

ランダムスパース係数行列に対する不完全コレスキー分解前処理におけるオーダリングの評価指標

岩下 武史[†] 島崎 眞昭^{††}

クリロフ部分空間反復法の代表的な前処理手法である不完全 LU 分解前処理は、未知数のオーダリングの影響を受けることが知られている。著者らは最近、これらのオーダリングが前処理効果に及ぼす影響を簡単に評価する評価指標を提案した。本論文では、前処理効果の見積りが難しいと考えられている非構造解析において、評価指標を提示することを試みる。本評価指標は Remainder matrix のノルムと限定された条件の下で相関関係を持ち、ILU 分解と同程度の計算量で追加的なメモリ量をほとんど必要とすることなく計算される。Matrix Market より入手した係数行列データ、ポアソン方程式の差分解析、3次元電磁場解析を例にとり、対称行列用の ILU 分解前処理を用いる ICCG(0) 法における本手法の有効性について検証する。その結果、提案指標により、より少ないメモリ量で既存の代表的指標である Remainder matrix のフロベニウスノルムと同等の前処理効果の評価が可能であることが示された。

Evaluation Index of Orderings in Incomplete Cholesky Preconditioning for Random Sparse Coefficient Matrix

TAKESHI IWASHITA[†] and MASAOKI SHIMASAKI^{††}

It is well known that ordering of unknowns greatly affects convergence in Incomplete LU (ILU) factorization preconditioned iterative methods. The authors recently proposed a simple evaluation way for orderings in ILU preconditioning. The present paper introduces the evaluation method in unstructured analyses in which the effect of preconditioning is not easily estimated. The evaluation index, which has a simple relationship with the norm of the remainder matrix in a special case, is easily computed without additional memory requirement. The computational cost of the index is about the same as that of ILU factorization. The effectiveness of the method is confirmed by numerical tests using the ICCG(0) method applied to linear systems of equations derived from Matrix Market, a finite-difference analysis of Poisson equation, and a 3-d electromagnetic field analysis. The numerical result shows that the proposed evaluation index gives a good tool for estimating preconditioning effects and has a strong relationship with the Frobenius norm of the remainder matrix.

1. はじめに

連立一次方程式の反復解法において重要な前処理技術の 1 つに不完全 LU (ILU) 分解前処理¹⁾がある。不完全 LU 分解前処理では、未知変数の順序が前処理の効果に大きな影響を与えることが知られている。たとえば、未知変数の順序 (オーダリング) により当該の前処理付き反復法における反復回数が 2~5 倍程度に増加するような場合もある²⁾。一方、ILU 分解前処理では、並列処理を行うために未知変数の順序を入れ

替えるリオーダリング手法が研究されてきた³⁾。そこでこうした背景から、オーダリングと前処理効果の関係について古くから検討が行われてきた⁴⁾。

ILU 分解前処理におけるオーダリングの影響に関する研究では、従来差分法における節点オーダリングを対象としたものが中心であった。その初期的なものとして、Duff らによる研究がある⁵⁾。彼らは同研究において、ILU 分解前処理付き反復法の収束性がオーダリングの影響を受けることを示し、前処理効果を計る方法として、Remainder matrix $R = M - A$ のノルムを用いることを提案した。ここで、 M は前処理行列で A は係数行列である。次に、この Duff らの研究に続いて、土肥、Lichnewsy、鷲尾らは Incompatible node に注目した一連の研究を行った^{6),7)}。これらの一連の研究では、詳細な解析的分析、数値計算

[†] 京都大学学術情報メディアセンター
Academic Center for Computing and Media Studies,
Kyoto University

^{††} 京都大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Kyoto University

結果を示し, Incompatibility ratio と呼ぶオーダリングの評価指標を提案した. Incompatibility ratio は定められた差分格子の節点オーダリングに対して一意に決定される値で, 簡単な計算で導出することができる. 次に, 著者らは最近, S.R.I. (Simple Remainder Index) と呼ぶ新たな節点オーダリングの評価指標を提案した⁸⁾. 同指標は全節点の影響を考慮する評価指標であり, Incompatibility ratio と同様に節点オーダリングに対して一意に決定され, 簡単な計算で導出することができる.

上記の節点オーダリングに関する研究に対して, 一般の非構造型解析におけるランダムスパース行列を係数とする連立一次方程式に関する研究では, オーダリングを評価する方法はほとんど研究されていない. 実用上の解析では, 差分析よりもこれらの非構造型解析の方がむしろ多く用いられており, 重要な課題であるといつてよい. 実際, ランダムスパース行列に対して節点オーダリングを拡張した場合, その拡張手法は種類が豊富であり, これらを簡便に評価し適切なオーダリングを選択する指標が応用上必要とされている. しかしながらほとんど研究が進展していないのは, こうした非構造型の解析の場合, 問題個々の影響が大きく統一的な議論が難しいためと考えられる. 本研究では, このような課題の困難さを考慮しつつ, ある程度の幅を許容して, ランダムスパース係数行列に対するオーダリングの評価手法の提案を試みる.

本論文ではランダムスパース係数行列に対するオーダリングの評価のための基礎として, 上記の Duff らの Remainder matrix を用いる. Remainder matrix による分析では, たとえばフロベニウスノルムを用いた例が報告されている⁵⁾. しかし, Remainder matrix のフロベニウスノルムの導出には付加的にメモリ空間が必要であり, オーダリングの自動選択や評価のためにはメモリ量, 計算時間の点でより低コストな方法が望ましい. そこで, 著者らは最近, P.R.I. (Precise Remainder Index) と呼ぶ新たな評価指標を提案した. 同指標は Remainder matrix の計算過程に注目し, ある特定の条件の下で Remainder matrix のノルムと簡単な相関関係がとれるようにしたものである. P.R.I. はその定義については文献 8) において既報であるが, その有用性については検証されていない. そこで, 本論文では, 対称な係数行列を持つ連立一次方程式に対する不完全 LU 分解前処理である不完全コレスキー分解前処理を用いる ICCG(0) 法を対象として, P.R.I. の有用性に関し反復回数との相関を指標に検討を行う.

2. 不完全 LU 分解前処理

本論文では, 次のような n 元実連立一次方程式を解くものとする.

$$Ax = b \quad (1)$$

ここで, 本論文の数値解析では係数行列 A が対称行列である場合を考えるが, 手法の説明についてはより一般的に係数行列が非対称な場合を含めた形で行う.

連立一次方程式 (1) を反復解法により解く場合, 前処理⁴⁾ と呼ばれる操作がよく用いられる. これは解くべき方程式を

$$(K_1^{-1}AK_2^{-1})(K_2x) = K_1^{-1}b \quad (2)$$

のように変換し, 係数行列の条件数などを改善することにより, 反復解法の収束性を高めるものである. ここで, $M = K_1K_2$ は前処理行列と呼ばれる. ILU 分解前処理 (特にことわらない限り ILU(0) 分解前処理を指すものとする) の場合, 前処理行列は,

$$M = LD^{-1}U \quad (3)$$

のように与えられる. ただし, L, D および U はそれぞれ下三角行列, 対角行列, 上三角行列である. ここで, L, D, U は係数行列 A を ILU 分解することにより得られ,

$$A = (LD^{-1}U) - R_{ilu} \quad (4)$$

を満たす. ただし, R_{ilu} は分解中に棄却されるフィルインにより構成される行列である.

ILU 分解前処理の適用は, 反復中で前進代入計算

$$t = L^{-1}s \quad (5)$$

および後退代入計算

$$u = U^{-1}Dt \quad (6)$$

を行うことで与えられる.

3. 新しいオーダリングの評価指標

3.1 Remainder matrix

反復法における前処理効果を定量的に計る方法として, たとえば, 前処理後の係数行列 $K_1^{-1}AK_2^{-1}$ の条件数や固有値分布を調べることが考えられる. しかし, 固有値解析は一般に計算コストが多いためである. そこで, Duff らは前処理の効果を次式で定義される Remainder matrix のノルムで評価することを提案した.

$$R = M - A \quad (7)$$

Remainder matrix のノルムが小さいほど前処理効果が大いいと判断される. ILU 分解前処理では,

$$R = R_{ilu} \quad (8)$$

が成り立ち, 文献 5) では ILU 分解前処理におけるオーダリングの影響について Remainder matrix のフロベニウスノルムによる分析が行われている. しかし,

一般のランダムスパース行列を対象とした ILU 分解前処理においては、Remainder matrix の導出やそのフロベニウスノルムの計算には、当該の連立一次方程式の求解と比べて無視できないメモリ量が必要となり、個々の問題においてオーダリングを評価するためにはより低コストな方法が望ましい。

3.2 P.R.I.

本節では、著者が最近提案した P.R.I. (Precise Remainder Index) について述べる。まず、ILU 分解における Remainder matrix について考える。係数行列 A に上書きする ILU 分解のアルゴリズムは図 1 のように与えられる。ここで、仮に Remainder matrix を計算するとすれば、ILU 分解中に図 1 中の“ R の計算”で示された部分を加えることで行うことができる。ここで、ある $r_{j,k}$ 要素について考えると、係数行列の非零パターンによって数回の更新が行われるが、これらの更新量は必ずしも同じ（同符号）ではない。したがって、Remainder matrix の全要素を正しく求めようとすると、棄却されたフィルインの場所に比例したメモリ量が必要となる。そこで、P.R.I. による評価では、これらの更新量（フィルインの棄却量）の絶対値の総和を P.R.I. 値として評価指標とする⁸⁾。このとき、P.R.I. の値は ILU 分解中に 1 つの変数（図 1 中の I_{rp} ）を用いて計算できる。したがって、付加的に必要なメモリ量はほとんどない。また、計算量は係数行列の非零パターンに依存するが、ILU 分解自体とほぼ同程度と考えられ、反復部の計算量と比べてずっと小さい。

```

R = O
Irp = 0
for i = 1 to n - 1
  for j = i + 1 to n
    for k = i + 1 to n
      if  $\tilde{a}_{j,i} \neq 0$  &  $\tilde{a}_{i,k} \neq 0$  &  $\tilde{a}_{j,k} \neq 0$  then
         $\tilde{a}_{j,k} = \tilde{a}_{j,k} - \tilde{a}_{j,i} * \tilde{a}_{i,k} / \tilde{a}_{i,i}$ 
        // (ILU 分解)
      endif
      if  $\tilde{a}_{j,i} \neq 0$  &  $\tilde{a}_{i,k} \neq 0$  &  $\tilde{a}_{j,k} = 0$  then
         $r_{j,k} = r_{j,k} + \tilde{a}_{j,i} * \tilde{a}_{i,k} / \tilde{a}_{i,i}$ 
        // (R の計算)
         $I_{rp} = I_{rp} + |\tilde{a}_{j,i} * \tilde{a}_{i,k} / \tilde{a}_{i,i}|$ 
        // (P.R.I. の計算)
      endif
    end for
  end for
end for

```

図 1 Remainder matrix および P.R.I. の導出をともなった ILU 分解アルゴリズム

Fig. 1 Algorithm of ILU factorization with determining remainder matrix and P.R.I.

3.3 様々な前処理に対する拡張した P.R.I.

不完全分解前処理では、分解中にピボットの絶対値が非常に小さな値となり、分解が破綻する場合がある。そこで実用的な解析では、前処理行列の作成の際に係数行列に何らかの修正を行い、その修正された係数行列に不完全分解を行って前処理行列を作成する手法が広く行われている^{12),13)}。このとき、修正項を $A_{\Delta m}$ とすると、

$$A + A_{\Delta m} = (L_m D_m^{-1} U_m) - R_{ilum} \quad (9)$$

のように分解される。このとき、Remainder matrix R_m は、

$$R_m = R_{ilum} + A_{\Delta m} \quad (10)$$

で与えられる。そこで、このような前処理行列に対する P.R.I. 値 I_{rpm} を以下のように定義する。

$$I_{rpm} = I_{rp0} + \|A_{\Delta m}\|_A \quad (11)$$

ここで、 I_{rp0} は ILU 分解において図 1 に示されるアルゴリズムで決定される I_{rp} の値で、 R_{ilum} に対応する。また、 $\|\cdot\|_A$ は全要素の絶対値の和を表し、行列ノルムの性質を満たす¹⁴⁾。

次に、ILU 分解においてフィルインを考慮した ILU(l) 分解前処理について考える。フィルインを考慮した場合も、前処理行列は式 (4) の形で表され、Remainder matrix は ILU(0) 分解前処理と同様に棄却したフィルインで構成される。したがって、P.R.I. 値は ILU(0) 分解前処理と同様にフィルインを棄却するたびにその量の絶対値を総和することにより求められる。

ILU(0) または ILU(l) 分解前処理の場合、P.R.I. 値 I_{rp} と Remainder matrix の間には、係数行列が対称で、かつ対角要素の符号がすべて同一であるとき、棄却されるフィルインの符号がすべて等しくなるため、

$$\|R\|_A = I_{rp} \quad (12)$$

が成り立つ。次に、一般のランダムスパース係数行列の場合には、棄却されるフィルインの符号がすべて同符号とはいえないので、

$$\|R\|_A \leq I_{rp} \quad (13)$$

となる。ここで、Remainder matrix のフロベニウスノルム $\|R\|_F$ と $\|R\|_A$ について、

$$\|R\|_F^2 = \sum_{j,k} (r_{j,k})^2 \leq \left(\sum_{j,k} |r_{j,k}| \right)^2 = \|R\|_A^2 \quad (14)$$

が成り立つので、式 (13), (14) より任意の係数行列に対して、

$$\|R\|_F \leq I_{rp} \quad (15)$$

が成り立つ。なお、式 (13), (15) は式 (9) で表される修正項をともなう不完全分解前処理における Remain-

der matrix R_m と当該前処理における P.R.I. 値 I_{rpm} の間にも成り立つ．

4. 数値実験

4.1 テスト問題と実行計算環境

本解析では，Matrix Market より入手した 2 種の係数行列データ，ポアソン方程式の差分解析，渦電流場解析（有限要素法）の 4 種の連立一次方程式をテスト問題とする．これらの連立一次方程式の求解法には ICCG(0) 法またはシフト付き ICCG(0) 法¹²⁾ を用いる．ここでシフト付き ICCG 法とは，3.3 節で述べた係数行列に修正項を加えて不完全コレスキー分解を行い前処理行列とする手法で，修正項には対角行列がよく用いられる．収束判定基準として，右辺ベクトル b と残差ベクトル r_e の 2-ノルム比が 10^{-7} 以下となる条件を用いる．解析は京都大学学術情報メディアセンターの Fujitsu HPC2500 上で FORTRAN を使用して行った．最適化オプションは-O5 を指定した．解析では，評価指標 P.R.I. と反復回数の相関についてランダムオーダリングを用いて評価する．ここでランダムオーダリングは以下のようにして作成した．まず，今回テストに選んだ係数行列データは比較的バンド幅が小さく，RCM オーダリングや辞書式順序付け法に近い形の行列データをオリジナルの形で持っている．そこで，元のオリジナルのオーダリングからそのうちの一部（0% から 100% まで 2 ポイント刻み）をランダムに入れ替え，それにより生成した 51 個のオーダリングを評価に用いることとする．

4.2 Matrix Market 内のデータ (1)

本節では，Matrix Market より取得したセット名 CYLSHELL の S1RMQ4M1 を対象とした場合の結果を示す．本セットは，Shell 要素による構造解析の問題を扱った有限要素解析で生ずる係数行列である．ここで扱うデータは構造型の四辺形要素を用いた場合である．係数行列に関する諸データを表 1 に示す．

図 2 に本解析における反復回数と P.R.I. の関係を示す．また，図 3 にオリジナルな順序付けの場合の残差ベクトルの振舞いを示す．図 2 中で P.R.I. と反復回数にはかなり強い相関がみられ，本係数行列の場合，P.R.I. により前処理効果について評価をすることが可能であることが分かる．本データの場合，反復回数と P.R.I. の相関係数は 0.86 と高い数値を得た．

4.3 Matrix Market 内のデータ (2)

本節では，前節と同じく Matrix Market より取得したセット名 CYLSHELL の係数行列データを用いる．ここでは，三角形要素による有限要素解析から得

表 1 S1RMQ4M1 (Matrix Market) の係数行列データ
Table 1 Coefficient matrix data of S1RMQ4M1 (Matrix Market).

Number of unknowns	5489
Number of entries	143300*2
Number of nonzero entries	262411
Band width	192
Max eigenvalue	6.874×10^5
Min eigenvalue	3.80×10^{-1}
Condition number	1.81×10^6

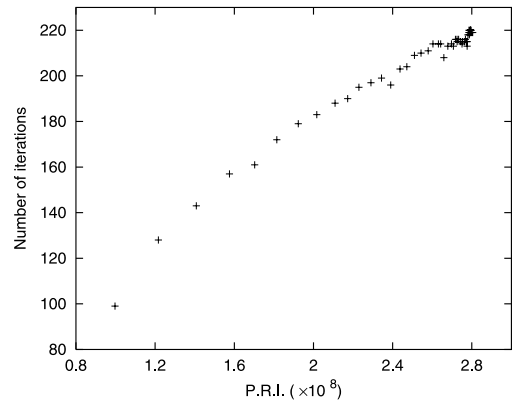


図 2 反復回数と P.R.I. の関係 (Matrix Market データ 1)
Fig. 2 Relationship between number of iterations and P.R.I. (Matrix Market data 1).

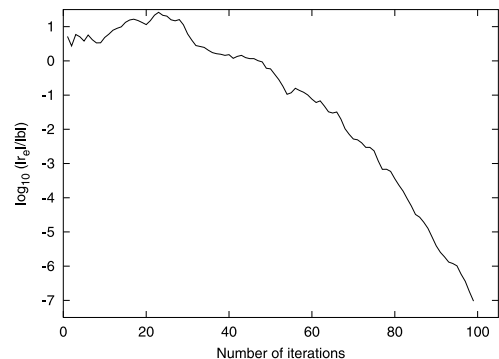


図 3 残差の収束過程 (Matrix Market データ 1)
Fig. 3 Convergence behavior of residuals (Matrix Market data 1).

られた S3RMT3M1 データを対象とする．係数行列に関する諸データを表 2 に示す．

図 4 に本解析における反復回数と P.R.I. の関係を示す．また，本解析において相関係数を計算した結果，0.81 の値を得た．本解析のデータでは，比較的高い相関係数が得られたものの，図 4 によると，オーダリングのランダム性が高い部分（P.R.I. 値が相対的に高いところ）において反復回数にばらつきがみられる．一方，オリジナルデータ（辞書式順序付けまたは RCM

オーダリング)に近いところでは、高い精度で前処理効果の見積りができている。そこで、図5にオリジナルデータおよびP.R.I.値が同程度でありながら反復回数の隔たりが大きい2種のランダムオーダリングにおける収束の過程を示す。前節の結果と比較すると、今回のデータでは収束の過程において相対残差ノルムが急激に上下する箇所(スパイクとよばれる)が多く見られることが分かる。また、2種のランダムオーダリングは全体の2%の未知変数の順序が違うのみであ

り、収束過程は似たような傾向を示している。たとえば、収束判定基準として残差ベクトルと右辺ベクトルのノルム比を 10^{-6} 以下とした場合には、両者の反復回数はほとんど同じになる。したがって、収束過程の大きな傾向はP.R.I.によりある程度見積もることができていると考えられる。しかしながら、本データのように収束の過程に多くのスパイクが含まれている場合には、P.R.I.による評価にはある程度の誤差を許容せざるをえない。スパイクの位置は丸め誤差の集積など実装依存の部分があり、現実的に予期することは難しく、実際に反復法を実行することなく反復回数を見積もるという観点では、許容せざるをえない誤差範囲といえる。

表2 S3RMT3M1 (Matrix Market) の係数行列データ
Table 2 Coefficient matrix data of S1RMQ4M1 (Matrix Market).

Number of unknowns	5,489
Number of entries	112,505*2
Number of nonzero entries	217,669
Band width	192
Max eigenvalue	9.67×10^3
Min eigenvalue	3.90×10^{-7}
Condition number	2.48×10^{10}

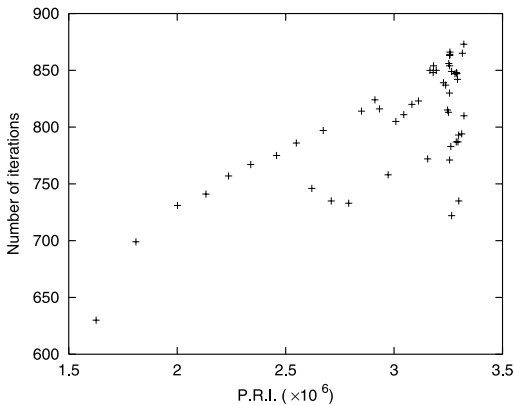


図4 反復回数とP.R.I.の関係 (Matrix Market データ2)
Fig. 4 Relationship between number of iterations and P.R.I. (Matrix Market data 2).

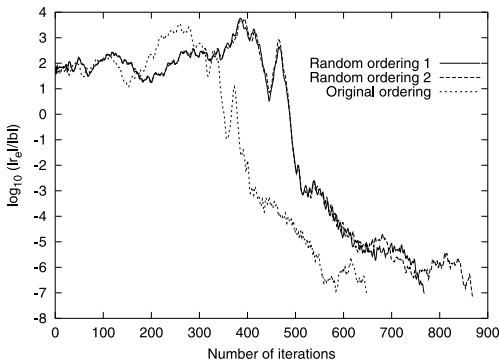


図5 残差の収束過程 (Matrix Market データ2)
Fig. 5 Convergence behavior of residuals (Matrix Market data 2).

4.4 2次元ポアソン方程式の差分解析

本節では、以下の2次元ポアソン方程式の5点差分解析を対象とする。

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (\kappa \nabla u) &= f & (16) \\
 \text{in } \Omega(0,1) \times (0,1) \\
 u(x,y) &= 0 \text{ on } \delta\Omega \\
 \text{if } \left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \&\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}\right) \text{ then} \\
 \kappa &= 100.0 \\
 \text{else } \kappa &= 1.0.
 \end{aligned}$$

ここで f は、節点を辞書式順序付けで並べた場合の節点番号を i_d として、 $0.5 \sin(i_d + 1)$ とする。また、差分格子として 100×100 の格子を用い、オリジナルな順序付けは辞書式順序付けとする。

図6に本解析における反復回数とP.R.I.の関係を示す。また、図7に辞書式順序付けの場合の残差の振舞いを示す。図6において、オリジナルデータの場合に特に高い前処理効果を得ているが、全体として相関

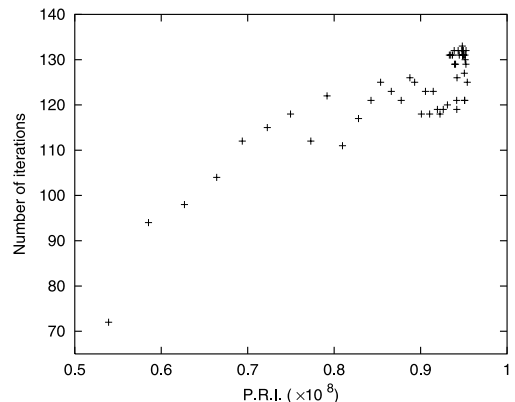


図6 反復回数とP.R.I.の関係 (ポアソン方程式の差分解析)
Fig. 6 Relationship between number of iterations and P.R.I. (Finite difference analysis of Poisson equation).

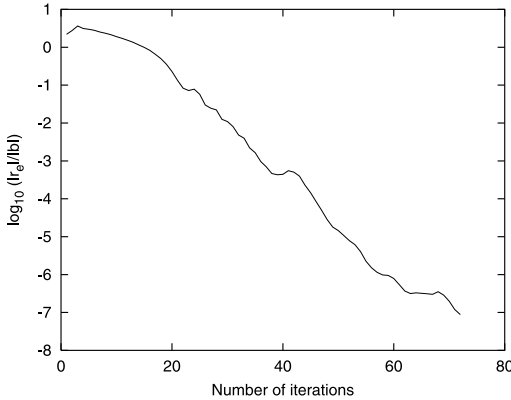


図7 残差の収束過程 (ポアソン方程式の差分解析)

Fig. 7 Convergence behavior of residuals (Finite difference analysis of Poisson equation).

がみられ, P.R.I. による前処理効果の見積りが可能であると考えられる.

4.5 3次元渦電流解析 (辺要素有限要素法)

本節では, 電磁場解析の一種である3次元渦電流場の解析を対象とする. 解析対象内の電磁界を記述する方程式は, マクスウェル方程式において変位電流の項を無視することにより与えられる. 本解析では, 辺要素を使用し, 磁気ベクトルポテンシャルのみによる定式化を行う A -法を用いるので, 支配方程式は次式で与えられる.

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}_m) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \quad (17)$$

ここで, \mathbf{A}_m は磁気ベクトルポテンシャル, \mathbf{J}_0 は強制電流の電流密度, ν は磁気抵抗率, σ は導電率を表す. 磁気ベクトルポテンシャルをベクトル補間関数により近似展開し, 式 (17) にガラーキン法を適用することにより, 次式が得られる.

$$[K]\{A_m\} + [M_A] \frac{\partial \{A_m\}}{\partial t} - \{J\} = 0 \quad (18)$$

ここで, $\{A_m\}$ は未知変数 A_{mi} からなる列ベクトルを表す. $[K]$, $[M_A]$ は行列, $\{J\}$ は列ベクトルを表し, 以下のように与えられる.

$$K_{ij} = \sum_e \iiint_e (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{N}_j) dV \quad (19)$$

$$M_{Aij} = \sum_e \iiint_e \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dV \quad (20)$$

$$J_i = \sum_e \iiint_e \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 dV \quad (21)$$

表3 3次元渦電流解析テストモデル
Table 3 3-d eddy-current analysis test model.

Number of unknowns	1,011,920
Number of edge elements	327,680
Number of nodes	342,225

ここで, e は各要素, m は全要素数, N はベクトル補間関数を表す. 未知変数の総数を n として, 行列 $[K]$, $[M_A]$ は n 次正方行列, $\{A_m\}$ および $\{J\}$ は n 次元ベクトルである. 式 (18) 中の時間微分項を後退差分法により解くと,

$$[Q]\{A_m\} = \{f\} \quad (22)$$

ただし,

$$[Q] = \left([K] + \frac{1}{\Delta t} [M_A] \right), \quad (23)$$

$$\{f\} = \frac{1}{\Delta t} [M_A]\{A_{mold}\} + \{J\} \quad (24)$$

の連立一次方程式が得られる. ここで, 本論文では解析対象として電気学会3次元渦電流解析モデル¹⁵⁾を用いる. 表3に解析の諸元を示す. 本解析では, 解析領域中に非導電性の部分 (空気領域) が含まれるため, 係数行列 $[Q]$ は半正定値となる.

本解析では, 時間発展問題のある1ステップを対象としてP.R.I.と前処理効果について調べる. 本解析のような辺要素を用いた電磁場解析では, 係数行列は正值性を失っている場合がほとんどあり, ILU(0)分解前処理をそのまま用いることができず, シフト付きICCG法が用いられる. そこで, P.R.I.の評価値として, 3.3節で述べた値を用いることとする. なお, 本解析ではシフト量として係数行列の対角要素に0.03を乗じた値による対角行列を用いる.

図8に異なる乱数系列による2回の試行における反復回数とP.R.I.の相関を示す. Test 1の結果では, 反復回数とP.R.I.に強い相関がみられる. 一方, Test 2の結果では, P.R.I.により予想される反復回数よりも多くの反復回数を要する場合が散見される. このような現象は他の乱数系列を用いた場合でもみられたが, Matrix Market データ2の解析時のような収束曲線のスパイクによるものではないことが確認されており (図9参照), 現在のところその原因については明らかになっていない. しかしながら, このような特異的な振舞いを示したオーダリングを除くと, 2回の試行の結果は高い一致度を示しており, P.R.I.と反復回数の相関性も高い. したがって, 本解析においてもP.R.I.は前処理効果の見積りとして有用性があると考えられる.

4.6 Remainder matrix と P.R.I. の関係

本節では, Remainder matrix のフロベニウスノル

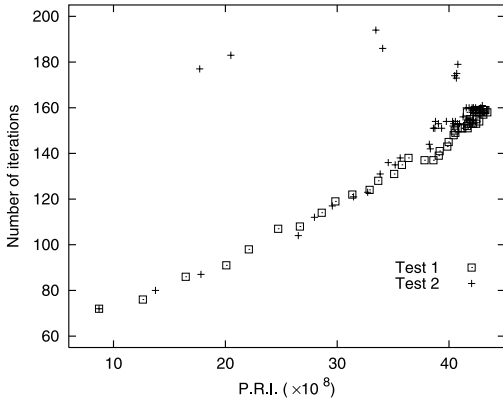


図 8 反復回数と P.R.I. の関係 (3次元渦電流解析)

Fig. 8 Relationship between number of iterations and P.R.I. (3-d eddy-current analysis).

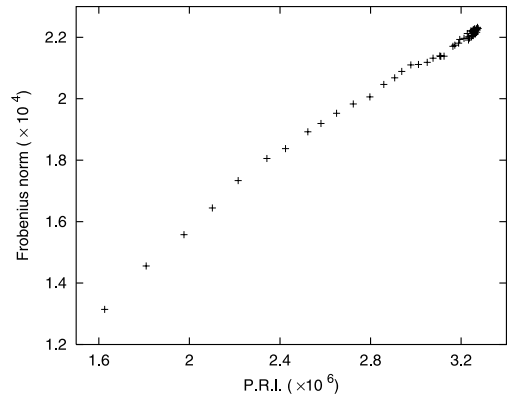


図 10 P.R.I. と Remainder matrix のフロベニウスノルムとの関係 (Matrix Market データ 2)

Fig. 10 Relationship between P.R.I. and the Frobenius norm of the remainder matrix (Matrix Market data 2).

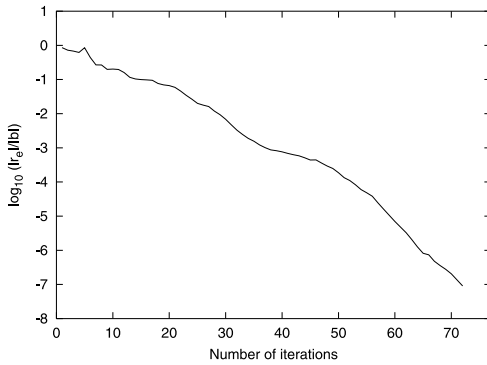


図 9 残差の収束過程 (3次元渦電流解析)

Fig. 9 Convergence behavior of residuals (3-d eddy-current analysis).

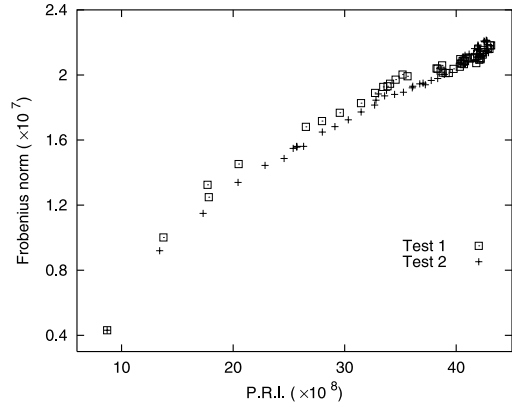


図 11 P.R.I. と Remainder matrix のフロベニウスノルムとの関係 (3次元渦電流解析)

Fig. 11 Relationship between P.R.I. and the Frobenius norm of the remainder matrix (3-d eddy-current analysis).

$\|R\|_F$ と P.R.I. の関係について検討する。まず、上記の解析例において P.R.I. による評価と反復回数との間にばらつきがみられた Matrix Market データ 2 の場合と 3次元渦電流解析の場合について、 $\|R\|_F$ と反復回数の関係を調べた。その結果、図 4、図 8 にみられるような評価のばらつきは $\|R\|_F$ を評価指標としても現れることが分かった。また、図 10、図 11 に Remainder matrix のフロベニウスノルムと P.R.I. の相関を示す。図 10、図 11 より両者に強い相関関係があることが分かる。また、表 4 に Remainder matrix のフロベニウスノルムの導出に必要な付加的なメモリ量を係数行列の格納に必要なメモリ量との比で示す。図 10、図 11、表 4 より P.R.I. は、Remainder matrix のフロベニウスノルムと比べ、同等の評価を行うことが可能であり、必要となる付加的なメモリ量が少ない点で有利であることが分かる。

表 4 Remainder matrix のフロベニウスノルムの計算に必要なメモリ量 (係数行列の格納に必要なメモリ量との比)

Table 4 Additional memory requirement for computing the Frobenius norm of the remainder matrix (ratio compared to memory size for coefficient matrix).

Matrix Market data 1	0.44
Matrix Market data 2	0.30
ポアソン方程式の差分解析	0.57
3次元渦電流解析	1.92

5. おわりに

本論文では、ILU 分解前処理におけるオーダリングによる影響について、P.R.I. と呼ぶ評価指標を導入し、ICCG(0) 法およびシフト付き ICCG(0) 法における同手法の有効性について調べた。Matrix Market による

データ, 2次元ポアソン方程式の差解析, 3次元渦電流解析による数値計算を行った結果, ある程度のばらつきがあるものの全体として評価指標と反復回数間に相関がみられた. また, P.R.I. は代表的な既存評価指標である Remainder matrix のフロベニウスノルムと強い相関を持ち, かつ導出に必要なメモリ量が大幅に少ない点で同指標と比べて有用性が高いことが示された.

本評価指標は 3.3 節で述べたような様々なパラメータをとまう ILU 分解系前処理の自動パラメータ決定や, より有効性の高いオーダリングの自動決定などに有効性があると考えられ, 今後の課題として検討をしていきたいと考えている. また, より数多くの問題による当該手法の評価や非対称問題における有用性の検証についても今後の研究課題と考えている.

本研究の一部は, 日本学術振興会科学研究費補助金(若手研究(B), 課題番号 16700060)の助成を受けている.

参考文献

- 1) Meijerink, J. and van der Vorst, H.A.: An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix Is a Symmetric M-matrix, *Mathematics of Computation*, Vol.31, pp.148–162 (1977).
- 2) Benzi, M., Joubert, W. and Mateescu, G.: Numerical Experiments with Parallel Orderings for ILU Preconditioners, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, Vol.8, pp.88–114 (1999).
- 3) van der Vorst, H.A. and Chan, T.F.: Parallel Preconditioning for Sparse Linear Equations, *Z. angew. Math. Mech.*, Vol.76, pp.167–170 (1996).
- 4) Saad, Y.: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, PA (2003).
- 5) Duff, I.S. and Meurant, G.A.: The Effect of Ordering on Preconditioned Conjugate Gradients, *BIT*, Vol.29, pp.635–657 (1989).
- 6) Doi, S. and Lichnewsky, A.: A Graph-Theory Approach for Analyzing the Effects of Ordering on ILU Preconditioning, *INRIA report 1452* (1991).
- 7) Doi, S. and Washio, T.: Ordering Strategies and Related Techniques to Overcome the Trade-off Between Parallelism and Convergence in Incomplete Factorization, *Parallel Computing*, Vol.25, pp.1995–2014 (1999).
- 8) Iwashita, T., Nakanishi, Y. and Shimasaki, M.: Comparison Criteria for Parallel Orderings in ILU Preconditioning, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.26, No.4, pp.1234–1260 (2005).
- 9) Jones, M.T. and Plassmann, P.E.: The Efficient Parallel Iterative Solution of Large Sparse Linear Systems, *Graph Theory and Sparse Matrix Computations*, IMA, Vol.56, pp.229–245 (1994).
- 10) 襲田 勉, 丸山訓英, 鷲尾 巧, 土肥 俊, 山田進: 非構造メッシュ用 BILU 前処理付き反復法のベクトル・並列化手法, 情報処理学会論文誌: ハイパフォーマンスコンピューティングシステム, Vol.41, No.SIG 8 (HPS 2), pp.92–99 (2000).
- 11) Iwashita, T. and Shimasaki M.: Algebraic Multi-color Ordering for Parallelized ICCG Solver in Finite Element Analyses, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.38, pp.429–432 (2002).
- 12) Fujiwara, K., Nakata, T. and Fusayasu, H.: Acceleration of Convergence Characteristic of the ICCG Method, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.27, pp.1958–1961 (1993).
- 13) 井上明彦, 畑崎隆雄, 柿原正伸, 南里豪志, 藤野清次: ダブルオーダリングによる VRIC(ω)-CG 法の並列化—ブロック数を増した代数ブロック化赤-黒順序付け (ABRB) 法, 第 8 回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム, pp.107–112 (2005).
- 14) Demmel, J.: *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, PA (1997).
- 15) Nakata T., Takahashi N., Imai T. and Muramatsu, K.: Comparison of Various Methods of Analysis and Finite Elements in 3-D Magnetic Field Analysis, *IEEE Trans. Magn.*, Vol.27, pp.4073–4076 (1991).

(平成 17 年 6 月 18 日受付)

(平成 17 年 9 月 20 日採録)

岩下 武史 (正会員)



1998 年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了. 京都大学リサーチアソシエイト, 同大学助手を経て, 2003 年より同大学学術情報メディアセンター助教授, 現在に至る. 高性能計算, 線形反復法, 電磁界解析に関する研究に従事. 京都大学博士(工学). IEEE, 日本 AEM 学会, 日本計算工学会各会員.



島崎 眞昭（正会員）

1971 年京都大学大学院工学研究科博士課程単位修得退学．1971 年京都大学助手（工学部情報工学科），同大学助教授を経て，1989 年九州大学教授（大型計算機センター），1997 年京都大学教授（工学研究科電気工学専攻），現在に至る．工学博士．スーパーコンピューティング，計算科学，計算機ソフトウェアの研究に従事．電子情報通信学会，電気学会，日本応用数理学会，日本ソフトウェア科学会，ACM，IEEE，SIAM 各会員．
