2017 年度情報処理学会関西支部　支部大会

G-18

3 次元凸包を用いた簡易な Delaunay 図構成と高速化

Simple Construction of Delaunay Diagram through 3D Convex Hull

and an Improvement of its Time Performance

岩本 龍馬 *　　今井 敏行 †

Ryoma Iwamoto　　Toshiyuki Imai

1　はじめに

Delaunay 図は三角形分割の一つで, 最小角最大という性質をもつため，つぶれていない三角形を要求される有限要素法のメッシュとして不可欠である．Delaunay 図の構成算法に, 任意の三角形分割に flip という局所変形を繰り返すものがある．この算法は，変形順序によらないことや三角形分割であることを維持しつつ変形していくなど，実用上利用しやすいという利点がある．本研究では，この利点を極力残しながら，初期三角形分割の構成をしないで済む Delaunay 図構成法を提案する．

2　三角形分割と Delaunay 図

平面上の n 点 $p_1, p_2, \cdots, p_n, (p_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha))$ が与えられ, どの 3 点も同一直線上になく, どの 4 点も同一円周上にないものとする．この n 点を頂点とする三角形による，これらの点の凸包の分割を三角形分割とよぶ．三角形分割のどの三角形も, その外接円が他の点を含まないとき, その三角形分割を Delaunay 図とよぶ.

与えられた n 点に対して三角形分割は一通りとは限らないが, Delaunay 図は一通りに限られる．また三角形分割の三角形の個数 f，分割の辺の総数 e は n 点の凸包が何角形であるかにより一意に定まる．凸包が m 角形であるとき,

$$f = 2n - 2 - m,\ e = 3n - 3 - m$$

が成立する．与えられた n 点に対して三角形分割の三角形の内角の個数も一定値 $3f$ になり, 内角を昇順に並べて辞書式に大小比較することができ，三角形分割の間に大小の順序関係が導入される．Delaunay 図はこの関係において最大 (最小角最大) であることが知られている．これは他の三角形分割より三角形がつぶれていないと解釈することができ，雄弁要素法のメッシュとして欠かせないものになっている．

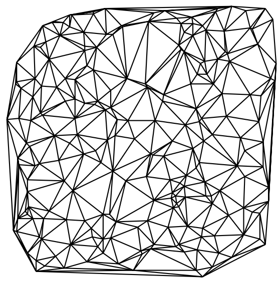

図 1　Delaunay 図

3　Flip と構成算法

与えられた n 点の任意の三角形分割において, 凸包の辺以外の辺には, 両側に三角形が隣接する．辺 $p_i p_j$ に対して，両側の三角形の頂点で, p_i, p_j 以外の第三の頂点を p_k, p_l とする．ただし, 3 頂点 p_i, p_j, p_k はこの順で反時計回りに三角形上に並んでいる

* 和歌山大学大学院, Graduate School of Wakayama University

† 和歌山大学, Wakayama University

とする (もう一方の三角形は p_j, p_i, p_l の順に反時計回りに並ぶ). このとき, 一方の三角形の外接円が他方の第三の頂点を含まないことは,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2+y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2+y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2+y_k^2 \\ 1 & x_l & y_l & x_l^2+y_l^2 \end{vmatrix} > 0$$

により判定できる. この判定を flip 判定とよぶ. flip 判定は 4 点のみで判定でき, 局所的な判定ということができる. flip 判定で行列式の値が負の時, 辺 p_ip_j は flip 可能であるといい, 三角形分割から辺 p_ip_j を消去して辺 p_kp_l を付加することを辺 p_ip_j を flip するとよぶ. flip 判定の式より, p_ip_j を flip して付加された辺 p_kp_l は flip 可能ではない. また, 凸包上の辺も flip 可能ではない.

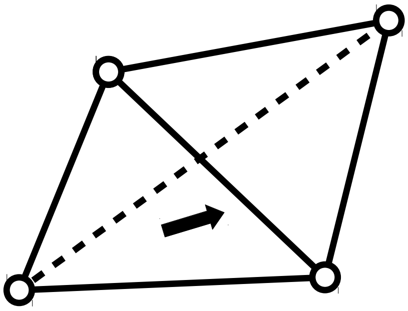

図 2　flip

任意の三角形分割に対して, flip 可能な辺がある限り flip を続けると, 辺の選択順序によらず有限回で flip 可能な辺がなくなり, 三角形分割は Delaunay 図になることが知られている. したがって, Delaunay 図構成算法として,

1. n 点の三角形分割を一つつくる.
2. flip 可能な辺がある限りその辺を flip する

を考えることができる. この算法における flip の回数は最悪時 $O(n^2)$ であることが知られていて, Delaunay 図の構成の最速の計算量は $O(n \log n)$ に及ばないが, 算法の 2 が単純で実装しやすいこと, flip の前後で三角形分割が維持されていて，実行を中断しても途中結果を利用可能である利点がある. その一方で，凸包の辺は別扱いで, 算法の 1 は三角形分割を作ることに凸包構成も含まれることを考えると, 必ずしも簡単ではない.

また，Delaunay 図を活用するとき, 頂点の追加が必要な場合がある. 上記算法の 1 で，三角形分割構成の最速な算法は一般に，頂点の追加に対応しない. したがって，頂点の追加に対応するには，算法の追加か，三角形分割構成時に，頂点追加に対応した (最速でない) 算法を選択しておく必要がある.

さらに, flip の逆操作を考えると, flip 可能でない辺に flip の逆操作を行おうとしても三角形分割にならず逆操作を行えない場合がある. 見方を変えれば, 三角形分割でなくても flip が可能な場合があり, flip を繰り返す算法を採用しても，最初に三角形分割を作ることは必須とは限らない.

4　最遠点 Delaunay 図と 3 次元凸包

与えられた n 点うち何点かを選んで作った三角形分割において, 各三角形の外接円が n 点すべてを含むとき, 最遠点 Delaunay 図とよぶ. 最遠点 Delaunay 図は n 点の凸包の頂点の三角形分割であることが知られている. 凸包が m 角形の時, 凸包の頂点の三角形有分割の三角形の個数 f' と辺の総数 e' は一定で,

$$f' = m-2, e' = 2m-3$$

になる. したがって, n 点の三角形分割と，凸包頂点の三角形分割を重ねて考え, Delaunay 図と最遠点 Delaunay 図を同時に構成することを考えると, 点の総数は n のまま, 三角形の個数 f'' と辺の個数 e'' は,

$$f'' = 2n-4, e'' = 3n-6$$

となり, 凸包に由来する m が消える. 最遠点 Delaunay 図でも flip 判定や flip のような操作を考えることができるが, 判定の符号が逆転し, 行列式の値が正のとき辺 p_ip_j を flip することになる.

xy 平面上の点 p_α に対して z 軸を導入し, p_α を放物面 $z = x^2+y^2$ 上の点 $q_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha), z_\alpha = x_\alpha^2 + y_\alpha^2$ に持ち上げる. flip 判定で辺 p_ip_j が flip 可能でないことと持ち上げた三角形分割において, 対応する辺 q_iq_j が, Delaunay 図の方は z 方向下に凸,

最遠点 Delaunay 図のほうは z 方向上に凸であることがわかる．したがって, Delaunay 図と最遠点 Delaunay 図を同時に構成することは, $q_1, q_2, \cdots, q_n$ の 3 次元凸包を構成することに相当する．構成した 3 次元凸包を xy 平面に正射影すれば Delaunay 図と最遠点 Delaunay 図が同時に得られる．

5　提案算法

一般に, 3 次元の凸包を構成することは 2 次元の Delaunay 図を構成することより難しい．しかし, $q_1, q_2, \cdots, q_n$ はすべての点が凸包の内部にはなく, 境界 (表面) 上にある．これを利用すれば一般の場合より容易に凸包が構成できる．本研究では, flip を繰り返して Delaunay 図を得る算法で, 最初に凸包構成を含む三角形分割を最初に作ることを避け, より簡単な方法を提案する．

1. q_1, q_2, q_3, q_4 で 3 次元凸包 (四面体) を作る．
2. q_5 以降を一点ずつ追加し, 凸包を更新する．
3. 下向き法線の三角形を xy 平面に正射影する．

上記算法の 2 は, 追加する点が現在の凸包の外にあるので, 追加する点から見える三角形の各頂点と追加する点を結んで四面体を作り, 各辺が外に向かって凸になるまで flip を任意の順に繰り返せばよい．各三角形には外から見たときに反時計回りになるように頂点順を記憶されておけば, 外向き法線ベクトルが得られるので, 任意の三角形から隣接三角形をたどって見える三角形に到達可能である．Delaunay 図と最遠点 Delaunay 図を同時に考えることで, 2 次元の凸包の辺を別扱いしなくてすむ．算法は点を追加に対応する形になっている．

6　おわりに

Delaunay 図と最遠点 Delaunay 図を同時に考え, 3 次元の凸包構成の特別な場合に帰着させることで, flip を任意の順に行う算法の利点を保ちつつ, 最初に 2 次元凸包や三角形分割の構成をせず, より緩い状態から始める算法と提案した．点の追加にも最初から対応している．現状では, 点の追加ごとに凸包を完成させてるまで flip しているが, flip の回数を減らし, 高速化を図ることが課題である．

本研究の一部は科学研究費補助金の助成を受けている．

参考文献

[1] Avis, D. 他: 計算幾何学・離散幾何学, 朝倉書店, 1994.

[2] H. Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, 1987.

[3] 伊理正夫 (監修) 他: 計算幾何と地理情報処理第 2 版, 共立出版, 1993.

[4] 譚学厚, 平田富夫: 計算幾何学入門, 森北出版, 2001.