最適解

$\rho$	$x_1$	$x_2$	$g_0(\mathbf{x})$	$\widehat{\Pr}(A)$
-0.8	0.678	2.500	3.855	0.907
0	0.788	2.500	4.076	0.901
0.8	0.800	2.500	4.100	0.852

## 6. おわりに

本稿では、W\_ECDF と DE を組み合わせた機会制約問題の解法を提案し、同時機会制約問題として定式化した貯水池の設計問題で有効性を確認した。提案法の利点として、従来のモンテカルロ法よりも遥かに少ない標本数で機会制約問題の解が得られる。ただし、W\_ECDF を構築する標本数  $N$  と補正確率  $\beta$  は適切に決める必要がある。

今後の課題は、最新の DE の技法に基づく最適化手法の改良と、様々な機会制約問題による提案法の評価である。

**謝辞** 本研究は、JSPS 科学研究費補助金（科研費）課題番号 17K06508 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] Parkinson, A., Sorensen, C. and Pourhassan, N.: A general approach for robust optimal design, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, No. 1, pp. 74–80 (1993).
- [2] 武田朗子：ロバスト最適化法とその動向，電気学会論文誌 C, Vol. 134, No. 6, pp. 760–764 (2014).
- [3] Prékopa, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers (1995).
- [4] 椎名孝之：確率計画法，朝倉書店 (2015).
- [5] Poojari, C. A. and Varghese, B.: Genetic algorithm based technique for solving chance constrained problems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 185, pp. 1128–1154 (2008).
- [6] Liu, B., Zhang, Q., V., F. F. and E., G. G. G.: An efficient evolutionary algorithm for chance-constrained bi-objective stochastic optimization, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 17, No. 6, pp. 786–796 (2013).
- [7] Martinez, A. R. and Martinez, W. L.: *Computational Statistics Handbook with MATLAB*®, Chapman & Hall/CRC (2008).
- [8] Tagawa, K.: A statistical sensitivity analysis method using weighted empirical distribution function, *ICISIP2006 Proceedings*, Kyoto, Japan, IIAE, pp.

- 79–84 (2016).
- [9] Price, K. V., Storn, R. M. and Lampinen, J. A.: *Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization*, Springer (2005).
- [10] 田川聖治, 宮永 峻：個別機会制約条件を含む最適化問題の経験分布と差分進化による解法，情報処理学会研究報告，Vol. 2017-MPS-112 No. 14, 情報処理学会 (2017).
- [11] Tagawa, K. and Miyanaga, S.: Weighted empirical distribution based approach to chance constrained optimization problems using differential evolution, *IEEE CEC2017 Proceedings*, IEEE, pp. 97–104 (2017).
- [12] Prékopa, A.: Flood control reservoir system design using stochastic programming, *Mathematical Programming Study*, Vol. 9, pp. 138–151 (1978).
- [13] 前園直彦：概説 確率統計 第 2 版，サイエンス社 (2009).
- [14] Brest, J., Greiner, S., Bošković, B., Merink, M. and Žumer, V.: Self-adapting control parameters in differential evolution: a comparative study on numerical benchmark problems, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 10, No. 6, pp. 646–657 (2006).
- [15] 田川聖治：(解説) 差分進化の基礎と並行プログラミング，システム/制御/情報，Vol. 59, No. 2, pp. 47–52 (2015).
- [16] Tempo, R., Calafiore, G. and Dabbene, F.: *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems: With Applications*, Springer (2012).