Vol.2017-CG-167 No.8
2017/9/19

"Fluid Simulation Using Laplacian Eigenfunctions" の実装報告

浅野 佑弥[1,a)]

概要：筆者は Tyler De Witt らが 2012 年に発表した論文"Fluid Simulation Using Laplacian Eigenfunctions"[1]（SIGGRAPH 2012 でも発表されている）を Mathematica で実装している．この論文の目的は，非圧縮流体の流れを今ある手法よりもかなり少ない自由度で効率の良い，納得のいくシミュレーションを行うことである．提案手法を用いることで基底関数が少なくても，もっともらしい流体シミュレーションが得られる．さらに，提案手法の定式化の誤りを訂正した筆者によるシミュレーションと原著論文のシミュレーションの比較実験を行ない，基底関数の必要数について考察した．

1. 基底関数としての Laplacian 固有関数

まず，$f, g : [0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ に対し以下の内積 $< f, g >$ を定義する．

$$< f, g > := \int\int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \mathbf{f}(x,y)\cdot\mathbf{g}(x,y)\ dxdy$$

次に，$\Phi_k : [0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ を $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対して，$\lambda_k = -(k_1^2 + k_2^2)$

$$\Phi_k = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2}{}^t(k_2 \sin(k_1 x)\cos(k_2 y), \\ -k_1\cos(k_1 x)\sin(k_2 y), 0)$$

と定義する．また，$\phi_k := \nabla\times\Phi_k$ とする．

Tyler De Witt らは流体の渦度 ω を $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ の線形結合で近似し，非圧縮流体の渦度方程式からその係数の満たす関係式を導出し計算した．つまり，$\omega = \sum_{k=1}^N \omega_k\phi_k$，$\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ として，

$$\dot{\omega_k} = \mathbf{w}^T\mathbf{C}_k\mathbf{w} + \nu\lambda_k\omega_k + f_k$$

から各時間毎の係数を計算した．ここで，筆者は N 次正方行列 $\mathbf{C}_k$ を $\mathbf{C}_k := (< \nabla\times(\Phi_i\times\phi_j), \phi_k >)_{i,j}$ とした．

また，$\mathbf{C}_k$ の性質として，

$$\frac{1}{\lambda_j}\mathbf{C}_k[i,j] = -\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{C}_k[j,i]$$

が成り立つ．この関係式を使って $\mathbf{C}_k$ の計算量を半分程度にすることができる．筆者は Mathematica でこれらの関数を定義し，外力を $-\Phi_{(1,1)}(x,y)$，$\nu = 1$ としてシミュレーションした結果が**図 1** である．ただし，時間が経った状態の図である．

2. 考察

Tyler De Witt らは $\mathbf{C}_k$ を原著論文の 4 章では

$$\mathbf{C}_k = (< \nabla\times(\phi_j\times\Phi_i), \phi_k >)_{i,j}$$

とし，アルゴリズム 2 の中では

$$\mathbf{C}_k = (< \nabla\times(\Phi_j\times\phi_i), \phi_k >)_{i,j}$$

として計算しており，$\mathbf{C}_k$ の定義が 2 通りある．また，$\mathbf{C}_k$ の性質を

$$\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{C}_k[i,j] = -\frac{1}{\lambda_j}\mathbf{C}_k[j,i]$$

と i,j を逆にしている．原著論文 4 章の $\mathbf{C}_k$ の定義とこの性質を使って図 1 と同じ初期値でシミュレーションした結果が**図 2** である．十分時間が経った後，原著論文のシミュレーションでは外力のグラフと比べて矢印が小さいグラフのままである．一方，筆者のシミュレーションでは徐々に外力のグラフに近づく．$\nu = 1$ は 20 度の水の動粘性率だから，筆者のシミュレーションの方が現実に忠実と思われる．

3. 基底関数の必要数について

このシミュレーションは端的に述べると無限次元空間の点を有限次元空間の点で近似するということである．従って，有限次元空間の選び方が合理的でなければならない．$[0,\pi]\times[0,\pi]$ 上のシミュレーションでは $\mathbf{C}_k$ の第 (i,j) 成分 $c_{i,j}^k$ が，

[1] 九州大学大学院数理学府
〒 819-0395 福岡市西区元岡 744
[a)] ma217037@math.kyushu-u.ac.jp

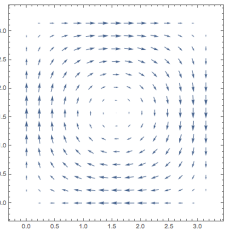

図 1　筆者によるもの

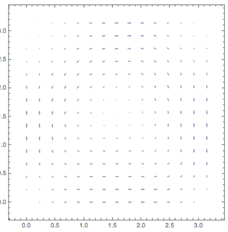

図 2　Tyler De Witt らによるもの

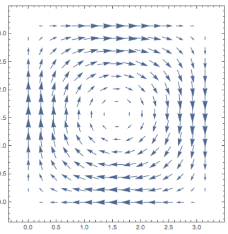

図 3　外力

$$\phi_{(i_1+j_1,i_2+j_2)}, \phi_{(i_1-j_1,i_2+j_2)}, \phi_{(i_1+j_1,i_2-j_2)}, \phi_{(i_1-j_1,i_2-j_2)}$$

の線形結合で表される．また，Φ_k が k について原点対称かつ各軸に対し対称であること，

$$\|\Phi_k\| \leq \max\left\{\frac{|k_1|}{(k_1^2+k_2^2)}, \frac{|k_2|}{(k_1^2+k_2^2)}\right\}$$

であること，$\Phi_{(k_1,0)} = \Phi_{(0,k_2)} = 0$ から，

$$[1,N] \times ([-N,N] \setminus \{0\})$$

に含まれる格子点に対する基底関数が，$\mathbf{C}_k$ の計算においてその基底関数で張られる空間に含まれない ϕ_k を最小にし，各軸に対して均等に渦を表現できることがわかった．

参考文献

[1] Witt, T.D., Lessig, C., and Fiume, E. 2012. Fluid simulation using Laplacian eigenfunctions. ACM Trans. Graph. 31, 1, Article 10 (January 2012), 11 pages.