情報処理学会論文誌　数理モデル化と応用　Vol.10　No.2　80–91 (July 2017)

小学校における授業時間割作成

高橋 香[1,a)]　ブルノ フィゲラ ロウレンソ[1,b)]　赤池 洋一[2]　山口 梨恵[2]
山本 剛大[2]　林田 真治[2]　池上 敦子[1,c)]

受付日 2017年1月30日，再受付日 2017年3月13日，
採録日 2017年4月24日

概要：小学校では通常の授業時間割に加え，学校行事にあわせた時間割を複数作成している．文部科学省が定めた年間標準時数の達成率を意識するために，時間割を毎週作成している小学校もある．時間割作成については，これまでにも多くの研究が行われているが，高校や大学を対象としたものが多い．さらに，学校ごとの独自の制約があると考えられ，時間割作成に提案されているモデルは対象学校専用のものとなっている．本研究では，小学校を対象に，通常授業の時間割作成だけでなく，特殊な期間の時間割作成にも適用可能であり，さらに多くの小学校で利用できる柔軟性のある数理最適化モデルの構築を目指す．考慮する制約のすべてを満たすことができない場合にそなえ，提案モデルでは，一部の制約を緩和した解を与えることができるようにし，制約を満たせない対象が一部のクラスや教員に偏らないような目的関数を設定する．このモデルに基づいて，2 つの小学校を対象に合計 3 つの時間割作成を行ったところを実用可能な時間割が得ることができた．

キーワード：時間割作成，モデリング，0-1 整数計画，多目的計画，スケジューリング

Timetabling for Elementary Schools

Kaori Takahashi[1,a)]　Bruno Figueira Loulenco[1,b)]　Youichi Akaike[2]　Rie Yamaguchi[2]
Takahiro Yamamoto[2]　Shinji Hayashida[2]　Atsuko Ikegami[1,c)]

Received: January 30, 2017, Revised: March 13, 2017,
Accepted: April 24, 2017

Abstract: Elementary schools in Japan create multiple timetables around school events, in addition to the timetables used for regular classes. The Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology specifies a number of classes to be held annually, and some elementary schools create timetables every week to ensure that they meet these requirements. Timetabling has been studied in many papers. However, most studies have been targeted at high schools and universities. Furthermore, the models proposed for timetabling have been created to meet the unique needs of specific schools. In this paper, we focus on elementary schools. We aim to construct a flexible mathematical optimization model that can be applied to regular class timetables, to specific shorter-term periods, and in many types of elementary schools. In most cases, satisfying all constraints simultaneously is impossible. Thus, our model allows relaxing some constraints and setting an objective function to balance the degree of violation according to class or teacher. We created three timetables for two elementary schools by applying our model to give an example of timetabling that can be used in schools.

Keywords: timetabling, modeling, 0-1 integer programming, goal programming, scheduling

[1] 成蹊大学
Seikei University, Musashino, Tokyo 180–8633, Japan
[2] 成蹊小学校
Seikei Elementary School, Musashino, Tokyo 180–8633, Japan
[a)] kaori@cleo.ci.seikei.ac.jp
[b)] lourenco@st.seikei.ac.jp
[c)] atsuko@st.seikei.ac.jp

1. はじめに

学校の授業時間割は，教科担当教員の交代等により毎年新しく作成する必要がある．時間割は学年，クラスで異なり，各教科の必要授業数を満たすだけでなく，教員の授業時限や教室の利用時限が重ならないようにしなければなら

ない．また，小学校では通常時間割だけでなく，学校行事（運動会，文化祭）に向けた準備期間用の時間割を含めて複数回作成する必要がある．文部科学省が定めた必要授業数をバランス良く達成するために，時間割を毎週作成している小学校もある．

学校現場における時間割作成では，考慮する制約をすべて満たすことが難しく，第1版の作成後，何度も修正を繰り返し，完成までに多くの時間を要しているという [6]．作成頻度も高く，一度の作成負荷が大きい時間割作成について，学校現場ではソフトウェアに頼ることなく，すべて手作業で行う [7] ことが今も続いている．

時間割作成については，サーベイ論文 [1] に紹介されるように多くの研究が行われている．このサーベイ論文では，時間割作成問題を3つのタイプ：1教員が同一時限に複数授業を行わないように考慮しながら学校内のすべてのクラスの時間割を作成する授業時間割作成（school timetabling），大学の学科や専攻コースの授業が重ならないように時間割を作成するコース時間割作成（course timetabling），学生にとって試験時限が重ならないように，できれば短期間に集中しないように試験時間を決定する試験時間割作成（examination timetabling），に分けている．大学におけるコース時間割作成では，学生が受講可能な授業が同じ時間に重なることを最小化するが，一般に，小学校，中学校，高校における授業時間割作成では，1人の生徒（児童）が受講する授業が同じ時間に重なることは許されない．同様に，試験時間割作成においても，受験生にとって試験の時間が重なることは許されない．

本論文で対象とする時間割作成は，1つ目のタイプの授業時間割作成問題に属する．多くの場合，科目（教科）と教員は前もって固定されている．授業時間割作成に関するサーベイ論文 [5] では，コース時間割作成や試験時間割作成と同様，授業時間割作成研究が多くあるにもかかわらず，その進展があまりなかったことが述べられており，その理由として，授業時間割作成問題に対する研究が個々に行われてきたこと，国や教育システムによって対象問題が異なったことがあげられている．したがって，今後の研究発展のためには，これらを統合できる汎用的なモデルが必要だと考えられる．また，授業時間割作成に対する研究は，そのほとんどが高校の時間割作成を対象にしている．サーベイ論文以外では，特定のモデルに対するアルゴリズムの提案が多く，1度に解くことが難しいことから，2段階で解くアプローチが提案されている [2], [3], [4]．

また，高校を対象としたモデルをそのまま小学校に適用することはできない．なぜなら，小学生の特性から課せられる制約があるからである．小学生（特に低学年の児童）は授業の準備や教室移動を予定どおりにこなすことが難しいため，時間に余裕がある時間割でなくてはならない．結果として，教科の並びの制約が数多く存在したり，ある種類の教科にとって好ましい時間帯，好ましくない時間帯等を考慮したりしなければならない．

これに対し本論文では，できる限り多くの小学校に適用可能で，通常期間だけでなく，特殊な期間にも適用できる柔軟性のある数理最適化モデルの構築を目指す．そのために，都内私立小学校の複数時期を対象に時間割作成において考慮すべき制約を洗い出し，さらに2つの公立小学校の時間割作成との共通点や違いを整理して，それらすべての制約をカバーできるようモデルを構築する．また，既存研究にあるような2段階や多段階で解くのではなく，同時にすべてを決定することを念頭においたモデルを目指す．

2. 時間割作成のための制約

本章では，小学校時間割作成について，都内私立小学校（以降，対象小学校）の調査で明らかになった制約，2つの公立小学校でのインタビューもしくは文書により明らかになった制約，さらに，(1) 対象小学校の通常期間，(2) 同じく文化祭準備期間，(3) 1つの公立小学校の通常期間の3つの時間割作成においてあげられた制約を整理した．

明らかになった制約を14の項目に整理し，さらに5つに分類した結果を以下に示す．ここで，「2連続教科」とは，2時限連続で行うことがある教科をさす．たとえば，美術を1週間に4回行う中で，1回だけ2時限連続で行い，あとの2回は1時限ずつ別の日に行うという場合，美術を2連続教科とよぶことにする．

各クラスにおける基本制約

(a) 1つの時限では必ず1つ授業を行う．

各クラスの教科についての制約

(b) 各教科は必要授業数だけ行う．
(c) 各教科は授業可能時限に行う．
(d) 各教科は指定された教室で行う．
(e) 各教科は1日の授業数の上下限を守る．
(f) 各教科は指定期間における授業数の上下限を守る．
(g) 各教科は授業実施日数の上下限を守る．
(h) 2連続教科は指定した回数だけ2時限連続で行う．
(i) 2連続教科が2時限連続する場合，2時限とも同じ教室で行う．

各教員についての制約

(j) 1教員が授業可能な1つの時限に行える授業は1つである．
(k) 1教員が1日に行う授業数の上下限を守る．

各教室についての制約

(l) 1教室で1つの時限に行える授業は1つである．

その他の制約

(m) ある教科集合の授業がある時限集合の時限に割り当てられる数の上下限を守る．
(n) 避けるべき教科の並びを回避する．

制約 (c) は，その教科にとって可能，不可能な時限があるだけでなく，その教科を担当する教員の可能性に大きく関わる．

制約 (m) は，理科と算数は毎日 1 時限に授業を行わないようにしたいが，それが難しい場合は回数に上限をつける，といった制約に対応するものである．朝，下校，給食等各学校の環境の違いで考慮されている時間帯に対し，柔軟に解釈できる制約である．

制約 (n) は，1 つのクラスの時間割において移動をともなう特別教室での授業を連続で行わないようにするだけでなく，1 つの特別教室（たとえば，理科室）で，異なる準備が必要な授業（たとえば，実験をともなう 6 年生の理科と 5 年生の理科）を連続で行わない，等，様々な組合せに対して柔軟に解釈できる制約である．

(1)，(2)，(3) の 3 つの時間割作成においてあげられた制約を整理した際，考慮する制約に大きな違いはなかったものの，(1) になくて (2)，(3) にあった内容としては「同じ日に行ってはいけない教科の組合せがあること」，(1)，(3) になくて (2) だけにあった内容としては「行われる順序が決まっている教科の組合せがあること」があった．

前者は，制約 (m) として解釈できる．同じ日に行ってはいけない教科の組合せと 1 日の全時限を，それぞれ制約 (m) の「教科集合」と「時限集合」とし，授業数の上限を 1 と考えることができる．

後者については，現場で考慮されているように対象教科の可能時限を設定することで，その順序を確定できる．したがって，制約 (c) や制約 (m) で実現できる．

なお，調査を行った 2 つの公立小学校や多くの小学校が，1 週間単位の時間割を作成しているのに対し，対象小学校では，2 週間の長さを持つ時間割を作成している．そして，2 週間全体での各教科の数だけでなく，各週においても，各日においても，それぞれの教科の数のバランスを考慮している．また，対象小学校では，担任以外の教員が授業を担当する割合が高いことが，他の 2 つの調査小学校と異なる点である．

以上のことから，上記の制約 (a)～(n) を考慮でき，時間割の対象期間，クラス数，教員数，利用可能教室数の違いに柔軟に対応できれば，多くの小学校，様々な期間に対応可能なモデルとなると考えた．

3 章，4 章，5 章では，3 つのモデルについて述べる．

3. すべての制約を守るためのモデル

まず，前章で述べた制約をすべて満たす時間割を作成するモデルを考える．そのモデルで，時間割作成を行うために，モデルの定式化を行う．

学年の集合を G，学年 $g \in G$ のクラスの集合を C_g，クラス $c \in C_g$ の教科の集合を S_c，区間の集合を W，区間 $w \in$ 内の日の集合を D_w，クラス c の日 $d \in D$ における時限の集合を J_{cd}，教科 s が日 d に授業可能な時限の集合 $J_{sd}^{\mathrm{avail}} \subseteq J_{cd}$，教科 $s \in S_c$ に指定された教室の集合を R_s として，教科 s を時限 $j \in J_{cd}$ に教室 $r \in R_s$ で行う場合 1，そうでない場合 0 となる $x_{sjr}, s \in S_c, c \in C_g, g \in G, j \in J_{sd}^{\mathrm{avail}}, d \in D_w, w \in W, r \in R_s$ を 0-1 意思決定変数として用いることにする．

その他に，教科 s を日 d に行う場合 1，そうでない場合 0 となるように制約式を作って利用する 0-1 変数 y_{sd}, $s \in S_c$, $c \in C_g$, $g \in G$, $d \in D_w$, $w \in W$ と，クラス c の 2 連続教科の集合を $S_c^2 \subseteq S_c$，クラス c の日 d における連続時限 (j_1, j_2) の集合を $J_{cd}^2 \subseteq J_{cd}$ として，2 連続教科 s を連続する時限 j_1, j_2 で行う場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 $z_{sj_1j_2}, s \in S_c^2, c \in C_g, g \in G, (j_1, j_2) \in J_{cd}^2$ を用いる．

これらの変数を使って，2 章の制約をすべて満たすことを目的とした（制約をすべてハード制約とした）時間割作成を定式化した．最小化もしくは最大化する対象がなかったため，目的関数は設定していない．

対象小学校の通常期間の時間割作成データに対し，この定式化に基づいて数理最適化汎用ソルバ [8] で求解する計算実験（実験 1）を行った．このデータは，2 章で述べた (1) の時間割作成のものであり，各制約におけるパラメータは，実際に現場で考えられているものである．

実験データの概要は以下のとおりである．

【実験 1】

- 学年数：6
- クラス数：24（各学年 4 クラス）
- 教員数：43
- 教科数：16
- 教室数：36
- 対象期間：2 週間（対象日数：10）
- 対象時限数：1,312
- 担任授業の割合：51.1%
- 意思決定変数の数：10,604
- その他の変数の数：2,996
- 制約式の数：41,198

計算環境は，2.80 GHz Hexa-Core Intel Xeon CPU X5660，数理最適化汎用ソルバは，CPLEX12.5.0.0 を利用した．

求解実験の結果，実行不可能となり解が得られなかった（0.1 秒の計算の後，実行不可能であるとの情報が得られた）．つまり，なんらかの制約を緩和しないと時間割が作成できないことが分かった．

そこで現場ではどの制約を諦めて時間割を作成しているのか，過去の時間割の観察を行った．

その結果，制約 (d)，制約 (k)，制約 (m)，制約 (n) が守られていないことが分かった．制約 (d) については，対応教科が過多になっている教室があり，他の制約を満たした下では明らかに利用できない場合があることも分かった．

現場ではこの場合，第 2 希望の教室を設定し，当初に指定した教室（以降，第 1 希望教室という）が不可能な場合は，第 2 希望教室を利用するという対応がとられていた．

4. 制約の一部を緩和したモデル

本章では，実行可能解が存在しない場合でも，なんらかの時間割を提供できるようなモデルを考える．前章で行った観察から，緩和する（ソフト制約として扱う）制約を制約 (d)，制約 (k)，制約 (m)，制約 (n) とし，これらの制約を満たさない度合いをできる限り最小化することを目指す．

この考えを，定式化の中で実現するため，R_s を変更して教科 s にとって第 1 希望教室の集合を R_s^1，第 2 希望教室の集合を R_s^2，教員の集合を T，クラス c の時限集合 J に教科集合 S を割り当てる授業数に下限 l，上限 u と設定することを表す (S, J, l, u) の集合を A_c，「教科 s を時限 j に行うこと」「教科 $\hat{s}$ を時限 $\hat{j}$ に行うこと」のうちたかだか一方しか行えないことを表す $(s, \hat{s}, j, \hat{j})$ の集合を F とし，以下の変数を用意する．

(d) 教科 s を第 2 希望教室 r で行う授業数を表す非負変数 $X_{sr}, s \in S_c, c \in C_g, g \in G, r \in R_s^2$

(k) 教員 t の日 d における授業数の上限を超過した数を表す非負変数 $\gamma_{td}, t \in T, d \in D_w, w \in W$

(m) ある教科集合 S の授業ががある時限集合 J の時限に割り当てられる数の上限を超過した数を表す非負変数 $\alpha_{SJ}, (S, J, l, u) \in A_c, c \in C_g, g \in G$

(n)「教科 s を時限 j に」「教科 $\hat{s}$ を時限 $\hat{j}$ に」の両方を割り当てる場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 $\beta_{s\hat{s}j\hat{j}}, (s, \hat{s}, j, \hat{j}) \in F$

そして，これらの違反の量を最小化する目的関数を以下のように設定する．

$$\text{minimize}$$
$$\sum_{g \in G} \sum_{c \in C_g} \sum_{s \in S_c} \sum_{r \in R_s^2} X_{sr} + \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} \sum_{d \in D_w} \gamma_{td}$$
$$+ \sum_{g \in G} \sum_{c \in C_g} \sum_{(S,J) \in A_c} \alpha_{SJ} + \sum_{(s,\hat{s},j,\hat{j}) \in F} \beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$$

この定式化に基づき，3 章の実験 1 と同じ時間割作成データと計算環境とデータを用いて計算実験（実験 2）を行ったところ，6,234.22 秒（約 1 時間 44 分）で最適解を得ることができた．

最適値，つまり違反量（緩和する前の制約を違反する量）の総和は 188 であった．具体的には，第 2 希望教室を利用した数が 4，教員の 1 日の授業数の上限を超えた数の総和が 8，「ある教科集合の授業がある時限集合の時限に割り当てられた数が上限を超過した数」の総和が 176 であり，避けるべき教科の並びは発生しなかった．

違反の起きた場所を観察すると，違反が特定のクラスに偏っていることが分かった．特に違反が多かった「ある教科集合の授業がある時限集合の時限に割り当てられた数が上限を超過した数」の総和を，同学年のクラスで比べると，ばらつきがあることが分かった．たとえば，6 年生においてはこの数の差が 6 になる場合もあった．

教育を行ううえで違反の偏りは好ましくない．そこで，これらの違反をできる限り均等にする必要があると考えた．

5. 提案モデル

本章では，緩和する前の制約を違反する量が，一部のクラスや一部の教員に偏らないバランスの良い時間割を提供できるモデルを提案する．

制約 (d) に関してクラス間で利用教室の偏りを避けるためと，制約 (k) に関して教員間で 1 日における授業数の負荷の偏りを避けることについては，違反量の増加に対して，ペナルティの上昇幅を大きくすること（ペナルティ関数を非線形な凸関数）にした．

そこで，これまで前章のモデルで利用した非負変数 X_{sr} の代わりに，教科 s を第 2 希望の教室 r で行う授業数が n である場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 $X_{srn}, s \in S_c, c \in C_g, g \in G, n \in \{1, \ldots, n_s\}$ を利用する．そして，目的関数の中でこれらの変数が値を持つことに対し，以下のようなペナルティを設定する．

$$p_{srn}^{\text{room2}} = \begin{cases} n > 0: & |C_g|\, p_{sr(n-1)}^{\text{room2}} + 1 \\ n = 0: & 0 \end{cases}$$
$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, n \in \{1, \ldots, n_s\}$$

ここで，n_s は，教科 s が行う授業回数である．

さらに，必要な場合は教科間でペナルティの重み付け p_{sr}^{room1} を設定できるようにする．

同様に，γ_{td} の代わりに，教員 t の日 d における授業数の上限を n 超過した場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 $\gamma_{tdn}, t \in T, d \in D_w, w \in W, n \in \{1, \ldots, v_{td}\}$ を利用する．ここで，v_{td} は，教員 t の日 d に授業数の「上限を超える数」の上限とする．そして，目的関数の中でこれらの変数が値を持つことに対し，以下のようなペナルティを設定する．

$$p_{tdn}^{\text{tea2}} = \begin{cases} n > 0: & |C_g|\, p_{td(n-1)}^{\text{tea2}} + 1 \\ n = 0: & 0 \end{cases}$$
$$t \in T, d \in D_w, w \in W, n \in \{1, \ldots, v_{td}\}$$

さらに，必要な場合は教員間でペナルティの重み付け p_t^{tea1} を設定できるようにする．

制約 (m) については学年ごとのクラス間における違反の偏りを抑えるようにする．学年 g のクラスごとで α_{SJ} の総和を比較し，その最大値を非負変数 UB_g で表す．目的関数の中で UB_g が値を持つことに対してペナルティ p_g^{ub} をつける．また，α_{SJ} 自体にも上限 v'_{SJ} を設定できるようにする．

制約 (n) に関しては，複数の学年，クラス，そして教員や教室にわたるものであるため，何が均等かを定めることが難しい．したがって，個々の重要度にあわせペナルティを設定することにする．「教科 s を時限 j に」「教科 $\hat{s}$ を時限 $\hat{j}$ に」の両方の授業を行うことに対するペナルティを $p^{\mathrm{avoid}}_{s\hat{s}j\hat{j}}$ とする．

以上の対応を含めて，提案モデルの定式化を示す．

これまでに説明した以外の記号としては，日 d における時限の集合を J_d，教室の集合を R，教室 r で可能な教科の集合を SR_r とする．2 連続教科 s を連続時限で行う回数を n^2_s，教員 t が曜日 d に授業可能な時限の集合を $J^{tea}_{td} \subseteq J_d$，教員 t の 1 日における授業数に下限 l，上限 u と設定をすることを表す (t,l,u) の集合を L，区間 w に教科 s を行う授業数に下限 l，上限 u と設定をすることを表す (s,w,l,u) の集合を SN^{period}，教科 s を行う場合の 1 日の授業数に下限 l，上限 u と設定をすることを表す (s,d,l,u) の集合を SN^{day}，区間 w に教科 s を行う授業日数に下限 l，上限 u と設定することを表す (s,w,l,u) の集合を DN，教員 t が教える教科の集合を S^{tea}_t とする．

定式化

minimize

$$\sum_{g\in G}\sum_{c\in C_g}\sum_{s\in S_c}\sum_{r\in R^2_s} p^{\mathrm{room1}}_{sr}\sum_{i=1}^{n_s} p^{room2}_{sri}\ X_{sri} + \sum_{t\in T} p^{\mathrm{tea1}}_{t}\sum_{w\in W}\sum_{d\in D_w}\sum_{i=1}^{v_{td}} p^{tea2}_{tdi}\ \gamma_{tdi} + \sum_{g\in G} p^{\mathrm{ub}}_g\ UB_g + \sum_{(s,\hat{s},j,\hat{j})\in F} p^{\mathrm{avoid}}_{s\hat{s}j\hat{j}}\ \beta_{s\hat{s}j\hat{j}} \quad (1)$$

subject to

各クラスにおける基本制約

$$\sum_{s\in\{s|J^{\mathrm{avail}}_{sd}\cap\{j\}\neq\phi, s\in S_c\}}\ \sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} = 1 \qquad j\in J_{cd}, c\in C_g, g\in G, d\in D_w, w\in W \quad (2)$$

クラスの教科についての制約

$$\sum_{w\in W}\sum_{d\in D_w}\sum_{j\in J^{\mathrm{avail}}_{sd}}\sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} = n_s \qquad s\in S_c, c\in C_g, g\in G \quad (3)$$

$$l \le \sum_{d\in D_w}\sum_{j\in J^{\mathrm{avail}}_{sd}}\sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} \le u \qquad (s,w,l,u)\in SN^{\mathrm{period}} \quad (4)$$

$$l\ y_{sd} \le \sum_{j\in J^{\mathrm{avail}}_{sd}}\sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} \le u\ y_{sd} \qquad (s,d,l,u)\in SN^{\mathrm{day}} \quad (5)$$

$$l \le \sum_{d\in D_w} y_{sd} \le u \qquad (s,w,l,u)\in DN \quad (6)$$

$$2\ z_{sj_1j_2} \le \sum_{r_1\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sj_1r_1} + \sum_{r_2\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sj_2r_2} \le z_{sj_1j_2}+1 \qquad s\in S^2_c, c\in C_g, g\in G, (j_1,j_2)\in J^2_{cd}, j_1,j_2\in J^{\mathrm{avail}}_{sd}, d\in D_w, w\in W \quad (7)$$

$$\sum_{w\in W}\sum_{d\in D_w}\sum_{\substack{(j_1,j_2)\in J^2_{cd},\\ j_1,j_2\in J^{\mathrm{avail}}_{sd}}} z_{sj_1j_2} = n^2_s \qquad s\in S^2_c, c\in C_g, g\in G \quad (8)$$

$$z_{sj_1j_2} - 1 \le x_{sj_1r} - x_{sj_2r} \le 1 - z_{sj_1j_2} \qquad s\in S^2_c, c\in C_g, g\in G, (j_1,j_2)\in J^2_{cd}, j_1,j_2\in J^{\mathrm{avail}}_{sd}, r\in R^1_s\cup R^2_s \quad (9)$$

教員についての制約

$$\sum_{s\in\{s|J^{\mathrm{avail}}_{sd}\cap\{j\}\neq\phi, s\in S^{\mathrm{tea}}_t\}}\ \sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} \le 1 \qquad j\in J^{\mathrm{tea}}_{td}, t\in T, d\in D_w, w\in W \quad (10)$$

$$l \le \sum_{s\in\{s|J^{\mathrm{avail}}_{sd}\cap\{j\}\neq\phi, s\in S^{\mathrm{tea}}_t\}}\ \sum_{j\in J^{\mathrm{tea}}_{td}}\sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} \le u + \sum_{i=1}^{v_{td}} i\ \gamma_{tdi} \qquad (t,l,u)\in L, d\in D_w, w\in W \quad (11)$$

教室についての制約

$$\sum_{s\in\{s|J^{\mathrm{avail}}_{sd}\cap\{j\}\neq\phi, s\in SR_r\}} x_{sjr} \le 1 \qquad r\in R, j\in J_d, d\in D_w, w\in W \quad (12)$$

その他の制約

$$l \le \sum_{s\in S}\sum_{j\in J}\sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} \le u + \alpha_{SJ} \qquad (S,J,l,u)\in A_c, c\in C_g, g\in G \quad (13)$$

$$\sum_{(S,J)\in A_c} \alpha_{SJ} \le UB_g \qquad c\in C_g, g\in G \quad (14)$$

$$\sum_{r\in R^1_s\cup R^2_s} x_{sjr} + \sum_{\hat{r}\in R^1_{\hat{s}}\cup R^2_{\hat{s}}} x_{\hat{s}\hat{j}\hat{r}} \le 1 + \beta_{s\hat{s}j\hat{j}} \qquad (s,\hat{s},j,\hat{j})\in F \quad (15)$$

$$\sum_{w\in W}\sum_{d\in D_w}\sum_{j\in J^{\mathrm{avail}}_{sd}} x_{sjr} = \sum_{i=1}^{n_s} i\ X_{sri} \qquad s\in S_c, c\in C_g, g\in G, r\in R^2_s \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{n_s} X_{sri} \le 1 \qquad s\in S_c, c\in C_g, g\in G, r\in R^2_s \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{v_{td}} \gamma_{tdi} \le 1 \qquad t\in T, d\in D_w, w\in W \quad (18)$$

値域設定

$$x_{sjr}\in\{0,1\} \qquad s\in S_c, c\in C_g, g\in G, j\in J^{\mathrm{avail}}_{sd},$$

$$d \in D_w, w \in W, r \in R_s^1 \cup R_s^2 \quad (19)$$

$$y_{sd} \in \{0,1\}$$

$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, d \in D_w, w \in W \quad (20)$$

$$z_{sj_1j_2} \in \{0,1\} \quad s \in S_c^2, c \in C_g, g \in G, (j_1, j_2) \in J_{cd}^2,$$

$$j_1, j_2 \in J_{sd}^{\text{avail}}, d \in D_w, w \in W \quad (21)$$

$$\gamma_{tdn} \in \{0,1\}$$

$$t \in T, d \in D_w, w \in W, n \in \{1, \ldots, v_{td}\} \quad (22)$$

$$0 \le \alpha_{SJ} \le v'_{SJ} \quad (S, J) \in A_c, c \in C_g, g \in G \quad (23)$$

$$UB_g \ge 0 \quad g \in G \quad (24)$$

$$\beta_{s\hat{s}j\hat{j}} \in \{0,1\} \quad (s, \hat{s}, j, \hat{j}) \in F \quad (25)$$

$$X_{srn} \in \{0,1\}$$

$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, r \in R_s^2, n \in \{1, \ldots, n_s\} \quad (26)$$

各式の意味は以下のとおりである．

(1) 目的関数：違反量の加重和を最小化する．
(2) 授業時限に 1 教科を割り当てる．
(3) 各教科は全区間で必要授業数を満たす．
(4) 各教科は各区間で授業数の上下限を守る．
(5) 各教科にとって授業がある日は授業数の上下限を守る．
(6) 各教科は授業実施日数の上下限を守る．
(7) 2 連続教科が連続時限で授業を行っているか否かを判断する（$z_{sj_1j_2}$ の値に反映させる）．
(8) 2 連続教科は指定した授業数だけ連続で行う．
(9) 2 連続教科は連続する際に 2 時限とも同じ教室で行う．
(10) 1 人の教員が 1 つの時限に行える授業は 1 つ以下．
(11) 1 人の教員が 1 日の授業数の上下限を守る（上限は緩和対象）．
(12) 1 つの教室で 1 つの時限に行える授業は 1 つ以下．
(13) ある教科集合がある時限の集合に割り当てられる授業数が上下限を守る（上限は緩和対象）．
(14)「ある教科集合がある時限の集合に割り当てられる授業数が上限を超える数」の最大値を学年ごとに得る（UB_g の値に反映させる）．
(15) 避けるべき教科の並びを回避する（緩和対象）．
(16) 第 2 希望教室を利用した回数を得る（X_{srn} の値に反映させる）．
(17) 第 2 希望教室を利用した回数の整合性を保つ（1 つの値になることを制約する）．
(18) 教員の 1 日における授業数の上限を超える数の整合性を保つ（1 つの値になることを制約する）．

ここで，$Xsrn$ を 0-1 変数として扱っているが，連続変数として扱うこともできる．その場合，式 (16) と式 (26) を以下のように変更し，式 (17) を削除する．

$$\sum_{w \in W} \sum_{d \in D_w} \sum_{j \in J_{sd}^{\text{avail}}} x_{sjr} = \sum_{i=1}^{n_s} X_{sri}$$

$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, r \in R_s^2 \quad (16)'$$

$$0 \le X_{srn} \le 1$$

$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, r \in R_s^2, n \in \{1, \ldots, n_s\} \quad (26)'$$

同様に，γ_{tdn} も連続変数として扱うこともできる．その場合，式 (11) と式 (22) を以下のように変更し，式 (18) を削除する．

$$l \le \sum_{s \in \{s | J_{sd}^{\text{avail}} \cap \{j\} \neq \phi, s \in S_t^{\text{tea}}\}} \sum_{j \in J_{td}^{\text{tea}}} \sum_{r \in R_s^1 \cup R_s^2} x_{sjr}$$

$$\le u + \sum_{i=1}^{v_{td}} \gamma_{tdi}$$

$$(t, l, u) \in L, d \in D_w, w \in W \quad (11)'$$

$$0 \le \gamma_{tdn} \le 1 \quad t \in T, d \in D_w, w \in W, n \in \{1, \ldots, v_{td}\} \quad (22)'$$

式 (11)，式 (16)，式 (22)，式 (26) をそれぞれ式 (11)′，式 (16)′，式 (22)′，式 (26)′ に変更し，式 (17)，式 (18) を削除した定式化を「定式化′」とよぶことにする．

6. 計算実験（実験 3）

5 章の提案モデルの定式化式 (1)〜式 (26) と数理最適化汎用ソルバを利用して，3 つの問題例に対する時間割作成（実験 3）を行った．

問題例 1，問題例 2，問題例 3 は，制約もそのパラメータも実際の小学校時間割作成用のデータであり，それぞれ，2 章で述べた (1) 対象小学校の通常期間，(2) 同じく文化祭準備期間，(3) 1 つの公立小学校の通常期間に対応している．

各問題例（実験データ）の概要を**表 1** に示す．

1 日の授業数の超過数 γ_{tdn} に対しては，教員ごとの各日の授業超過数が n だったときのペナルティ p_{tdn}^{tea2} は 5 章に示したとおりである．さらに，それに対する教員毎の重み

表 1　計算実験 3 における問題例

Table 1　Problem instances used for the third computational experiment.

	問題例 1	問題例 2	問題例 3
小学校	対象小学校	対象小学校	公立小学校
期間の種類	通常	文化祭前	通常
学年数	6	6	7*
クラス数	24	24	28
教員数	43	44	34
教科数	16	22	23
教室数	36	45	41
対象期間	2 週間	2 週間	1 週間
対象時限数	1,312	1,252	760
担任授業の割合	51.1%	65.6%	91.1%
意思決定変数の数	13,268	24,940	14,736
その他の変数の数	32,960	6,720	24,292
制約式の数	49,774	28,768	32,171

* 6 学年と特別支援学級

表 2　計算実験 3 の結果
Table 2　Results of the third computational experiment.

	問題例 1	問題例 2	問題例 3
計算時間	10 日間	72.72 秒	6.59 秒
結果の解	暫定解	最適解	最適解
目的関数値	555	32	16
違反量	194	32	16
X_{srn} の総和	4	0	16
γ_{tdn} の総和	9	32	0
α_{SJ} の総和	180	0	0
$\beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$ の総和	1	0	0

づけ $p_t^{\rm tea1}$ は 1 に統一した．クラス毎の「ある教科集合の授業がある時限の集合の時限に割り当てられる数が上限を超える数 α_{SJ}」の総和の最大値（学年毎）に対するペナルティ $p_g^{\rm ub}$ をすべて 1 とした．避けるべき教科の並びになってしまった場合（$\beta_{s\hat{s}j\hat{j}} = 1$）のペナルティ $p_{s\hat{s}j\hat{j}}^{\rm avoid}$ の値は，重要度にあわせて，1，20，30 の 3 種類とした，第 2 希望教室を利用した回数が n のときペナルティ p_{sri}^{room2} は 5 章に示したとおりである．さらに，それに対する教科毎の重みづけ $p_{sr}^{\rm room1}$ は，教科や学年の優先度にあわせ，1，10，50，100，1,000 の 5 種類とした．

計算環境は，これまでと同じく，2.80 GHz Hexa-Core Intel Xeon CPU X5660，数理最適化汎用ソルバはCPLEX12.5.0.0 を用いた．計算時間の上限は 10 日間とした．

実験の結果を**表 2** に示す．

問題例 2，問題例 3 では，非常に短い時間で最適解が得られた．問題例 2 については，実際の時間割でも利用教室の違反と教員の 1 日の授業数上限の違反しかなかったが，提案モデルの時間割は，これらを削減しただけでなく，4 章の実験 2 の時間割で授業数上限を「2 時限超過する教員」が 3 人いたのに対し，違反量を増やすことなく 1 時限超過に抑えることができた．問題例 3 については，実際の時間割でも利用教室の違反しかなかったが，提案モデルの時間割は，この量を削減しただけでなく，実験 2 の時間割で「違反が 2 回」となるクラスが 1 クラスあったのに対し，違反量を増やすことなく違反を 1 回に抑えることができた．

一方，問題例 1 に対しては最適解が得られず，計算時間 10 日で下界との gap が 49.94%となる暫定解を得た．

問題例 1 に対し，長い時間をかけても最適解が得られなかった理由を考えてみる．生徒数や教員の人数・教室数といった学校規模は 2 つの小学校でほとんど変わらないが，対象期間が異なる（2 週間と 1 週間）だけでなく，担任教員授業の割合が大きく異なる．この割合が高ければ，特別教室の利用はクラス間で考慮（制約 (l)）するものの，教員の授業時間の重なり（制約 (j)）をほとんど考慮しなくてもよいので，クラスごとに独立に解ける部分が大きくなる．問題例 1 と問題例 2 の小学校では，この割合が低く（担任以外の教員の授業の割合が高く），1 クラスに関わる教員の数が多くなっていたため，制約 (j) を満たすのが難しくなっていたと考えられる．一方，同じ小学校における問題例でありながら，問題例 1 と問題例 2 では，求解の困難さが大きく異なった．これは，問題例 2 は，文化祭準備期間であり，合同練習やその施設の制限から自由度がなくなり，探索空間が大きく絞り込まれると考えられる．

表 3　実際の時間割と計算実験結果の時間割の比較
Table 3　Comparison between an actual timetable and the timetables produced by computational experiments.

	実際の時間割	4 節実験 2 時間割	提案モデル時間割
違反量の総和	225	188	194
X_{srn} の総和	16	4	4
γ_{tdn} の総和	14	8	9
α_{SJ} の総和	194	176	180
$\beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$ の総和	1	0	1

表 4　第 2 希望の教室を利用する回数（X_{srn} の総和）
Table 4　“Number of rooms to use” as the second preference (total of X_{srn}).

クラス	教科	実際の時間割	4 節実験 2 時間割	提案モデル時間割
1 年 B 組	美術	2		
1 年 D 組	美術	2		
2 年 C 組	美術	2		
2 年 D 組	美術	2		
3 年 B 組	美術		2	2
4 年 A 組	美術	2		
4 年 B 組	美術	2	2	
4 年 C 組	美術	2		
4 年 D 組	美術	2		2

次に，問題例 1 に対して暫定解として与えられた時間割の質を考えてみる．暫定解と下界との gap が 49.94%と大きかったことから，最適解からどの程度離れているのかが，この情報だけでは分からない．そこで，提案モデルによる時間割における違反量を，実際の時間割や 4 章の実験 2 で得た時間割のものと比較できるよう，**表 3** に示す．

提案モデルの時間割は下界との gap が 49.94%であるが，実験 2 で最適解として得られた時間割と比較しても違反の総数は大きく変わらないため，違反を十分に抑えることできているといえる．実験 2 のモデルの制約は提案モデルの制約を緩和したものと考えられるので，違反量の総和（実験 2 のモデルの目的関数）で考えれば，提案モデルが与えた暫定解の違反量総和とその下界（実験 2 の最適値）との gap は 3.19%と考えることができる[*1]．

各違反の詳細を，X_{srn} に関しては**表 4**，γ_{tdn} に関しては**表 5**，α_{SJ} に関しては**表 6** と**表 7**，$\beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$ しては**表 8** に

[*1] $\frac{194-188}{188} \times 100 \simeq 3.19$

表 5　教員の 1 日の授業数上限に関する違反量（γ_{tdn} の総和）
Table 5　Degree of violation for the lower and upper bounds of the number of lessons in a day of a specific teacher (total of γ_{tdn}).

教員名	実際の時間割	4 節実験 2 時間割	提案モデル時間割
教員 17	4	3	3
教員 18	1		1
教員 19	2		
教員 20	3	1	1
教員 21	2		
教員 22		3	3
教員 23	1		
教員 24	1	1	1

表 6　好ましくない時間に行われる授業の数（α_{SJ} の総和）
Table 6　Number of lessons scheduled outside preferred time (total of α_{SJ}).

クラス	実際の時間割	4 節実験 2 時間割	提案モデル時間割
1 年 A 組	8	8	7
1 年 B 組	6	9	7
1 年 C 組	8	6	7
1 年 D 組	6	8	7
2 年 A 組	6	4	6
2 年 B 組	6	7	6
2 年 C 組	7	5	6
2 年 D 組	7	6	6
3 年 A 組	9	9	7
3 年 B 組	6	6	7
3 年 C 組	6	6	7
3 年 D 組	9	7	7
4 年 A 組	9	8	8
4 年 B 組	7	9	8
4 年 C 組	8	7	8
4 年 D 組	8	6	8
5 年 A 組	9	11	9
5 年 B 組	8	7	9
5 年 C 組	10	7	9
5 年 D 組	10	8	9
6 年 A 組	11	9	8
6 年 B 組	11	11	8
6 年 C 組	9	7	8
6 年 D 組	10	5	8

示す．

表 4 において，3 つの時間割で X_{srn} の違反対象となった教科はすべて美術である．2 連続教科であったため，各クラスで美術の違反数が 2 となっていた．

表 5 において，1 日における違反数は 1 に抑えられていたので，表中の違反数は違反日数と読むことができる．

表 6 の値は，ある科目集合の授業がある時限集合の時限で行われる上限を超した数を示している．対象小学校では，1 時限目と給食前の 4 時限目は担任授業が好ましいと考えられており，担任以外の授業数の上限を 0 に設定した場合の違反，つまり担任以外の教員の授業数になっている．提案モデルの時間割では，学年内でこの数が均等になっていることが分かる．この数（α_{SJ}）の学年内の平均値と標準偏差を，表 7 に示す．

表 7　α_{SJ} の総和の平均（上段）と標準偏差（下段）
Table 7　Mean and standard deviation of the total of α_{SJ} (upper row: mean; lower row: standard deviation).

学年	実際の時間割	4 節実験 2 時間割	提案モデル時間割
1 年	7	7.75	7
	1	1.09	0
2 年	6.5	5.5	6
	0.5	1.12	0
3 年	7.5	7	7
	1.5	1.22	0
4 年	8	7.5	8
	0.71	1.12	0
5 年	9.25	8.25	9
	0.83	1.64	0
6 年	10.25	8	8
	0.83	2.24	0

※標準偏差は小数点第 2 位までとしている．

提案モデルの時間割では，α_{SJ} の総和が 180 で，実験 2 の時間割の 176 より少し多くなっているが，実験 2 のクラス間のばらつきを考えると，現場での実用を考えた場合には，大幅に改善されていることが分かる．また，実際の時間割においても，実験 2 の時間割より学年内でバランスがとれていることから，小学校現場では，違反量のバランスに重きをおいて時間割作成していることがうかがえる．

表 8　好ましくない授業の並びになった数（$\beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$ の総和）
Table 8　Number of undesirable arrangements of class lessons (total of $\beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$).

実際の時間割 違反 1	4 節実験 2 時間割 違反なし	提案モデル時間割 違反 1
6 年 C 組 2 週目木曜 3 時限 音楽@音楽室 3		5 年 C 組 1 週目木曜 3 時限 体育@体育館 2
6 年 C 組 2 週目木曜 4 時限 体育@体育館 2		6 年 D 組 1 週目木曜 4 時限 体育@体育館 2

表 8 では，好ましくない授業の並びになった内容を示している．実際の時間割では，あるクラスで移動をともなう授業が続くこと（音楽の後に体育）が 1 回，提案モデルの時間割では，1 つの教室（施設）で準備が異なる学年の授業が続くこと（体育館 2 で 5 年生の後に 6 年生）が 1 回あり，実験 2 の時間割では，これらの違反がなかったことを示している．

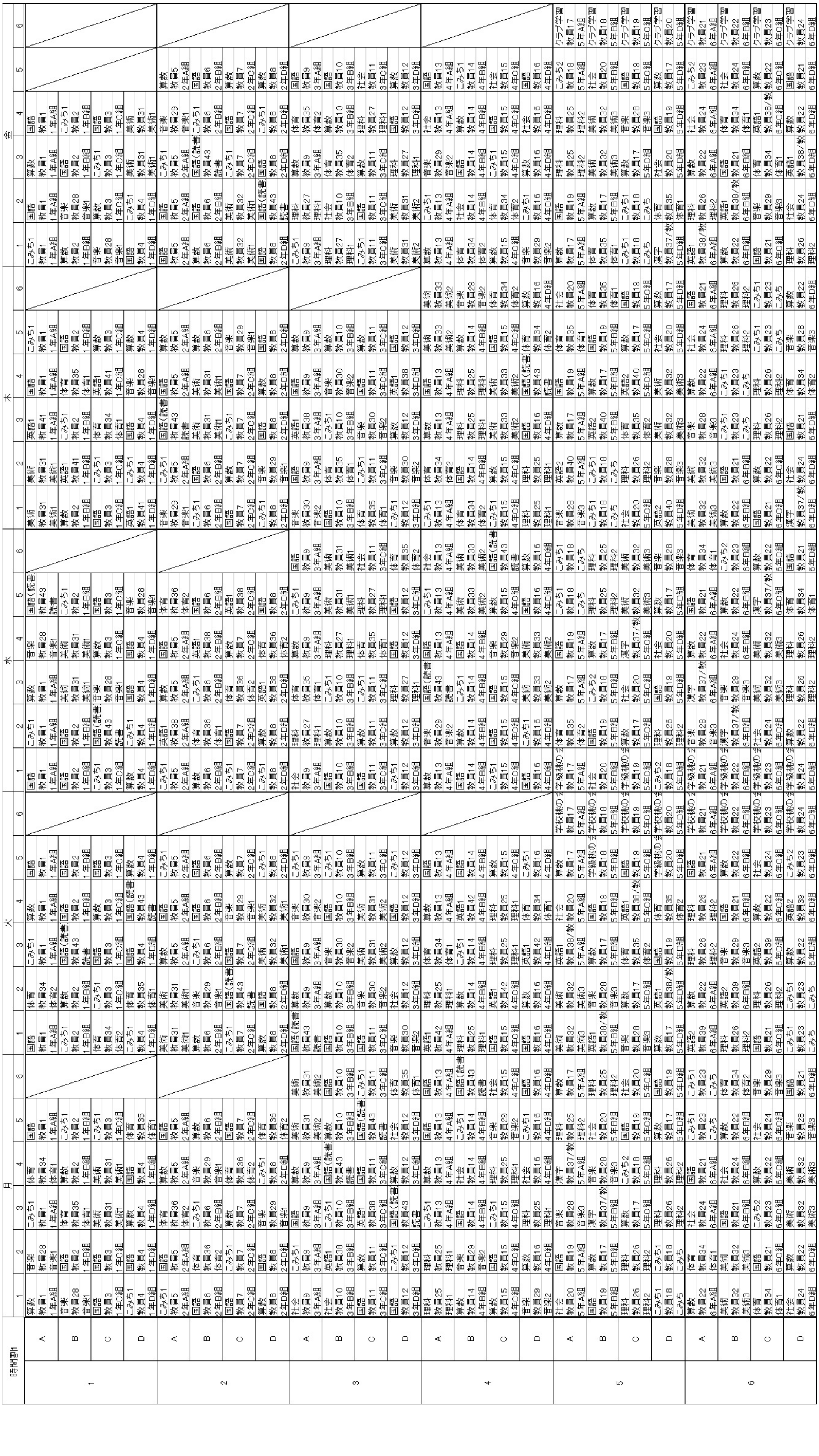


図 1　提案モデルを基に作成された時間割（1 週目）

Fig. 1　Timetable created on the basis of the model (first week).

時間割2		月					
		1	2	3	4	5	6
1	A	算数 教員1 1年A組	国語 教員1 1年A組	音楽 教員28 音楽1	国語 教員1 1年A組	こみち1 教員1 1年A組	
	B	算数 教員2 1年B組	国語 教員2 1年B組	国語 教員2 1年B組	こみち1 教員2 1年B組	国語(読書 教員43 読書	
	C	国語 教員3 1年C組	算数 教員3 1年C組	美術 教員31 美術1	美術 教員31 美術1	こみち1 教員3 1年C組	
	D	国語 教員4 1年D組	こみち1 教員4 1年D組	算数 教員4 1年D組	国語(読書 教員43 読書	国語 教員4 1年D組	
2	A	国語 教員5 2年A組	音楽 教員29 音楽1	こみち1 教員5 2年A組	算数 教員5 2年A組	体育 教員36 体育1	
	B	算数 教員6 2年B組	こみち1 教員6 2年B組	体育 教員36 体育1	国語 教員6 2年B組	国語 教員6 2年B組	
	C	算数 教員7 2年C組	こみち1 教員7 2年C組	国語 教員7 2年C組	体育 教員36 体育1	音楽 教員29 音楽1	
	D	こみち1 教員8 2年D組	体育 教員36 体育1	国語 教員8 2年D組	国語 教員8 2年D組	算数 教員8 2年D組	
3	A	体育 教員35 体育2	国語 教員9 3年A組	算数 教員9 3年A組	こみち1 教員9 3年A組	社会 教員9 3年A組	国語(読書 教員43 読書
	B	国語 教員10 3年B組	こみち1 教員10 3年B組	国語(読書 教員43 読書	算数 教員10 3年B組	美術 教員31 美術2	美術 教員31 美術2
	C	算数 教員11 3年C組	英語1 教員38 3年C組	こみち1 教員11 3年C組	国語 教員11 3年C組	社会 教員11 3年C組	体育 教員35 体育1
	D	こみち1 教員12 3年D組	体育 教員35 体育2	英語1 教員38 3年D組	国語 教員12 3年D組	算数 教員12 3年D組	社会 教員12 3年D組
4	A	国語 教員13 4年A組	算数 教員13 4年A組	理科 教員25 理科1	理科 教員25 理科1	社会 教員13 4年A組	こみち1 教員13 4年A組
	B	算数 教員14 4年B組	こみち1 教員14 4年B組	音楽 教員29 音楽2	国語 教員14 4年B組	社会 教員14 4年B組	体育 教員34 体育2
	C	こみち1 教員15 4年C組	算数 教員15 4年C組	国語 教員15 4年C組	音楽 教員29 音楽2	体育 教員34 体育2	社会 教員15 4年C組
	D	理科 教員25 理科1	理科 教員25 理科1	国語 教員16 4年D組	社会 教員16 4年D組	こみち1 教員16 4年D組	算数 教員16 4年D組
5	A	国語 教員19 5年A組	音楽 教員28 音楽3	算数 教員17 5年A組	漢字 教員37/教 5年A組	社会 教員20 5年A組	理科 教員25 理科2
	B	音楽 教員28 音楽3	国語 教員19 5年B組	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3	理科 教員25 理科2	算数 教員17 5年B組
	C	理科 教員26 理科2	理科 教員26 理科2	漢字 教員37/教 5年C組	算数 教員17 5年C組	国語 教員19 5年C組	社会 教員20 5年C組
	D	こみち1 教員18 こみち	こみち1 教員18 こみち	社会 教員20 5年D組	音楽 教員28 音楽3	算数 教員17 5年D組	国語 教員19 5年D組
6	A	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3	算数 教員22 6年A組	体育 教員34 体育2	国語 教員21 6年A組	社会 教員24 6年A組
	B	国語 教員21 6年B組	算数 教員22 6年B組	理科 教員26 理科2	理科 教員26 理科2	社会 教員24 6年B組	音楽 教員29 音楽3
	C	社会 教員24 6年C組	国語 教員21 6年C組	体育 教員34 体育2	算数 教員22 6年C組	こみち1 教員23 こみち	こみち1 教員23 こみち
	D	算数 教員22 6年D組	社会 教員24 6年D組	こみち1 教員23 こみち	こみち1 教員23 こみち	音楽 教員28 音楽3	国語 教員21 6年D組

時間割2		火					
		1	2	3	4	5	6
1	A	音楽 教員28 音楽1	算数 教員1 1年A組	こみち1 教員1 1年A組	体育 教員34 体育2	国語 教員1 1年A組	
	B	算数 教員2 1年B組	音楽 教員28 音楽1	国語 教員2 1年B組	体育 教員35 体育1	こみち1 教員2 1年B組	
	C	国語 教員3 1年C組	国語 教員3 1年C組	体育 教員34 体育2	算数 教員3 1年C組	こみち1 教員3 1年C組	
	D	国語 教員4 1年D組	国語 教員4 1年D組	体育 教員35 体育1	算数 教員4 1年D組	こみち1 教員4 1年D組	
2	A	国語 教員5 2年A組	国語 教員5 2年A組	算数 教員5 2年A組	国語(読書 教員43 読書	こみち1 教員5 2年A組	
	B	国語 教員6 2年B組	算数 教員6 2年B組	美術 教員31 美術1	美術 教員31 美術1	こみち1 教員6 2年B組	
	C	美術 教員32 美術1	美術 教員32 美術1	算数 教員7 2年C組	国語 教員7 2年C組	こみち1 教員7 2年C組	
	D	国語(読書 教員43 読書	算数 教員8 2年D組	国語 教員8 2年D組	音楽 教員29 音楽1	こみち1 教員8 2年D組	
3	A	国語 教員9 3年A組	こみち1 教員9 3年A組	音楽 教員30 音楽2	社会 教員9 3年A組	算数 教員9 3年A組	
	B	国語 教員10 3年B組	音楽 教員30 音楽2	算数 教員10 3年B組	社会 教員10 3年B組	こみち1 教員10 3年B組	
	C	美術 教員31 美術2	美術 教員31 美術2	算数 教員11 3年C組	音楽 教員30 音楽2	国語 教員11 3年C組	
	D	音楽 教員30 音楽2	社会 教員12 3年D組	算数 教員12 3年D組	国語 教員12 3年D組	こみち1 教員12 3年D組	
4	A	体育 教員34 体育1	英語1 教員42 4年A組	国語 教員13 4年A組	理科 教員25 理科1	算数 教員13 4年A組	
	B	英語1 教員42 4年B組	理科 教員25 理科1	国語(読書 教員43 読書	国語 教員14 4年B組	算数 教員14 4年B組	
	C	理科 教員25 理科1	こみち1 教員15 4年C組	英語1 教員42 4年C組	算数 教員15 4年C組	国語 教員15 4年C組	
	D	算数 教員16 4年D組	体育 教員34 体育1	理科 教員25 理科1	英語1 教員42 4年D組	国語 教員16 4年D組	
5	A	国語 教員19 5年A組	体育 教員35 体育2	算数 教員17 5年A組	英語1 教員38/教 5年A組	学級桃の会 教員17 5年A組	学校桃の会 教員17 5年A組
	B	英語1 教員38/教 5年B組	国語 教員19 5年B組	社会 教員20 5年B組	算数 教員17 5年B組	学級桃の会 教員18 5年B組	学校桃の会 教員18 5年B組
	C	こみち1 教員18 こみち	こみち1 教員18 こみち	英語1 教員38/教 5年C組	理科 教員26 理科2	学級桃の会 教員19 5年C組	学校桃の会 教員19 5年C組
	D	体育 教員35 体育2	英語1 教員38/教 5年D組	理科 教員26 理科2	社会 教員20 5年D組	学級桃の会 教員20 5年D組	学校桃の会 教員20 5年D組
6	A	英語2 教員39 6年A組	理科 教員26 理科2	社会 教員24 6年A組	算数 教員22 6年A組	学級桃の会 教員21 6年A組	学校桃の会 教員21 6年A組
	B	音楽 教員29 音楽3	社会 教員24 6年B組	英語2 教員39 6年B組	国語 教員21 6年B組	学級桃の会 教員22 6年B組	学校桃の会 教員22 6年B組
	C	理科 教員26 理科2	国語 教員21 6年C組	音楽 教員29 音楽3	英語2 教員39 6年C組	学級桃の会 教員23 6年C組	学校桃の会 教員23 6年C組
	D	算数 教員22 6年D組	英語2 教員39 6年D組	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3	学級桃の会 教員24 6年D組	学校桃の会 教員24 6年D組

時間割2		水					
		1	2	3	4	5	6
1	A	国語 教員1 1年A組	こみち1 教員1 1年A組	美術 教員31 美術1	美術 教員31 美術1	算数 教員1 1年A組	
	B	算数 教員2 1年B組	体育 教員35 体育1	国語 教員2 1年B組	こみち1 教員2 1年B組	国語 教員2 1年B組	
	C	こみち1 教員3 1年C組	算数 教員3 1年C組	国語 教員3 1年C組	国語(読書 教員43 読書	音楽 教員28 音楽1	
	D	算数 教員4 1年D組	こみち1 教員4 1年D組	音楽 教員28 音楽1	国語 教員4 1年D組	体育 教員35 体育1	
2	A	国語 教員5 2年A組	英語1 教員38 2年A組	こみち1 教員5 2年A組	体育 教員36 体育2	算数 教員5 2年A組	
	B	算数 教員6 2年B組	国語 教員6 2年B組	英語1 教員38 2年B組	こみち1 教員6 2年B組	体育 教員36 体育2	
	C	こみち1 教員7 2年C組	体育 教員36 体育2	算数 教員7 2年C組	英語1 教員38 2年C組	国語 教員7 2年C組	
	D	こみち1 教員8 2年D組	国語 教員8 2年D組	体育 教員36 体育2	算数 教員8 2年D組	英語1 教員38 2年D組	
3	A	算数 教員9 3年A組	国語 教員9 3年A組	理科 教員27 理科1	こみち1 教員9 3年A組	美術 教員31 美術2	美術 教員31 美術2
	B	こみち1 教員10 3年B組	社会 教員10 3年B組	国語 教員10 3年B組	理科 教員27 理科1	算数 教員10 3年B組	体育 教員35 体育1
	C	国語 教員11 3年C組	理科 教員27 理科1	算数 教員11 3年C組	社会 教員11 3年C組	国語(読書 教員43 読書	こみち1 教員11 3年C組
	D	国語 教員12 3年D組	国語(読書 教員43 読書	こみち1 教員12 3年D組	国語 教員12 3年D組	理科 教員27 理科1	算数 教員12 3年D組
4	A	こみち1 教員13 4年A組	算数 教員13 4年A組	国語 教員13 4年A組	音楽 教員29 音楽2	国語 教員13 4年A組	国語(読書 教員43 読書
	B	算数 教員14 4年B組	社会 教員14 4年B組	美術 教員33 美術2	美術 教員33 美術2	国語 教員14 4年B組	こみち1 教員14 4年B組
	C	国語 教員15 4年C組	音楽 教員29 音楽2	国語(読書 教員43 読書	こみち1 教員15 4年C組	算数 教員15 4年C組	国語 教員15 4年C組
	D	国語 教員16 4年D組	こみち1 教員16 4年D組	音楽 教員29 音楽2	算数 教員16 4年D組	美術 教員33 美術1	美術 教員33 美術1
5	A	国語 教員19 5年A組	算数 教員17 5年A組	こみち2 教員18 5年A組	社会 教員20 5年A組	理科 教員25 理科2	理科 教員25 理科2
	B	こみち1 教員18 こみち	こみち1 教員18 こみち	社会 教員20 5年B組	国語 教員19 5年B組	算数 教員17 5年B組	こみち2 教員18 5年B組
	C	社会 教員20 5年C組	音楽 教員28 音楽3	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3	国語 教員19 5年C組	算数 教員17 5年C組
	D	算数 教員17 5年D組	漢字 教員37/教 5年D組	理科 教員26 理科2	理科 教員26 理科2	社会 教員20 5年D組	国語 教員19 5年D組
6	A	こみち2 教員23 6年A組	算数 教員22 6年A組	漢字 教員37/教 6年A組	音楽 教員28 音楽3	国語 教員21 6年A組	社会 教員24 6年A組
	B	国語 教員21 6年B組	社会 教員24 6年B組	算数 教員22 6年B組	漢字 教員37/教 6年B組	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3
	C	社会 教員24 6年C組	国語 教員21 6年C組	こみち2 教員23 6年C組	算数 教員22 6年C組	漢字 教員37/教 6年C組	体育 教員34 体育2
	D	算数 教員22 6年D組	理科 教員26 理科2	国語 教員21 6年D組	体育 教員34 体育1	社会 教員24 6年D組	音楽 教員28 音楽3

時間割2		木					
		1	2	3	4	5	6
1	A	英語1 教員41 1年A組	体育 教員34 体育1	国語 教員1 1年A組	こみち1 教員1 1年A組	算数 教員1 1年A組	
	B	美術 教員31 美術1	美術 教員31 美術1	国語 教員2 1年B組	英語1 教員41 1年B組	こみち1 教員2 1年B組	
	C	体育 教員34 体育1	英語1 教員41 1年C組	音楽 教員28 音楽1	こみち1 教員3 1年C組	国語 教員3 1年C組	
	D	国語 教員4 1年D組	算数 教員4 1年D組	英語1 教員41 1年D組	音楽 教員28 音楽1	こみち1 教員4 1年D組	
2	A	こみち1 教員5 2年A組	算数 教員5 2年A組	美術 教員31 美術1	美術 教員31 美術1	国語 教員5 2年A組	
	B	算数 教員6 2年B組	国語 教員6 2年B組	こみち1 教員6 2年B組	国語(読書 教員43 読書	音楽 教員29 音楽1	
	C	算数 教員7 2年C組	音楽 教員29 音楽1	国語 教員7 2年C組	こみち1 教員7 2年C組	国語 教員7 2年C組	
	D	音楽 教員29 音楽1	こみち1 教員8 2年D組	国語 教員8 2年D組	算数 教員8 2年D組	国語 教員8 2年D組	
3	A	体育 教員35 体育2	算数 教員9 3年A組	音楽 教員30 音楽2	英語1 教員38 3年A組	国語 教員9 3年A組	
	B	国語 教員10 3年B組	音楽 教員30 音楽2	英語1 教員38 3年B組	体育 教員35 体育2	算数 教員10 3年B組	
	C	算数 教員11 3年C組	体育 教員35 体育2	こみち1 教員11 3年C組	音楽 教員30 音楽2	国語 教員11 3年C組	
	D	音楽 教員30 音楽2	算数 教員12 3年D組	体育 教員35 体育2	こみち1 教員12 3年D組	国語 教員12 3年D組	
4	A	こみち1 教員13 4年A組	国語 教員13 4年A組	美術 教員33 美術2	美術 教員33 美術2	算数 教員13 4年A組	体育 教員34 体育2
	B	理科 教員25 理科1	理科 教員25 理科1	こみち1 教員14 4年B組	算数 教員14 4年B組	体育 教員34 体育2	国語 教員14 4年B組
	C	算数 教員15 4年C組	国語 教員15 4年C組	理科 教員25 理科1	理科 教員25 理科1	美術 教員33 美術2	美術 教員33 美術2
	D	こみち1 教員16 4年D組	国語 教員16 4年D組	国語(読書 教員43 読書	算数 教員16 4年D組	国語 教員16 4年D組	音楽 教員29 音楽2
5	A	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3	社会 教員20 5年A組	英語2 教員40 5年A組	こみち1 教員18 こみち	こみち1 教員18 こみち
	B	国語 教員19 5年B組	音楽 教員28 音楽3	英語2 教員40 5年B組	算数 教員17 5年B組	社会 教員20 5年B組	体育 教員35 体育1
	C	音楽 教員28 音楽3	英語2 教員40 5年C組	国語 教員19 5年C組	社会 教員20 5年C組	体育 教員35 体育1	算数 教員17 5年C組
	D	英語2 教員40 5年D組	算数 教員17 5年D組	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3	国語 教員19 5年D組	社会 教員20 5年D組
6	A	算数 教員22 6年A組	社会 教員24 6年A組	理科 教員26 理科2	理科 教員26 理科2	音楽 教員28 音楽3	国語 教員21 6年A組
	B	こみち1 教員23 こみち	こみち1 教員23 こみち	国語 教員21 6年B組	体育 教員34 体育1	算数 教員22 6年B組	こみち2 教員23 6年B組
	C	理科 教員26 理科2	理科 教員26 理科2	音楽 教員29 音楽3	算数 教員22 6年C組	国語 教員21 6年C組	社会 教員24 6年C組
	D	漢字 教員37/教 6年D組	国語 教員21 6年D組	体育 教員34 体育1	社会 教員24 6年D組	理科 教員26 理科2	理科 教員26 理科2

時間割2		金					
		1	2	3	4	5	6
1	A	国語 教員1 1年A組	国語(読書 教員43 読書	こみち1 教員1 1年A組	国語 教員1 1年A組		
	B	音楽 教員28 音楽1	国語 教員2 1年B組	こみち1 教員2 1年B組	算数 教員2 1年B組		
	C	国語 教員3 1年C組	こみち1 教員3 1年C組	国語 教員3 1年C組	算数 教員3 1年C組		
	D	美術 教員31 美術1	美術 教員31 美術1	こみち1 教員4 1年D組	国語 教員4 1年D組		
2	A	国語 教員5 2年A組	こみち1 教員5 2年A組	音楽 教員29 音楽1	算数 教員5 2年A組	国語 教員5 2年A組	
	B	国語 教員6 2年B組	こみち1 教員6 2年B組	算数 教員6 2年B組	音楽 教員29 音楽1	国語 教員6 2年B組	
	C	国語 教員7 2年C組	国語 教員7 2年C組	国語(読書 教員43 読書	算数 教員7 2年C組	こみち1 教員7 2年C組	
	D	こみち1 教員8 2年D組	国語 教員8 2年D組	美術 教員32 美術1	美術 教員32 美術1	算数 教員8 2年D組	
3	A	国語 教員9 3年A組	こみち1 教員9 3年A組	理科 教員27 理科1	国語 教員9 3年A組	算数 教員9 3年A組	
	B	算数 教員10 3年B組	こみち1 教員10 3年B組	国語 教員10 3年B組	理科 教員27 理科1	国語 教員10 3年B組	
	C	国語 教員11 3年C組	理科 教員27 理科1	国語 教員11 3年C組	算数 教員11 3年C組	こみち1 教員11 3年C組	
	D	理科 教員27 理科1	算数 教員12 3年D組	美術 教員31 美術2	美術 教員31 美術2	国語 教員12 3年D組	
4	A	音楽 教員29 音楽2	社会 教員13 4年A組	国語 教員13 4年A組	算数 教員13 4年A組	こみち1 教員13 4年A組	
	B	こみち1 教員14 4年B組	音楽 教員29 音楽2	国語 教員14 4年B組	算数 教員14 4年B組	国語 教員14 4年B組	
	C	体育 教員34 体育2	算数 教員15 4年C組	こみち1 教員15 4年C組	社会 教員15 4年C組	国語 教員15 4年C組	
	D	国語 教員16 4年D組	体育 教員34 体育2	算数 教員16 4年D組	こみち1 教員16 4年D組	社会 教員16 4年D組	
5	A	体育 教員35 体育1	算数 教員17 5年A組	社会 教員20 5年A組	音楽 教員28 音楽3	国語 教員19 5年A組	クラブ学習 教員17 5年A組
	B	漢字 教員37/教 5年B組	体育 教員35 体育1	理科 教員25 理科2	理科 教員25 理科2	社会 教員20 5年B組	クラブ学習 教員18 5年B組
	C	算数 教員17 5年C組	社会 教員20 5年C組	体育 教員35 体育2	国語 教員19 5年C組	こみち2 教員18 5年C組	クラブ学習 教員19 5年C組
	D	国語 教員19 5年D組	音楽 教員28 音楽3	こみち2 教員18 5年D組	体育 教員35 体育2	算数 教員17 5年D組	クラブ学習 教員20 5年D組
6	A	こみち1 教員23 こみち	こみち1 教員23 こみち	英語1 教員38/教 6年A組	体育 教員34 体育1	国語 教員21 6年A組	クラブ学習 教員21 6年A組
	B	英語1 教員38/教 6年B組	理科 教員26 理科2	体育 教員34 体育1	社会 教員24 6年B組	算数 教員22 6年B組	クラブ学習 教員22 6年B組
	C	美術 教員32 美術3	美術 教員32 美術3	算数 教員22 6年C組	英語1 教員38/教 6年C組	社会 教員24 6年C組	クラブ学習 教員23 6年C組
	D	社会 教員24 6年D組	英語1 教員38/教 6年D組	国語 教員21 6年D組	算数 教員22 6年D組	こみち2 教員23 6年D組	クラブ学習 教員24 6年D組

図 2　提案モデルを基に作成された時間割（2 週目）

Fig. 2　Timetable created on the basis of the model (second week).

図 **1**，図 **2** は，問題例 1 に対して提案モデルで得られた時間割であり，それぞれ 1 週目，2 週目のものである．各セルには，上から教科，授業担当教員，利用教室が示してあり，担任教員が行う授業には，■マークがつけてあるので，1 時限目や 4 時限目にこのマークが多くつけられていることが確認できる．

この時間割が小学校現場から実用できると評価されたことや，表 3～表 8 に示した結果や，問題例 2 や問題例 3 の結果を総合すると，提案モデルは，時間割作成に有効だと考えられる．

7. おわりに

本研究では小学校時間割作成において学校，期間を問わない柔軟性のある数理最適化モデルの構築を行った．そして，特徴が異なる小学校および期間に対して実験を行い，時間割を作成した．

時間割を作成するうえで，2 章の制約 (a)～(l) はどの小学校や期間でも必ず考えられていることが分かった．

問題例 1 と問題例 2 は，低学年の児童の移動や準備，時間帯を考慮して，クラス担任教員以外の教員による教科は 1 限と 4 限に行わないようにしていた．そして，問題例 2 と問題例 3 では同じ日に行えない教科の組合せが存在するといった特徴が見られた．提案モデルでは 2 章の制約 (m) と制約 (n) によってそれぞれを表すことができる．そのほか，個々の小学校の特徴や期間による違いによって現れる考慮点は，柔軟に適用しやすい制約 (m) や制約 (n) 等によってカバーできることも分かった．そして，状況によってそれらの違反を受け入れ，違反をクラスや教員間でコントロールできるようにしたことで，実用できる時間割の作成が可能となった．このように多くの特徴を柔軟に表現できる制約を考えたこと，偏りのないバランスのとれた時間割を提供できること等から，本研究では汎用性のあるモデルを構築することができたと考える．

一方，解の質の評価とは別の議論として，問題例 1 のように，担任教員の授業の割合が高く，自由度が大きい通常時間割の作成においては，大きな gap 値を持つ暫定解が得られてしまうという問題がある．これは，高速に解を得るための今後の課題といえる．

違反量の総和から考えると，最適解から大きくは離れていないことが分かったが，下界，つまり線形緩和した問題の最適値の値がなかなか上昇しないことから，提案モデルの定式化における線形緩和問題が元の問題をうまく表せていないことが考えられる．5 章の最後で述べた定式化′のように，一部の変数を連続変数として表現した実験も行ったが，同じ 10 日間の計算でもその結果は大きくは変わらなかった．具体的には，6 章の実験で暫定値 555，下界 277.83，gap49.94%だったのに対し，定式化′においては，暫定値 558，下界 347，gap37.81%であり，下界は上昇したものの，暫定解自体はわずかに悪くなる結果となった．

違反量のバランスをとらない実験 2 では，2 時間弱で最適解を得ていたことから，タイトな下界を得るための改善対象として，違反量のバランスをとるための変数の設定，制約式や目的関数の設定方法に取り組んでいきたい．

謝辞　本論文に貴重なご助言をいただいた査読委員の先生方に心より感謝いたします．本研究は，JSPS 科研費 26350435 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Schaerf, A.: A Survey of Automated Timetabling, *Artificial Intelligence Review*, Vol.13, No.2, pp.87–127 (1999).

[2] Al-Yakoob, S.M. and Sherali, H.D.: Mathematical models and algorithms for a high school timetabling problem, *Computers & Operations*, Vol.61, pp.56–68 (2015).

[3] Ribić, S. and Konjicija, S.: A two phase integer linear programming approach to solving the school timetable problem, *Proc. Information Technology Interfaces* (*ITI2010*), pp.651–656 (2010).

[4] Sørensen, M. and Dahms, F.H.W.: A two-stage decomposition of high school timetabling applied to cases in Denmark, *Computers & Operations Research*, Vol.43, pp.36–49 (2014).

[5] Pillay, N.: A survey of school timetabling research, *Annals of Operations Research*, Vol.1, pp.261–293 (2014).

[6] 胸組虎胤：小山高専における授業時間割作成：手順，教育的意義，問題点，小山工業高等専門学校研究紀要，Vol.39, pp.121–126 (2007).

[7] 大坪正和，倉重賢治，亀山嘉正：中学校における時間割編成問題への取り組み，日本経営工学会論文誌，Vol.57, No.3, pp.231–242 (2006).

[8] 宮代隆平：整数計画ソルバー入門，オペレーションズ・リサーチ，Vol.57, pp.183–189 (2012).

高橋 香

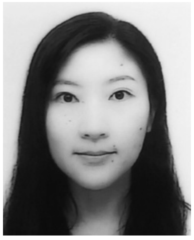
2015 年成蹊大学理工学部情報科学科卒業．2017 年同大学大学院理工学研究科博士前期課程修了．現実問題のモデル化に興味を持ち，本研究を進めた．日本 OR 学会学生会員．

ブルノ フィゲラ ロウレンソ

2011 年ブラジリア大学計算機科学部卒業．2012 年ブラジリア大学大学院数学科修士課程修了．2016 年東京工業大学大学院数理計算科学専攻博士課程修了．2016 年より成蹊大学助教．数理最適化研究に従事．日本 OR 学会会員．

赤池 洋一

東京学芸大学教育学部初等育教員養成課程国語専修卒業．2014 年度より成蹊小学校に勤務，現在 2 年生担任．思考力を育てる日記・自学指導を重視した子どもたちの教育活動に従事．現在，教務部部員として時間割作成に取り組む．



山口 梨恵

東京学芸大学教育学部卒業．同大学大学院教育学研究科修了後，2012 年より成蹊小学校に勤務．カール・オルフの理念に興味を持ち，音・動き・言葉の関連を重視した子どもたちの音楽活動に従事．現在，教務部部員として時間割作成に取り組む．

山本 剛大

千葉大学教育学部中学校教員養成課程技術科専修卒業．同大学大学院教育学研究科カリキュラム開発専攻修了．2011 年より成蹊小学校に勤務．小学校におけるものづくり教育，子どもの手仕事を研究課題として取り組んでいる．現在，小学校教務部として時間割作成に取り組む．

林田 真治

1994 年宇都宮大学教育学部卒業．1995 年より成蹊小学校に勤務．理科教育に従事するとともに，現在，教務主任として時間割作成を担当．2017 年 4 月より成蹊大学理工学部客員研究員として最適化の研究に取り組む．

池上 敦子　（正会員）

立教大学理学部数学科卒業．成蹊大学助手，講師，准教授を経て，2009 年同大学教授．現実問題のモデル化とアルゴリズム構築に興味を持ち，組合せ最適化研究に従事．博士（工学）．1997 年日本 OR 学会事例研究奨励賞，2003 年日本人間工学会研究奨励賞，2004 年日本 OR 学会事例研究賞，2008 年スケジューリング学会技術賞各受賞．日本 OR 学会フェロー．

