

推薦論文

曲率フローに基づく閉曲線ブレンディング

平野 正浩^{1,a)} 渡辺 義浩¹ 石川 正俊¹

受付日 2016年9月1日, 採録日 2017年4月10日

概要: 本稿では, 平面上にある閉曲線間の滑らかな遷移を記述する閉曲線ブレンディングと呼ばれる問題について, 曲率フローを用いて定式化する手法を提案する. 従来の閉曲線ブレンディング手法では, 閉曲線を生成するための制約条件が曲線の位置を変数として記述されるため, 非線形制約下での最適化問題を解く必要があった. そこで, 閉曲線条件が曲率の時間微分に関して線形に記述できることを利用して, 曲率の L^2 内積に関する曲率エネルギーの勾配フローをとることにより, 線形制約下での線形フローとして閉曲線ブレンディングを定式化する. これにより提案手法は, 自然なブレンディング曲線を生成するだけでなく効率的に計算することができるため, 高速なブレンディングを実現する.

キーワード: 閉曲線ブレンディング, 曲率フロー, 離散曲率

Closed Curve Blending Based on Curvature Flow

MASAHIRO HIRANO^{1,a)} YOSHIHIRO WATANABE¹ MASATOSHI ISHIKAWA¹

Received: September 1, 2016, Accepted: April 10, 2017

Abstract: We propose a novel closed curve-blending technique that describes continuous and gradual transitions between a pair of closed polygons in a plane. The main contribution of this study is to formulate the closed curve-blending problem in terms of curvature flow. The curvature flow is designed to be a gradient flow derived by an appropriate energy function with respect to an L^2 inner product on curvature. By designing an appropriate energy function, we can construct linear curvature flow that travels from the source polygon to the target polygon under linear constraints. This method achieves natural blending and contributes to a significant reduction in computation time in comparison with related methods.

Keywords: closed curve blending, curvature flow, discrete curvature

1. はじめに

シェープブレンディング (シェープモーフィング) とは, 閉曲線やソリッドモデルの間の遷移を連続に表現する手法であり, コンピュータグラフィックスや計算幾何学などの分野で活発に研究されている問題である. そのなかでも対象を閉曲線に限定した問題を閉曲線ブレンディングと呼び, アニメーションの生成 [1] やシェープマッチング [2] などの様々なアプリケーションにおいて重要な役割を果たしている. 閉曲線ブレンディングを計算機で行うためには, ブレンディングする閉曲線を離散化したポリゴンに対して, 初

期状態のポリゴンの頂点が終了状態のポリゴンのどの頂点に対応するのか, という対応関係を明らかにする必要がある. この問題は頂点对応問題と呼ばれ, 多くの研究が行われている [13], [14]. 閉曲線ブレンディングは, このような頂点对応問題に加え, 各頂点がブレンディング中に通過するパスを求める頂点パス問題と呼ばれる問題を解く必要がある. 本稿では, 特に頂点パス問題に着目し, 図 1 に示すような閉曲線ブレンディングを行う手法を提案する.

従来の閉曲線ブレンディング手法では, 曲線に関する長さや角度などの値を線形補間することによって曲線の遷移を求めるという方針が採用されてきた. しかし, このよう

¹ 東京大学大学院情報理工学系研究科
Graduate School of Information Science and Technology,
The University of Tokyo, Bunkyo, Tokyo 113-8656, Japan

a) Masahiro_Hirano@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

本稿の内容は 2015 年 11 月の第 161 回グラフィックスと CAD 研究発表会にて報告され, 同研究会主査により情報処理学会論文誌ジャーナルへの掲載が推薦された論文である.

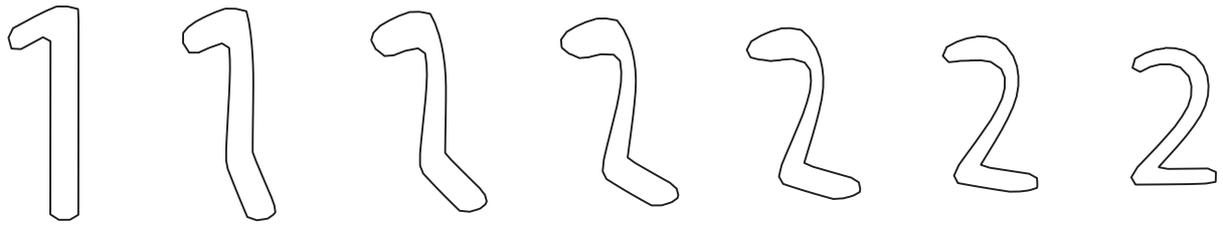


図 1 提案手法による閉曲線ブレンディングの例. この例では, 「1」から「2」への閉曲線ブレンディングを実現している

Fig. 1 An illustration of closed curve blending by proposed method. This figure shows blending between polygons in the shape of ‘1’ and ‘2’.

に線形補間した値から再構成した曲線は一般に閉曲線にならないという問題がある. このため, 再構成した曲線をわずかに変形させることで曲線の端点を一致させることにより, 閉曲線にする処理が必要となる. これは通常, 端点の位置に関する非線形な制約式として書き下され, 最適化問題に帰着されることが多い [15], [17] が, 局所最適解に陥る可能性があるほかに, 計算コストが大きくリアルタイムな処理に不向きであるという課題がある.

そこで本稿では, 曲線上の各点における局所的な曲がり具合を示す値である曲率を変数とすることで, この閉曲線に関する制約式を曲率の時間微分に関して線形に書き下せる [8] ことを用いて, 曲線間の遷移を記述する閉曲線ブレンディング問題を, 線形制約条件下の曲率フローを用いて定式化することを提案する.

このように曲率フローを用いる手法は, 曲線や曲面に関するジオメトリ処理において近年よく用いられている手法 [4] である. Desbrun らは, 曲面に対して定義された Membrane エネルギーに対して最急降下法により導出される平均曲率フローを用いることで, 曲面のフェアリングを実現している [9]. また, Willmore エネルギーに基づく Willmore フローを用いることでフェアリングを実現している研究も行われている [3], [8], [20].

以上のように, 曲率フローは曲線や曲面の形状の遷移を記述する手法であると解釈することができるため, 本稿で提案するように, 閉曲線ブレンディングにも応用することが可能であると考えられる. しかし, フェアリングの際に用いられるエネルギーは一般に, 対象となる形状の次元において最もエネルギーの低い形状 (2次元の場合は円) を基準としたものであるため, 直接閉曲線ブレンディングに応用することはできず, エネルギー関数の最適な設計が必要である. そこで, 閉曲線対の曲率の差の 2 乗をエネルギー関数とすることで, 曲率フローが閉曲線ブレンディングに応用できることを提案する. この曲率フローは線形であり, また閉曲線に関する条件が曲率の時間微分に関して線形に書き下せることから, 数値的に安定であり高速に計算することが可能である.

また曲率は, 形状認識にも用いられる [12] ように曲線の

性質を良くとらえたものであり, パラメトリゼーションや剛体変換に不変な内在量である. さらに関連研究 [15], [18] でも閉曲線ブレンディングに用いられているように, 審美性の観点からも有効であると考えられる. これらの点から, 曲率フローを用いる本手法は, 関連手法と比較して遜色ない品質を持つブレンディングを, 非常に高速に実現できることが期待できる.

閉曲線ブレンディング問題が対象とする閉曲線としては, しばしば C^2 -級の曲線が仮定されている [18] が, 曲率関数を構成する際に必要な弧長パラメトリゼーションを解析的に行うことが困難であることから, 本稿では閉曲線を離散化したポリゴンを対象とする. 本稿では, ポリゴンから計算した離散曲率ベクトルを用いて構成した曲率フローにより, ブレンディングしたポリゴンを求める. また, 提案手法の有効性を確認するため, 関連研究との比較実験を行うことにより, 従来手法よりも高速でかつ自然なブレンディングが達成されたことを確認した.

2. 準備

2.1 曲率

\mathbb{R}^2 上の C^2 -級曲線に関する基本的な知識を整理する. \mathbb{R}^2 上の任意の曲線 $\gamma(u) : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ が与えられたとき, 弧長パラメータ s を

$$s = \int_a^u \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du \quad (1)$$

と定義する. このとき, この曲線が正則 (任意の u に対して $|d\gamma/du| \neq 0$) であると仮定して, 曲線 γ を弧長パラメータ s で書き表したものを $\gamma(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ とする (ただし, L は曲線 γ の長さ). ここで, $|d\gamma/ds| = 1$ となることに注意する. 任意の弧長パラメータ $s \in [0, L]$ に対応する曲線上の点における単位接ベクトルを e_t とし, それに反時計回りに直交する単位法線ベクトルを e_p とする. このとき, 曲線 $\gamma(s)$ に対応する曲率関数 $\kappa(s)$ を

$$e'_t = \kappa(s)e_p \quad (2)$$

と定義する (ただし, $e'_t = |de_t/ds|$).

弧長パラメータを持つ 2 曲線 $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$ の曲率関数

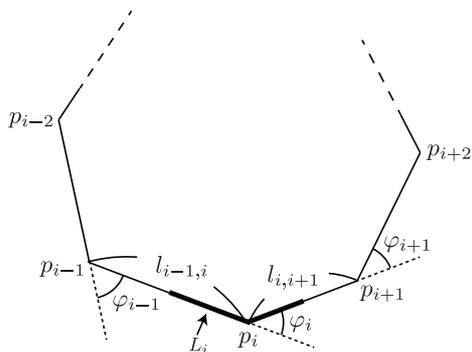


図 2 ポリゴンに関するパラメータの定義
Fig. 2 Definitions of polygon parameters.

$\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ が一致するための必要十分条件は、回転と並進によって $\gamma_1(s)$ を $\gamma_2(s)$ に重ねることができることである [22]. 本稿では、回転と並進によって重ね合わせることができる曲線を同一視する.

2.2 離散曲率

正則な閉曲線 $\gamma(u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を離散化することを考える. $[a, b]$ の任意の分割 $\sigma = \{a = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n = b\}$ に対して, 図 2 に示すように, 対応する曲線上の点 $p_i = \gamma(\sigma_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) の集合を得る. γ は閉曲線であるので, $p_0 = p_n$ であることに注意する. ここで, 区分的線形な \mathbb{R}^2 上の関数

$$\hat{\gamma}(u) = \frac{u - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} p_i + \frac{\sigma_i - u}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} p_{i-1} \quad (\sigma_{i-1} \leq u \leq \sigma_i) \quad (3)$$

($i = 1, 2, \dots, n$) を考える. この区分的線形関数 $\hat{\gamma}$ の像をポリゴンと呼び, $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ をその頂点集合と呼ぶ. P を結ぶ線分をエッジと呼び, その集合を E で表す. 文脈から明らかなきは, 頂点集合 P によってポリゴン自体を指す.

前節で定義した曲率は微分をとる操作であったため, ポリゴンに対して直接適用することはできない. そこで, 離散微分幾何 [7] に基づいて離散曲率を定義する. 頂点 p_i における離散曲率 $\hat{\kappa}_i$ は, 双対辺の長さ

$$L_i = \begin{cases} (\|p_1 - p_0\| + \|p_0 - p_{n-1}\|)/2 & (i = 0) \\ (\|p_{i+1} - p_i\| + \|p_i - p_{i-1}\|)/2 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4)$$

と外角 φ_i を用いて,

$$\hat{\kappa}_i = \frac{\varphi_i}{L_i} \quad (5)$$

と書ける. また, 頂点集合 $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ を持つポリゴンの離散曲率ベクトルを,

$$\hat{\kappa} = [\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_{n-1}]^T \quad (6)$$

と定義する.

ここで, 各エッジの長さとして離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}$ が与えられれば, ポリゴンが回転や並進を除いて一意に定まることに注意する.

2.3 曲線のエネルギー

曲線に対してエネルギーを定義することを考える. 弧長パラメータによって表された正則な閉曲線 $\gamma(s) : I = [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ のエネルギーを, その曲率関数 $\kappa(s)$ を用いて

$$E(\gamma) = \int_0^L \kappa(s)^2 ds \quad (7)$$

と定義し, 曲率エネルギーと呼ぶ. この曲線を離散化して得られるポリゴンの曲率エネルギーは, 離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}$ を用いて

$$E(P) = \|\hat{\kappa}\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\kappa}_i^2 \quad (8)$$

となる.

2.4 曲率フロー

曲線 γ とそのエネルギー $E(\gamma)$ に対して定義される偏微分方程式

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\nabla E(\gamma) \quad (9)$$

を考える. この解は, 曲線を要素とする多様体上の 1 パラメータ変換群 (フロー) となる [23]. 特に, 曲率に変数変換したものを曲率フローと呼ぶ. このようにして定義した曲率フローは, 曲率エネルギーの最急降下方向に曲率関数を更新するようなフローであると理解できる. しかし, 曲率エネルギーは無次元の関数空間上で定義されるものであるため, 式 (9) 中の ∇ は汎関数微分を表す勾配作用素となる. このような勾配は, その空間に入っている内積によって定義されるため, どのような内積をとるかが重要となる. たとえば式 (7) に示す曲率エネルギーに関する曲率フローの場合, 曲線の位置 γ に関する勾配は非線形となるが, 曲率を変数とする曲率エネルギー $E(\kappa)$ に対して曲率の L^2 ノルムに関する勾配を計算すると, 曲率フローは

$$\dot{\kappa} = -2\kappa \quad (10)$$

となり, 空間微分を含まない線形なフローに帰着することが知られている [8]. こうしたフローの解は数値的に安定に計算できるため, 計算コストの低い前進オイラー法を用いて計算することができる.

ポリゴンに対しては, 有限次元ベクトルである離散曲率ベクトルを用いてフローを書き下すことができる. すなわち, ポリゴンの曲率エネルギー $E(\kappa) = \|\hat{\kappa}\|^2$ に対する曲率フローは

$$\dot{\hat{\kappa}} = -\nabla E(\hat{\kappa}) = -2\hat{\kappa} \quad (11)$$

となり, ポリゴンのフェアリングなどに用いられる [8].



図 3 曲率を線形補間し，再構成した曲線は一般に閉曲線にならない
 Fig. 3 Curves generated by curvature-based interpolation are not necessarily closed.

3. 関連研究

閉曲線ブレンドイングとは，2つの閉曲線 $\gamma_s : I_s(\mathbb{C} \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_g : I_g(\mathbb{C} \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，パラメータ t に関する写像 $t \mapsto \gamma_t$ が連続であり，かつ $\gamma_{t=0} = \gamma_s$, $\gamma_{t=T} = \gamma_g$ となるような曲線族 $\{\gamma_t\}_{t \in [0, T]}$ を求める問題であると考えられる。

最も単純なブレンドイング手法は，閉曲線対 γ_s, γ_g そのものを線形補間することで曲線族 $\{\gamma_\tau\}_{\tau \in [0, 1]} = (1-\tau)\gamma_s + \tau\gamma_g$ を得るものである。しかしこの手法は，5章でも示すように，曲線のパラメトリゼーションや方向によって結果が異なることなどにより，不自然なブレンドイングを生成するという欠点がある。

そこで曲線の位置や方向，パラメトリゼーションによらないブレンドイングを実現する手法が提案されてきた [10], [15], [16], [17], [18]。これらの手法の多くは閉曲線を離散化したポリゴンを対象とし，ポリゴンのエッジ長や外角，曲率などの幾何量を線形補間して得られた値から再構成したものを理想的なブレンドイング曲線としているが，図 3 に示すように一般に始点と終点が一致せず，これらを閉じる操作を行う必要がある。

閉じる操作には大きく分けて2つあり，内角を保ったままエッジ長を調整する手法 [10], [16], [17], [18] と，エッジ長を保ったまま内角を調整する手法 [15] が提案されている。エッジ長を調整する手法では，単純な閉曲線どうしのブレンドイングにおいても大きくエッジ長を調整しなければならないケースが存在することが知られており [16]，等長変形が要求される場合には適用することができないことが知られている。Dym らによって提案されている方法 [10] は，Sederberg らによって提案された *angle-length method* として知られる手法 [16] をベースにしており，外角とエッジ長をそれぞれ線形補間して得た値から最も近い閉曲線への射影を二次錐計画問題として定式化している。一方で，内角を調整する手法においても非線形最適化問題として定式化したうえで解く手法が提案されている [15] が，問題の制約式が強い非線形性を持つことから，求めた解が大域的最適解を持つことが保証されないうえに，多くの計算時間を要するという問題点がある。

また，関連する手法として，閉曲線内を三角形分割して得られた領域間の遷移を求めることでブレンドイングを行

うものがある。Alexa らは，三角形分割した領域の対応付けが与えられた条件で，最も剛体変形に近いブレンドイングを計算する手法を提案している [1]。また Chien らは，同様に入力から計算される調和写像を用いて，歪みが小さいブレンドイングを表現する調和写像の計算手法を提案している [6]。これらの手法は，三角形分割した領域の対応付けなどの形状内部の情報を必要とするが，提案手法は閉曲線の情報のみを用いてブレンドイングを行う。

他にも，ブレンドイング曲線に関して特別な条件を付与して閉曲線ブレンドイング問題を解く研究も存在する。たとえば，ポリゴンの頂点と辺に対してエネルギーを適切に設計することで，自己交差を回避するフェアリングやブレンドイングを実現する手法が提案されている [5], [11]。Iben らによって提案されているブレンドイング手法 [11] では，頂点と辺の間のユークリッド距離の2乗に反比例するエネルギー関数を用いているが，その勾配は非線形式となってしまう大域的最適解が保証されない。さらに，多くの計算時間を要するため，リアルタイムな処理が必要とされる場面では適用することが困難な手法である。

4. 曲率フローに基づく閉曲線ブレンドイング手法

4.1 概要

提案手法では以下のようにして，与えられた2つの曲線から計算した曲率フローに対して閉曲線条件を適用しながらブレンドイングしたポリゴンを求める。

- (1) 閉曲線を離散化してポリゴンを構成する (4.2 節)。
- (2) ジョイントパーティションによってエッジ長を共有する新たなポリゴンを生成し，離散曲率ベクトルを計算する (4.3 節)。
- (3) ブレンドイングを実現する曲率フローを求め (4.4 節)，閉曲線条件を適用しながら離散曲率ベクトルを更新する (4.5 節)。
- (4) 離散曲率ベクトルと (2) で求めたエッジ長を用いてポリゴンを再構成する (4.6 節)。
- (5) 収束するまで (3)，(4) を繰り返す。

4.2 閉曲線からのポリゴンの構成

はじめに，2.2 節で述べた方法に基づいて閉曲線 $\gamma(u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ からポリゴンを構成する。

曲率の大きさに応じてサンプリング密度を変えることにより離散化誤差を抑える手法が提案されている [19] が、本稿では簡単のため、 $\gamma(u)$ の定義域を等間隔にサンプリングするような分割 $\sigma = \{\sigma^i = a + i(b-a)/n \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$ によって得られる $\gamma(\sigma^i)$ ($\sigma^i \in \sigma$) を頂点とするポリゴンを考える。ここで $\gamma(u)$ のパラメータは任意であるので、この離散化手法によって得られるポリゴンの辺長は必ずしも等しくならないことに注意する。提案手法ではエッジ長を固定し、離散曲率ベクトルを変化させることでポリゴンの変形を表現するため、全長が 1 となるように正規化してポリゴンを構成する。ブレンディングする閉曲線対を上述のように離散化して得られるポリゴンを、それぞれスタートポリゴン P_s 、ゴールポリゴン P_g と呼ぶ。

4.3 ジョイントパーティション

曲率フローは、同じエッジ長を持つ 2 つのポリゴンの間の遷移を記述するものであるが、上述のようにして構成したスタートポリゴン P_s とゴールポリゴン P_g のエッジ長は必ずしも同じであるとは限らない。このため、 P_s 、 P_g それぞれに対して新たに頂点を挿入することで、エッジ長を共有させることを考える。

そこで、ジョイントパーティション [15] と呼ばれる手法によって分割を一致させる。スタートポリゴン P_s とゴールポリゴン P_g はそれぞれ、 $[0, 1]$ 上で定義された弧長パラメータ s を持つ区分線形関数 $\hat{\gamma}_s(s)$ 、 $\hat{\gamma}_g(s)$ の像であると考えることができる。このとき、 $\hat{\gamma}_s(s)$ 、 $\hat{\gamma}_g(s)$ に対応する分割を σ_s 、 σ_g とし、そのジョイントパーティションを $\sigma_j = \sigma_s \cup \sigma_g$ と定義する。ジョイントパーティション σ_j によって、新たに頂点が追加されたポリゴンを \bar{P}_s 、 \bar{P}_g とすると、

$$\bar{P}_s = \{p_j \mid p_j = \hat{\gamma}_s(s); s \in \sigma_j\} \quad (12)$$

$$\bar{P}_g = \{p_j \mid p_j = \hat{\gamma}_g(s); s \in \sigma_j\} \quad (13)$$

と書ける。これらのポリゴンは分割を共有しているため、エッジ長も共有している。このようにして、エッジ長を共有するポリゴン対を構成することができる。 \bar{P}_s 、 \bar{P}_g から計算した離散曲率ベクトルを $\hat{\kappa}_s$ 、 $\hat{\kappa}_g$ とする。

4.4 最急降下法による曲率フローの設計

フェアリングを目的として曲率フローを用いる手法 [8] では、曲率フローを導出するエネルギー関数として曲率エネルギーを用いているが、ブレンディングに適用する際には、最適なエネルギー関数の設計が必要である。すなわち、初期条件を $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}_s$ として、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\hat{\kappa}_g$ に収束するような曲率フローを導くエネルギー関数を設計したい。ここで、たとえば曲率エネルギーの差

$$E = \|\hat{\kappa}\|^2 - \|\hat{\kappa}_g\|^2 \quad (14)$$

をエネルギー関数とする曲率フローは、フェアリングと同様に $\dot{\hat{\kappa}} = -2\hat{\kappa}$ となるため、 $\hat{\kappa}$ は $\hat{\kappa}_g$ に収束しない。そこで本稿では、エネルギー関数として

$$E = \|\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g\|^2 \quad (15)$$

を用いることを提案する。このエネルギーに対して 2.4 節で見たように、 L^2 内積に関する勾配をとることで得られるフローは

$$\dot{\hat{\kappa}} = -2(\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g) \quad (16)$$

となり、線形なフローとなる。この曲率フローの初期条件として $\hat{\kappa}_{t=0} = \hat{\kappa}_s$ を用いることで、ブレンディングをこの曲率フローで表現することができる。このようにして定義された曲率フローは、付録 A.1 に示すように $\hat{\kappa}_g$ に向かって収束する。

また数値計算するために、この曲率フローを時間的に離散化する。この曲率フローは線形であり、位置に関する微分を含まないため安定性が高く、計算コストの低い前進オイラー法を用いて差分化し、直接次の値を計算することが可能である。すなわち、

$$\hat{\kappa}_{t+dt} = \hat{\kappa}_{t=t} - 2(\hat{\kappa}_{t=t} - \hat{\kappa}_g)dt \quad (17)$$

に従って離散曲率ベクトルの更新ステップを数値計算する。しかし、このようにして求めた更新ステップをそのまま適用すると閉曲線とならないため、次節で述べる閉曲線条件をこの更新ステップに適用する。

4.5 閉曲線条件の適用

4.4 節で導出した曲率フローを閉曲線ブレンディングに適用する際には、以下に示す 2 つの条件を制約として加える [8]。すなわち、弧長パラメータを持つ C^2 -級の閉曲線 $\gamma(s) : [0, L] (\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して、

- $\gamma'(0) = \gamma'(L)$ (Neumann 境界条件)
- $\gamma(0) = \gamma(L)$ (Dirichlet 境界条件)

を満たすように曲率フローを構成する。このうち Neumann 境界条件は、曲線の端点における接ベクトルが等しいことを意味するため、閉曲線における曲率の和が 2π の整数倍と等しくなることと同値である。すなわち、

$$\int_0^L \kappa ds = 2\pi k \quad (18)$$

と書ける。ここで、 $k (\in \mathbb{Z})$ はこの曲線の回転数と呼ばれる。初期状態に対応する閉曲線が Neumann 条件を満たしていると仮定すると、両辺を時間微分して

$$\int_0^L \dot{\kappa} ds = 0 \quad (19)$$

となることから、 $\dot{\kappa}$ と定数関数 $\mathbf{1}$ が L^2 直交すれば、曲率フローが Neumann 条件を満たすことが分かる。一方で

Dirichlet 境界条件は、 $T = \gamma'$ として、

$$\int_0^L T ds = 0 \tag{20}$$

と書けることから、こちらも両辺を時間微分して

$$\int_0^L \dot{T} ds = 0 \tag{21}$$

を得る。ここで、単位法線ベクトル N を用いて $T' = \kappa N$ と書けることに注意して計算すると、

$$\int_0^L \dot{\kappa} \gamma = 0 \tag{22}$$

となる。したがって Dirichlet 境界条件は、 $\dot{\kappa}$ と x -座標関数 γ^x 、 y -座標関数 γ^y それぞれが L^2 直交することであると分かる。以上の制約条件を離散化すると、

$$\langle \langle \dot{\kappa}, \mathbf{1} \rangle \rangle = \langle \langle \dot{\kappa}, \gamma^x \rangle \rangle = \langle \langle \dot{\kappa}, \gamma^y \rangle \rangle = 0 \tag{23}$$

と書ける。

4.4 節で導出した曲率フローにこれらの制約条件を課すためには、曲率の更新ステップ $\delta \hat{\kappa} = -2(\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g)dt$ から、定数ベクトル $\mathbf{1}$ 、 x -座標関数 γ^x 、 y -座標関数 γ^y と直交する成分のみ求めればよい。これは、Gram-Schmidt 法によって行うことができる。

4.6 ポリゴンの再構成

上記のプロセスに従って得られた各頂点ごとの離散曲率ベクトル $\hat{\kappa} = [\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1, \dots, \hat{\kappa}_{m-1}]$ (ただし、 $m = |\bar{P}_s| = |\bar{P}_g|$) から頂点集合 $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{m-1}\}$ を計算し、ポリゴンを再構成する。ポリゴンのエッジの長さは、4.3 節で生成したときの値を用いればよいので、 p_i と p_{i+1} の距離を $l_{i,i+1}$ とする。2.2 節で述べたように、離散曲率ベクトルは曲線の回転および並進移動に対して不変であるので、 $p_1 - p_0$ が x 軸と平行でかつ p_0, p_1 間の距離が $l_{0,1}$ となるように p_0, p_1 を固定する。各頂点に対応する外角 φ_i ($i = 0, 1, \dots, m-1$) は、式 (5) を用いて、

$$\varphi_i = \hat{\kappa}_i L_i \tag{24}$$

となることから、 p_i ($i = 2, 3, \dots, m-1$) の位置は

$$p_i = p_{i-1} + l_{i-1,i} \left[\cos \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j \right), \sin \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j \right) \right]^T \tag{25}$$

に従って帰納的に計算できる。

5. 閉曲線ブレンディング実験

提案する曲率フローに基づく閉曲線ブレンディング手法の有効性を確認するために、4 章で述べた提案手法と関連手法によって実験を行った。

実験で使用したスタートポリゴン、ゴールポリゴンの頂点数は表 1 のとおりである。提案手法におけるタイムス

表 1 ポリゴンの頂点数

Table 1 Number of vertices.

| | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 | Exp. 4 |
|---------------|--------|--------|--------|--------|
| Start polygon | 50 | 50 | 220 | 90 |
| Goal polygon | 50 | 50 | 105 | 144 |

トップは $dt = 0.01$ とし、合計 400 ステップ行った。

なお、実験では 2.6 GHz Intel Core i7 を搭載する MacBook Pro (Retina, Mid2012) を用い、提案手法、比較手法ともに Matlab で実装した。

5.1 ブレンディング結果

提案手法の有効性を確認するために、「チョコキ」から「パー」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 1)、「開いた手」から「サムアップ」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 2)、「箒に乗る少女」から「コウモリ」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 3) と回転数が 0 どのような閉曲線ブレンディング (実験 4) を行った。図 4, 図 5, 図 6, 図 7 は、その結果を示した図である。

比較対象として用いたのは、3 章で述べた頂点位置の線形補間による手法、Saba らによって提案された手法 [15] と Dym らによって提案された手法 [10] である。Saba らの手法における非線形最適化ソルバーは Matlab の `fmincon` を用い、内点法により非線形最適化問題を解いた。ここで、関数評価の最大回数のパラメータを 10,000 とした。これらの比較手法は、スタートポリゴンとゴールポリゴンの頂点位置や離散曲率などをパラメータ $\tau \in [0, 1]$ を用いて線形補間して再構成したものを理想的なポリゴンとしているが、提案手法ではパラメータ τ に相当するものが存在しないように、ゴールポリゴンへ向かう速度が異なる (付録 A.1)。

このため、比較を行うために、提案手法によって求めたブレンディング曲線の中から、これらの線形補間をベースにした手法に対応するブレンディング曲線を求める必要がある。そこで、スタートポリゴンの離散曲率 $\hat{\kappa}_s$ とゴールポリゴンの離散曲率 $\hat{\kappa}_g$ を線形補間して求めた値 $(1-\tau)\hat{\kappa}_s + \tau\hat{\kappa}_g$ に対して、提案手法によって生成されたポリゴンの中から離散曲率ベクトルのユークリッド距離が最も近いものを選択した。このようにして選択されたポリゴンは、パラメトリック距離^{*1}の意味で近いことが示されている [15]。また、生成したいポリゴン数の約 5~10 倍以上のブレンディング曲線をあらかじめ生成することで、十分近いものが選択できることを実験的に確認した。

頂点位置の線形補間によるブレンディング結果は、実験 1 では良好であったが、他の実験では潰れた形状が生成されたり、部分的に縮退することが確認できた。これは、曲

*1 パラメトリック距離とは、弧長パラメータで表現された 2 つの曲線 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ に対して、 $d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{s \in [0, 1]} \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|$ として定義される距離である。

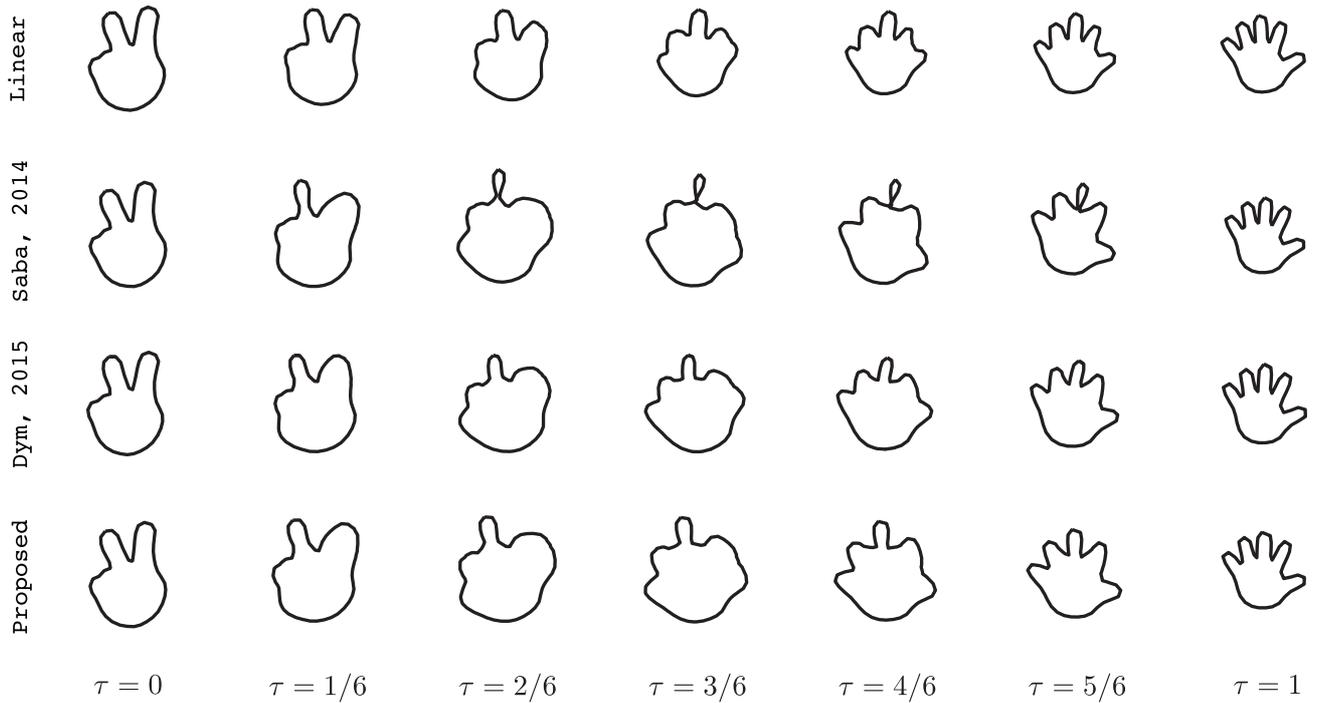


図 4 実験 1 におけるブレンディング結果 (「チョキ」から「パー」)
 Fig. 4 Blending results in Exp. 1.

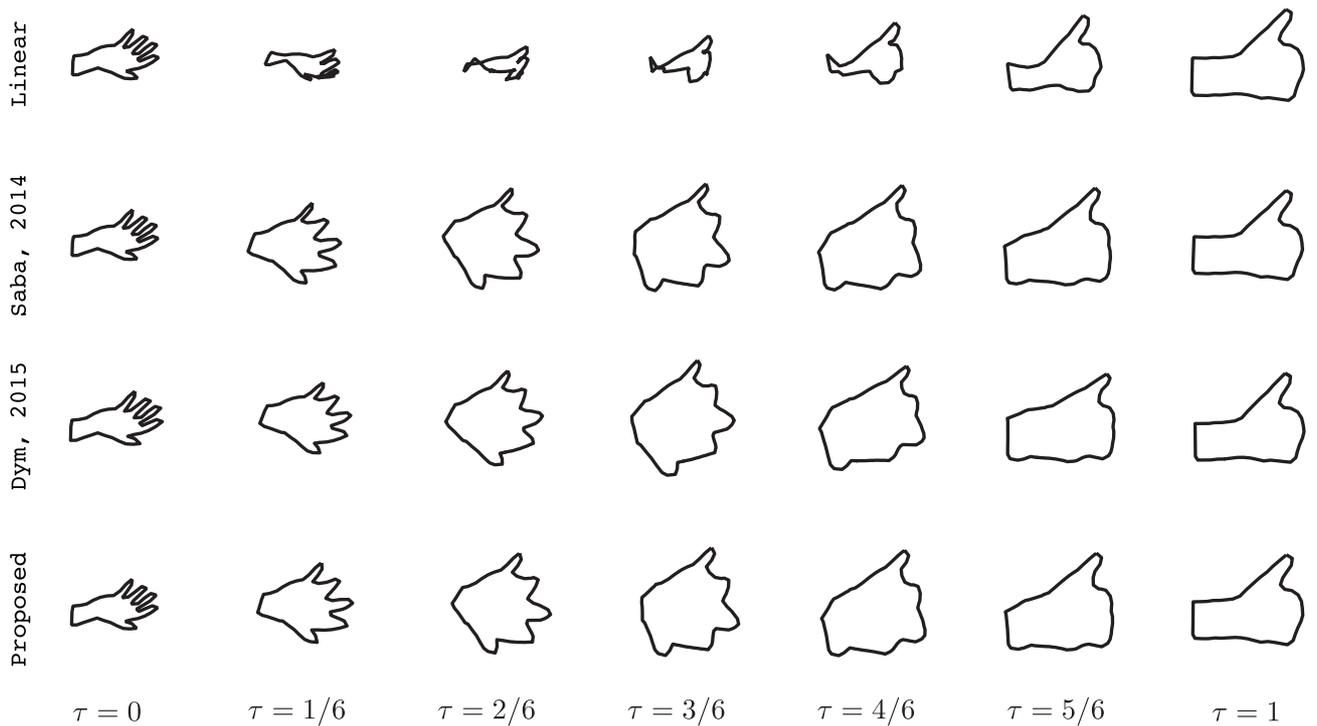


図 5 実験 2 におけるブレンディング結果 (「開いた手」から「サムアップ」)
 Fig. 5 Blending results in Exp. 2.

線の頂点位置が外在的な量であるため、2次元平面上にどのように埋め込まれているかといったことに強く影響を受けることが原因であると考えられる。一方で Saba らの手法では、最適化計算が収束していないため、実験 3 の $\tau = 5/6$ や実験 4 において閉じた曲線の生成に失敗していることが確認できた。また、ブレンディングの自然さは人

の目による主観的な評価であるため、定量的に評価することは困難であるものの、提案手法は Dym らの手法と比較して遜色ない自然なブレンディング曲線が生成できていることが確認できた。

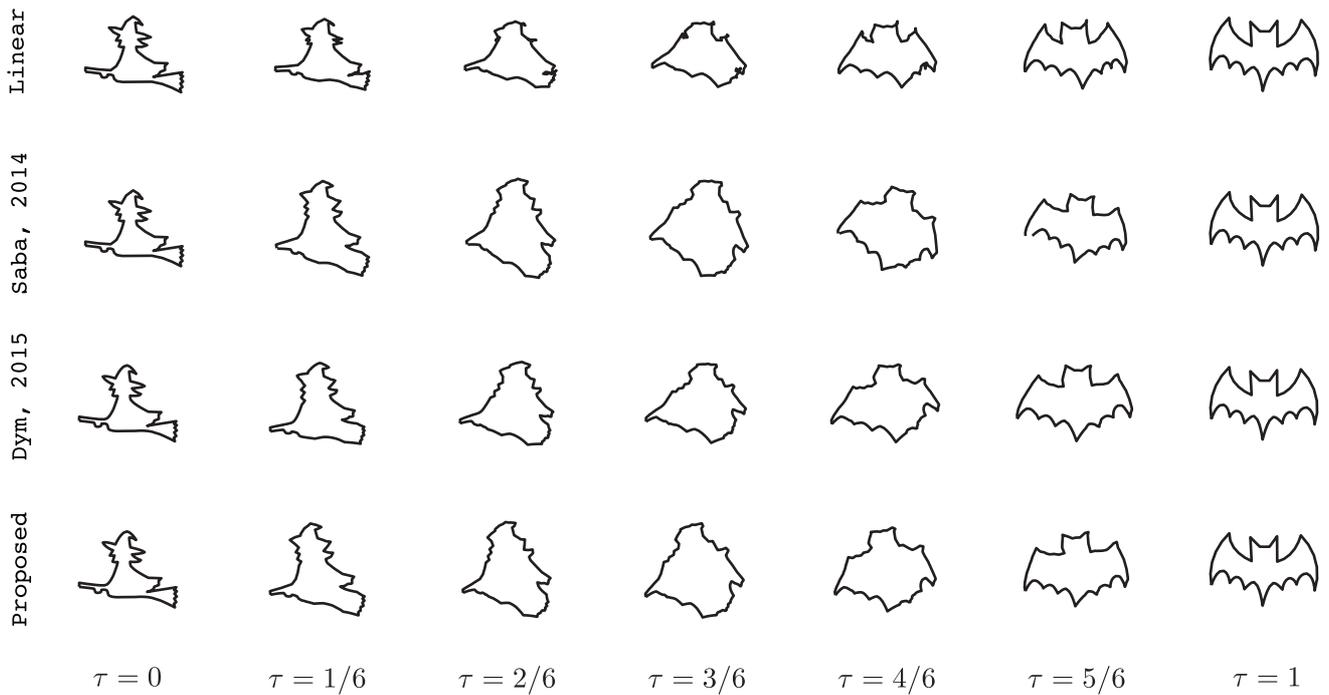


図 6 実験 3 におけるブレンディング結果（「箒に乗る少女」から「コウモリ」）

Fig. 6 Blending results in Exp. 3.

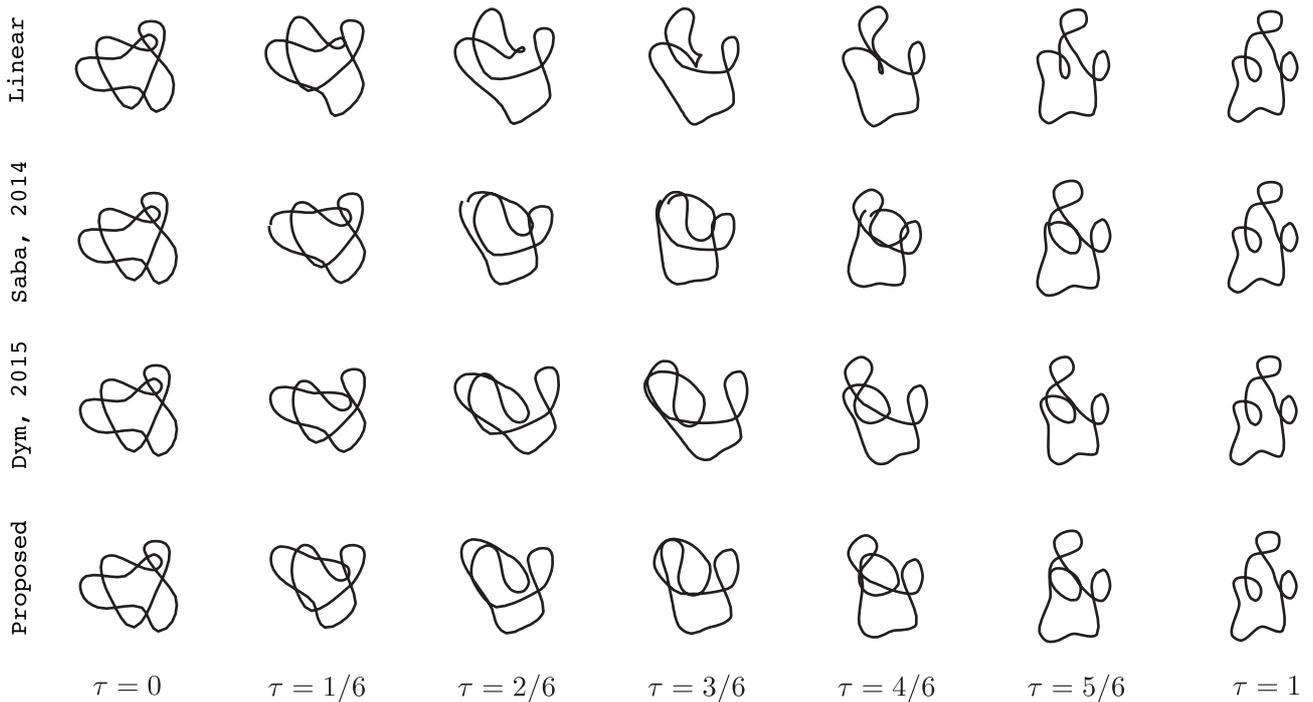


図 7 実験 4 におけるブレンディング結果（回転数が 0 だろうの曲線）

Fig. 7 Blending results in Exp. 4.

5.2 ブレンディングに関する定量評価

ブレンディング結果を定量的に評価するために、Saba による手法と Dym による手法がともに、「スタートポリゴンとゴールポリゴンに関する外角や辺長といった幾何量を線形補間して得た値から再構成したポリゴンが必ずしも閉じないため、最適化などの処理を行うことで閉じたブレンディング曲線を計算する」というプロセスを経ている点

に着目する。この閉じる操作の際に、外角と辺長がそれぞれの手法が採用している理想的な量からどの程度ずれているかを、すべての頂点にわたって平均値を計算することで評価した。

この評価方法を実験 1 のデータセットに対して行ったものが、図 8 と図 9 である。ここで提案手法では、タイムステップ dt を 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} としてそれぞれ実

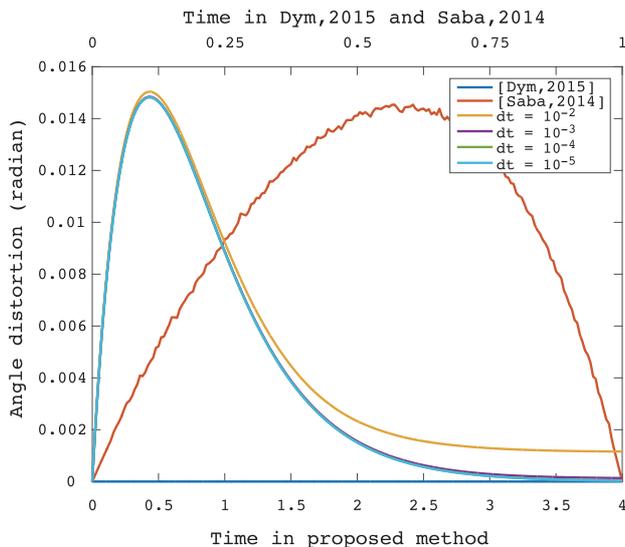


図 8 理想的なポリゴンと計算したポリゴンの外角の誤差

Fig. 8 Difference of exterior angles between realized polygons and ideal polygons.

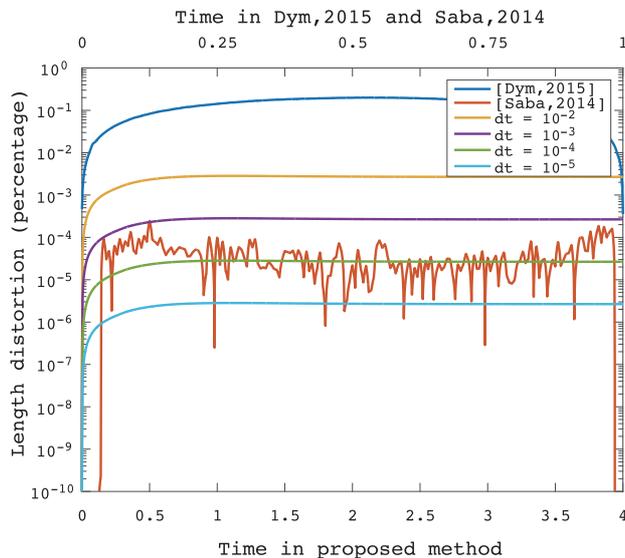


図 9 理想的なポリゴンと計算したポリゴンの辺長の誤差

Fig. 9 Difference of edge lengths between realized curves and ideal curves.

験を行った。また、外角は理想値との絶対的な誤差、辺長は理想値との相対的な誤差を評価した。なお、Saba らの手法や Dym らの手法は、理想的なポリゴンを線形補間によって計算しているが、提案手法では曲率フローによって計算される曲率によって計算しているため、手法によってブレンドの時間軸が異なることに注意する。

この結果から、提案手法では外角の誤差が最大で 0.2 [rad] 以下であるのに対し、辺長の誤差は $dt = 10^{-2}$ のときで 0.2 [%] 以下となり、 dt に比例して小さくなることが分かった。一方で、Dym らの手法では辺長を調整して閉じるため、外角の誤差は 0 [rad] であるが、辺長の誤差は最大で 20 [%] 程度となることが分かった。また、Saba らの手法は

表 2 1つのブレンド曲線の生成に要した平均計算時間 [秒]

Table 2 Average computation time [s] for generating single blending curve.

| Saba, 2014 [15] | Dym, 2015 [10] | Proposed |
|-----------------|----------------|----------------------------|
| 1.732 [s] | 0.3276 [s] | 7.259×10^{-4} [s] |

外角を調整する手法であるので、辺長の誤差は 0.02 [%] 以下に抑えられているが、外角の誤差は提案手法と同様に最大で 0.2 [rad] 以下の誤差が生じた。しかし、辺長・外角の誤差がともに時間に関して連続ではないことから、時間に関して滑らかなブレンドが生成できていないことが確認できる。これらのことから、提案手法は関連手法と比較して遜色ない自然なブレンドが実現できることが確認できた。

5.3 ブレンドに要する計算時間

1つのブレンド曲線を生成するのに要した計算時間の平均を、提案手法と比較手法それぞれで計測した結果を表 2 に示す。この結果から提案手法は、Saba らの手法に比べて約 2,400 倍、Dym らの手法に比べて約 450 倍高速にブレンド曲線が計算でき、リアルタイムな曲線ブレンドを可能にする手法であることが分かる。

また前節で述べたように、提案手法と関連手法ではブレンド曲線群を求める手順が異なるため、時間的に等間隔な合計 10 個のブレンド曲線を生成するのに要する合計時間を比較した。比較手法では、最適化手法により各ブレンド曲線をそれぞれ計算するため、10 個のブレンド曲線を直接計算するものであるが、提案手法ではあらかじめ大量に計算したブレンド曲線から、求めたいブレンド曲線を抽出する。本実験では、400 個のブレンド曲線から 10 個のブレンド曲線を抽出したため、 $7.259 \times 10^{-4} \times 400 = 0.2904$ [s] 要したのに対し、Saba らの手法では約 $1.732 \times 10 = 17.32$ [s]、Dym らの手法では約 $0.3276 \times 10 = 3.276$ [s] 要した。このことから、提案手法は比較手法に比べて高速に計算可能であることが分かる。

5.4 提案手法の制限

提案手法ではブレンド曲線の C^1 連続性を持たせるために Neumann 境界条件 (接線連続性) を用いたが、閉曲線対が異なる回転数を持つ場合、曲率の積分が一定とならず式 (19) がつねに成立するとは限らないため、Neumann 境界条件が適用できないという問題点がある。Whitney-Graustein の定理 [21] によれば、異なる回転数を持つ閉曲線間の正則なホモトピーは存在しないため、少なくとも 1 点は停留点 (接ベクトルの大きさが 0 となる点) が存在することから、 C^1 連続なブレンドを行うことは不可能であると考えられる。しかし、回転数が変化する

る瞬間以外では Neumann 境界条件を満たしたブレンドが可能であると考えられるため、さらなる改善が期待できる。

また本稿で提案した曲率フローは、エッジ長がブレンド中一定である Isometric な変形を記述するものであるため、ユーザがあらかじめ指定したスタートポリゴンとゴールポリゴンの対応点を用いてブレンドを行うことは困難である。このような場合に対処するためには、ブレンド中にエッジ長が一定の速度で変化するという条件のもとで、曲率フローと閉曲線条件の定式化を行うなどさらなる拡張が必要となるため、今後の課題としたい。

6. 結論

本稿では、平面上の閉曲線間の遷移を記述する閉曲線ブレンドに対して、曲率フローに基づく手法を提案した。曲率エネルギーを、離散曲率ベクトルの差の2乗として定式化し、その L^2 内積に関する勾配を考えることにより、曲率フローが線形かつ、曲率のみに依存する形式で記述できることに着目し、数値的に安定なブレンドを達成した。また、提案手法によって自然なブレンドが達成できることを実験的に確認したことに加えて、従来の非線形最適化問題に帰着させて解く手法に比べて、はるかに高速な閉曲線ブレンドを実現することが可能になったことを示した。この手法は、CG などの分野でリアルタイムな処理が要求される場面においても活用することができる。

今後の課題としては、曲率フローの安定領域が大きいことを利用して、必要なブレンド曲線のみを計算するようにタイムステップを適応的に変化させることで、さらなる計算時間の圧縮をすることがあげられる。また、提案手法を3次元に拡張し、閉曲面間のブレンド手法を新たに開発することもあげられる。

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP15J09491 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Alexa, M., Cohen-Or, D. and Levin, D.: As-rigid-as-possible Shape Interpolation, *Proc. ACM SIGGRAPH*, pp.157–164 (2000).
- [2] Belongie, S., Malik, J. and Puzicha, J.: Shape Matching and Object Recognition Using Shape Contexts, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.24, No.4, pp.509–522 (2002).
- [3] Bobenko, A.I. and Schröder, P.: Discrete Willmore Flow, *Proc. Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp.101–110 (2005).
- [4] Botsch, M., Kobbelt, L., Pauly, M., Alliez, P. and Lévy, B.: *Polygon Mesh Processing*, A K Peters, Ltd. (2010).
- [5] Cantarella, J.H., Demaine, E.D., Iben, H.N. and O'Brien, J.F.: An Energy-driven Approach to Linkage

- Unfolding, *Proc. 20th Annual Symposium on Computational Geometry*, pp.134–143 (2004).
- [6] Chien, E., Chen, R. and Weber, O.: Bounded Distortion Harmonic Shape Interpolation, *ACM Trans. Graphics*, Vol.35, No.4, pp.105:1–105:15 (2016).
- [7] Crane, K., de Goes, F., Desbrun, M. and Schröder, P.: Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus, *ACM SIGGRAPH 2013 Courses* (2013).
- [8] Crane, K., Pinkall, U. and Schröder, P.: Robust Fairing via Conformal Curvature Flow, *ACM Trans. Graphics*, Vol.32, No.4 (2013).
- [9] Desbrun, M., Meyer, M., Schröder, P. and Barr, A.H.: Implicit Fairing of Irregular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow, *Proc. ACM SIGGRAPH*, pp.317–324 (1999).
- [10] Dym, N., Shtengel, A. and Lipman, Y.: Homotopic Morphing of Planar Curves, *Computer Graphics Forum*, Vol.34, No.5, pp.239–251 (2015).
- [11] Iben, H.N., O'Brien, J.F. and Demaine, E.D.: Refolding Planar Polygons, *Discrete and Computational Geometry*, Vol.41, No.3, pp.444–460 (2009).
- [12] Li, H., Zhang, H., Wang, Y., Cao, J., Shamir, A. and Cohen-Or, D.: Curve Style Analysis in a Set of Shapes, *Computer Graphics Forum*, Vol.32, No.6, pp.77–88 (2013).
- [13] Ling, H. and Jacobs, D.W.: Shape classification using the inner-distance, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.29, No.2, pp.286–299 (2007).
- [14] Mortara, M. and Spagnuolo, M.: Similarity measures for blending polygonal shapes, *Computers & Graphics*, Vol.25, No.1, pp.13–27 (2001).
- [15] Saba, M., Schneider, T., Hormann, K. and Scateni, R.: Curvature-based Blending of Closed Planar Curves, *Graphical Models*, Vol.76, No.5, pp.263–272 (2014).
- [16] Sederberg, T.W., Gao, P., Wang, G. and Mu, H.: 2-D Shape Blending: An Intrinsic Solution to the Vertex Path Problem, *Proc. ACM SIGGRAPH*, pp.15–18 (1993).
- [17] Sederberg, T.W. and Greenwood, E.: A Physically Based Approach to 2-D Shape Blending, *Proc. ACM SIGGRAPH*, pp.25–34 (1992).
- [18] Surazhsky, T. and Elber, G.: Metamorphosis of Planar Parametric Curves Via Curvature Interpolation, *International Journal of Shape Modeling*, Vol.8, No.2, pp.201–216 (2002).
- [19] Surazhsky, T. and Surazhsky, V.: Sampling planar curves using curvature-based shape analysis, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pp.339–350, Nashboro press (2005).
- [20] Wardetzky, M., Bergou, M., Harmon, D., Zorin, D. and Grinspun, E.: Discrete Quadratic Curvature Energies, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.24, No.8–9, pp.499–518 (2007).
- [21] Whitney, H.: On regular closed curves in the plane, *Compositio Mathematica*, Vol.4, pp.276–284 (1937).
- [22] 小林昭七: 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房 (1977).
- [23] 松本幸夫: 多様体, 東京大学出版会 (2008).

付 録

A.1 曲率エネルギーの収束速度

提案手法による閉曲線ブレンドにおける曲率エネルギーの収束速度について議論する。すなわち、任意の時

刻 $t > 0$ における離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}(t)$ とゴールポリゴンの離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}_g$ のユークリッドノルムの 2 乗を導出する。

提案手法で用いる曲率フローは

$$\dot{\hat{\kappa}} = -2(\hat{\kappa} - \hat{\kappa}_g) \tag{A.1}$$

であるので、曲率フローの初期条件 $\hat{\kappa}(0) = \hat{\kappa}_s$ の下、この微分方程式を解くと

$$\hat{\kappa}(t) = \hat{\kappa}_s e^{-2t} + (1 - e^{-2t}) \hat{\kappa}_g \tag{A.2}$$

となる。よって、ゴールポリゴンとのユークリッドノルムの 2 乗は

$$\|\hat{\kappa}(t) - \hat{\kappa}_g\|^2 = (\hat{\kappa}_s - \hat{\kappa}_g)^2 e^{-4t} \tag{A.3}$$

となることから、指数関数的に減少することが分かる。

一方で、スタートポリゴンとゴールポリゴンの離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}_s, \hat{\kappa}_g$ の線形補間により求めた離散曲率ベクトル $\hat{\kappa}(\tau)$ ($\tau \in [0, 1]$) は、

$$\hat{\kappa}(\tau) = (1 - \tau)\hat{\kappa}_s + \tau\hat{\kappa}_g \tag{A.4}$$

で与えられることから、ゴールポリゴンとのユークリッドノルムの 2 乗は

$$\|\hat{\kappa}(\tau) - \hat{\kappa}_g\|^2 = (1 - \tau)^2 (\hat{\kappa}_s - \hat{\kappa}_g)^2 \tag{A.5}$$

となり、2 次関数的に減少することが分かる。

図 A.1 に示すのは、図 4 で示した実験において、ゴー

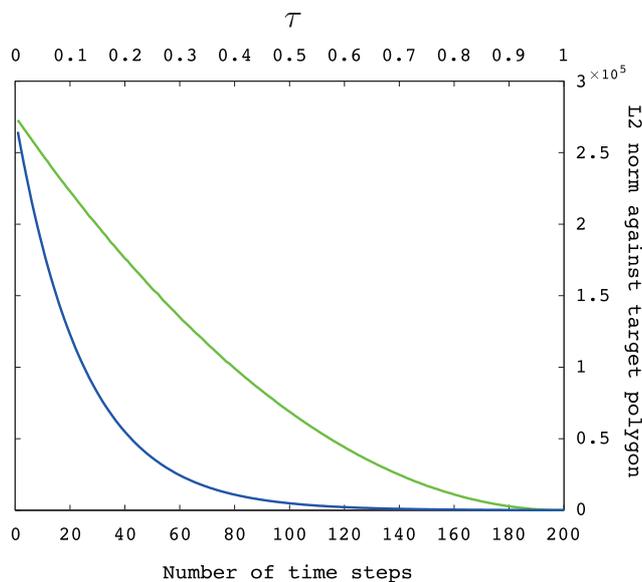


図 A.1 ポリゴンとゴールポリゴンとの L^2 ノルムの収束性の違い。緑の線が Saba らによって提案された手法によるもの [15] で、青の線が提案手法によるもの

Fig. A.1 L^2 norm of discrete curvature vectors between intermediate polygon and target polygon. Green line and blue line indicate convergence in L^2 norm by Saba's method and the proposed method, respectively.

ルポリゴンとの L^2 ノルムの 2 乗を手法ごとにプロットしたものである。この結果からも、提案手法と比較手法において収束性が異なることが分かる。

推薦文

本研究は、平面上の 2 つの閉曲線を自然にブレンドするという、CG 分野の基本問題に対する新たな手法を提案するものである。曲率エネルギーを定義しその幾何学的フローである曲率フローの概念を利用し、さらに曲率エネルギーそのものをブレンドにに適した形で再定義することで、安定かつ高速に収束する手法を見出した。高品質な結果を出す従来法では離散曲率ベクトルを用いた最適化問題として解いているが、数秒の計算時間がかかる。これに対して提案法は同等以上の品質を数 10μ 秒で実現し、リアルタイムの閉曲線ブレンドを可能にした。アイデアも実験結果もレベルが高く、本研究報告を拡張した結果を論文として出版することを、研究会から推薦する。

(グラフィクスと CAD 研究会主査 柿本正憲)



平野 正浩 (学生会員)

1990 年生。2013 年東京大学工学部計数工学科卒業。2015 年同大学大学院修士課程修了。同年より同大学大学院博士課程在籍。日本学術振興会特別研究員 (DC1)。コンピュータグラフィックス、コンピュータビジョン等

に関する研究に従事。2016 年情報処理学会山下記念研究賞受賞。計測自動制御学会、IEEE 各学生会員。



渡辺 義浩

1979 年生。2002 年東京大学工学部計数工学科卒業。2004 年同大学大学院情報理工学系研究科修士課程修了。2007 年同大学院博士課程修了。博士 (情報理工学)。2007 年東京大学リサーチフェロー。2008 年同大学特任助教。

2011 年同大学助教、2014 年同大学講師。高速ビジョン、超並列プロセッサ、実時間画像センシング、映像メディア、デジタルアーカイブ等に関する研究に従事。2008 年日本ロボット学会論文賞。2011 年、2013 年日本バーチャルリアリティ学会論文賞。日本ロボット学会、日本バーチャルリアリティ学会各会員。



石川 正俊 (正会員)

1954年生。1977年東京大学工学部計
数工学科卒業。1979年同大学大学院
修士課程修了。同年通商産業省工業技
術院製品科学研究所入所，同所主任研
究官を経て，1989年東京大学助教授，
1999年同大学教授，2002年同大学総
長特任補佐，2004年同大学副学長，2005年同大学理事・副
学長を歴任。2011年紫綬褒章受章。