Vol.2017-MPS-114 No.2
2017/7/17

離散Nahm方程式のLax対とその応用

木村 欣司[1,a)]

概要：Nahm 方程式の q-アナログは、Kamata と Nakamula の論文に記載されている．本論文では, Kamata と Nakamula の方程式とは別の離散 Nahm 方程式を提案する．q-アナログの Nahm 方程式の Lax 対はいまだ見つかっていないが, 我々の Nahm 方程式の離散類似は通常の差分方程式であり, Lax 表現を有する．数値シミュレーションには, q-アナログの差方程式より通常の差分方程式のほうが適している．時間連続のオイラーのコマを時間連続の Nahm 方程式から導き出すことができるという重要な結果を利用して, Nahm 方程式の離散アナログからの簡約として, 離散オイラーのコマを離散オイラーのコマの行列版に拡張する．それを, 離散行列オイラーのコマと定義する．これについても, Lax 表現がある．さらに, 離散オイラーのコマの Lax 対について, 計算機代数を用いて導出された Lax 対と四元数の観点から導入された Lax 対の両方と異なる別の Lax 対を得ることができる．

Lax Pair of Discrete Nahm Equations and its Application

Kimura Kinji[1,a)]

1. はじめに

論文 [4] において, Kamata と Nakamula は, q-アナログの Nahm 方程式を述べている．本論文では, Kamata と Nakamula の論文とは異なる離散 Nahm 方程式を提案する．q-アナログの Nahm 方程式の Lax 対はいまだ見つかっていないが, 我々の Nahm 方程式の離散類似は, 通常の差分方程式であり, Lax 表現を有する．数値シミュレーションには, q-アナログの差方程式より通常の差分方程式のほうが適している．[4] で述べられている時間連続のオイラーのコマを時間連続の Nahm 方程式から導き出すことができるという重要な結果を利用して, Nahm 方程式の離散アナログからの簡約として, [1] で導入された離散オイラーのコマを行列版の離散オイラーのコマに拡張する．それを, 離散行列オイラーのコマと定義する．これについても, Lax 表現がある．さらに, 離散オイラーのコマの Lax 対について, 計算機代数を用いて導出された Lax 対 [2] と四元数の観点から導入された Lax 対 [3] の両方と異なる別の Lax 対を得ることができる．

2 章では, 時間連続の Nahm 方程式とその Lax 対を紹介する．3 章では, Nahm 方程式の離散類似とその Lax 表現を提案する．4 章では, 離散オイラーのコマを離散行列オイラーのコマに拡張する．さらに, それについて, Lax 表現を得る．5 章では, 離散オイラーのコマの Lax 対について, 計算機代数を用いて導出された Lax 対 [2] と四元数の観点から導入された Lax 対 [3] を簡単に述べる．6 章では, 上記の 2 種類の Lax 対とは異なる離散オイラーのコマの Lax 対を得る．7 章では, 離散オイラーのコマの保存量について議論する．

2. 時間連続の Nahm 方程式の Lax 対

$T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ を, 3 つの行列に値を持つ複素数 x の meromorphic functions とする．論文 [5] に従って, Nahm 方程式を以下のように定義する,

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} = [T_2, T_3],\ \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} = [T_3, T_1],\ \frac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}x} = [T_1, T_2]. \quad (1)$$

すると, Nahm 方程式の Lax 対は, 次のように書ける,

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = [A, B], \quad (2)$$

ここで,

1 京都大学
Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto, Kyoto 606–8501, Japan
a) kimura.kinji.7z@kyoto-u.ac.jp

$$
\begin{aligned}
A(\mu) \;=\; & \begin{bmatrix} T_1(x) & -T_2(x) \\ T_2(x) & T_1(x) \end{bmatrix} \\
& +\mu \begin{bmatrix} 0 & 2T_3(x) \\ -2T_3(x) & 0 \end{bmatrix} \\
& +\mu^2 \begin{bmatrix} T_1(x) & T_2(x) \\ -T_2(x) & T_1(x) \end{bmatrix}, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
B(\mu) \;=\; \begin{bmatrix} 0 & T_3(x) \\ -T_3(x) & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} T_1(x) & T_2(x) \\ -T_2(x) & T_1(x) \end{bmatrix}. \qquad (4)
$$

単純な考察により, 行列 $A(\mu)$ の固有値は, x に依存しないことがわかる. よって, 次の固有多項式 $\det(\lambda I + A(\mu))$ の係数は, 保存量を与える. 注意として, 固有多項式の係数は, μ に依存する. しかし, 関数独立な係数の数は, 有限である.

3. 我々の Nahm 方程式の離散類似とその Lax 表現

Kamata と Nakamula による論文 [4] には, q-アナログの Nahm 方程式が述べられている. 本論文では, Kamata と Nakamula の論文の方程式とは違った離散 Nahm 方程式を提案する. q-アナログの Nahm 方程式の Lax 対はいまだ見つかっていないが, 我々の Nahm 方程式の離散類似は, 通常の差分方程式であり, Lax 表現を有する. T_1^n, T_2^n, T_3^n を, 3 つの行列に値を持つ整数 n の meromorphic functions とする. 離散 Nahm 方程式を以下のように定義する,

$$
\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\delta} \;=\; T_2^{n+1}T_3^n - T_3^{n+1}T_2^n, \qquad (5)
$$

$$
\frac{T_2^{n+1} - T_2^n}{\delta} \;=\; T_3^{n+1}T_1^n - T_1^{n+1}T_3^n, \qquad (6)
$$

$$
\frac{T_3^{n+1} - T_3^n}{\delta} \;=\; T_1^{n+1}T_2^n - T_2^{n+1}T_1^n, \qquad (7)
$$

ここで, δ は差分間隔であり, さらに,

$$
T_1^n = T_1(n\delta),\; T_2^n = T_2(n\delta),\; T_3^n = T_3(n\delta), \qquad (8)
$$

と定義する. 注意として, もし, δ について 0 の極限を取ったなら, 式 (5)-(7) を使って, 式 (1) を復元できる. 加えて, 離散 Nahm 方程式の Lax 対は次のような形式で得られる,

$$
A^{n+1}(\mu)B^n(\mu) = B^{n+1}(\mu)A^n(\mu). \qquad (9)
$$

これは, 良く知られた Lax 対の形式である [2], [3], [6], [7], [8]. $A^n(\mu)$ と $B^n(\mu)$ は, 次のように定義される,

$$
\begin{aligned}
A^n(\mu) \;=\; & \begin{bmatrix} T_1^n & -T_2^n \\ T_2^n & T_1^n \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 2T_3^n \\ -2T_3^n & 0 \end{bmatrix} \\
& +\mu^2 \begin{bmatrix} T_1^n & T_2^n \\ -T_2^n & T_1^n \end{bmatrix}, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
B^n(\mu) \;=\; \begin{bmatrix} -I & \delta T_3^n \\ -\delta T_3^n & -I \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \delta T_1^n & \delta T_2^n \\ -\delta T_2^n & \delta T_1^n \end{bmatrix}. \qquad (11)
$$

単純な考察により, 次の固有多項式,

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) \;&=\; \det(\lambda B^n(\mu) - A^n(\mu)), \qquad (12) \\
&=\; c_m(\mu)\lambda^m + \cdots + c_0(\mu), \qquad (13)
\end{aligned}
$$

によって定義される固有値は, n に依存しないことがわかる. ここで, m は $A^n(\mu)$ と $B^n(\mu)$ の行列サイズである. それが意味するところは, 固有多項式 (12) の係数 $c_i(\mu)(i = 1, \cdots, m)$ を使うことで保存量を得られるということである. 次のように, 保存量は定義される,

$$
H_0(\mu) = \frac{c_0(\mu)}{c_m(\mu)}, \cdots, H_{m-1}(\mu) = \frac{c_{m-1}(\mu)}{c_m(\mu)}. \qquad (14)
$$

4. 離散行列オイラーのコアとその Lax 表現

[4] で述べられている時間連続のオイラーのコマを時間連続の Nahm 方程式から導き出すことができるという重要な結果を利用して, Nahm 方程式の離散アナログからの簡約として, [1] で導入された離散オイラーのコマを行列版の離散オイラーのコマに拡張する. それを, 離散行列オイラーのコマと定義する. これについても, Lax 表現がある. F_1^n, F_2^n, F_3^n を, 3 つの行列に値を持つ整数 n の meromorphic functions とする. 次のような特殊化を考える,

$$
T_1^n = \begin{bmatrix} 0 & F_1^n \\ F_1^n & 0 \end{bmatrix},\; T_2^n = \begin{bmatrix} 0 & -F_2^n \\ F_2^n & 0 \end{bmatrix}, \qquad (15)
$$

$$
T_3^n = \begin{bmatrix} F_3^n & 0 \\ 0 & -F_3^n \end{bmatrix}, \qquad (16)
$$

ここで, δ は差分間隔であり, さらに,

$$
F_1^n = F_1(n\delta),\; F_2^n = F_2(n\delta),\; F_3^n = F_3(n\delta), \qquad (17)
$$

と定義する. すると, 離散行列オイラーのコマは, 次のように定義される,

$$
\frac{F_1^{n+1} - F_1^n}{\delta} \;=\; F_2^{n+1}F_3^n + F_3^{n+1}F_2^n, \qquad (18)
$$

$$
\frac{F_2^{n+1} - F_2^n}{\delta} \;=\; -(F_3^{n+1}F_1^n + F_1^{n+1}F_3^n), \qquad (19)
$$

$$
\frac{F_3^{n+1} - F_3^n}{\delta} \;=\; F_1^{n+1}F_2^n + F_2^{n+1}F_1^n, \qquad (20)
$$

これは, [1] で提案された離散オイラーのコマの行列版である. 式 (10) と (11) から, 離散行列オイラーのコマを得ることもできる.

5. 離散オイラーのコマの 2 種類の Lax 対

離散オイラーのコマの Lax 対について, 計算機代数を用いて導出された Lax 対 [2] と四元数の観点から導入された Lax 対 [3] を簡単に述べる.

5.1 計算機代数を用いて導出された離散オイラーのコマの Lax 対 [2]

α_1, α_2, α_3 をパラメータ, z_1^n, z_2^n, z_3^n を n に依存する変

数とする. A^n と B^n を次のように定義すると,

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & z_1^n & z_2^n & z_3^n \\ -z_1^n & 0 & z_3^n & -z_2^n \\ -z_2^n & -z_3^n & 0 & z_1^n \\ -z_3^n & z_2^n & -z_1^n & 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 z_1^n & \alpha_2 z_2^n & \alpha_3 z_3^n \\ -\alpha_1 z_1^n & 1 & \alpha_3 z_3^n & -\alpha_2 z_2^n \\ -\alpha_2 z_2^n & -\alpha_3 z_3^n & 1 & \alpha_1 z_1^n \\ -\alpha_3 z_3^n & \alpha_2 z_2^n & -\alpha_1 z_1^n & 1 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$A^{n+1}B^n = B^{n+1}A^n, \tag{23}$$

より, 離散オイラーのコマを得ることができる,

$$z_1^{n+1} - z_1^n = (\alpha_3 - \alpha_2)(z_2^{n+1}z_3^n + z_2^n z_3^{n+1}), \tag{24}$$
$$z_2^{n+1} - z_2^n = (\alpha_1 - \alpha_3)(z_3^{n+1}z_1^n + z_3^n z_1^{n+1}), \tag{25}$$
$$z_3^{n+1} - z_3^n = (\alpha_2 - \alpha_1)(z_1^{n+1}z_2^n + z_1^n z_2^{n+1}). \tag{26}$$

論文 [1] に従って, 離散オイラーのコマを定義する,

$$\omega_1^{n+1} - \omega_1^n = \delta_1(\omega_2^{n+1}\omega_3^n + \omega_2^n\omega_3^{n+1}), \tag{27}$$
$$\omega_2^{n+1} - \omega_2^n = \delta_2(\omega_3^{n+1}\omega_1^n + \omega_3^n\omega_1^{n+1}), \tag{28}$$
$$\omega_3^{n+1} - \omega_3^n = \delta_3(\omega_1^{n+1}\omega_2^n + \omega_1^n\omega_2^{n+1}). \tag{29}$$

もし,

$$z_1^n = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\delta_1}}\omega_1^n,\ z_2^n = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\delta_2}}\omega_2^n,\ z_3^n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\delta_3}}\omega_3^n, \tag{30}$$
$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_2}\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{2}},\ \alpha_2 = \frac{-\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_2}\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{2}},\ \alpha_3 = 0, \tag{31}$$

とするならば, 式 (24)-(26) を, 式 (27)-(29) に変換できる.

5.2 四元数の観点から導入された Lax 対 [3]

β_1, β_2, β_3 をパラメータ, y_1^n, y_2^n, y_3^n を n に依存する変数とする. A^n と B^n を次のように定義すると,

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & y_1^n & y_2^n & y_3^n \\ -y_1^n & 0 & -y_3^n & y_2^n \\ -y_2^n & y_3^n & 0 & -y_1^n \\ -y_3^n & -y_2^n & y_1^n & 0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 y_1^n & \beta_2 y_2^n & \beta_3 y_3^n \\ -\beta_1 y_1^n & 1 & -\beta_3 y_3^n & \beta_2 y_2^n \\ -\beta_2 y_2^n & \beta_3 y_3^n & 1 & -\beta_1 y_1^n \\ -\beta_3 y_3^n & -\beta_2 y_2^n & \beta_1 y_1^n & 1 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

式 (23) より, 離散オイラーのコマを得ることができる,

$$y_1^{n+1} - y_1^n = (\beta_2 - \beta_3)(y_2^{n+1}y_3^n + y_2^n y_3^{n+1}), \tag{34}$$
$$y_2^{n+1} - y_2^n = (\beta_3 - \beta_1)(y_3^{n+1}y_1^n + y_3^n y_1^{n+1}), \tag{35}$$
$$y_3^{n+1} - y_3^n = (\beta_1 - \beta_2)(y_1^{n+1}y_2^n + y_1^n y_2^{n+1}), \tag{36}$$

もし, β_1,β_2,β_3,y_1^0, y_2^0, y_3^0 を実数に制限するならば, A^n と B^n は次のように書ける,

$$A^n = ((y_1^n)\mathbf{i} + (y_2^n)\mathbf{j} + (y_3^n)\mathbf{k}), \tag{37}$$
$$B^n = (1 + (\beta_1 y_1^n)\mathbf{i} + (\beta_2 y_2^n)\mathbf{j} + (\beta_3 y_3^n)\mathbf{k}), \tag{38}$$

ここで, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は, 四元数の fundamental units である.

もし,

$$y_1^n = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\delta_1}}\omega_1^n,\ y_2^n = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\delta_2}}\omega_2^n,\ y_3^n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\delta_3}}\omega_3^n, \tag{39}$$
$$\beta_1 = \frac{-\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_2}\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{2}},\ \beta_2 = \frac{\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_2}\sqrt{\delta_3}}{\sqrt{2}},\ \beta_3 = 0, \tag{40}$$

とするならば, 式 (34)-(36) を, 式 (27)-(29) に変換できる.

6. 離散オイラーのコマの既出の 2 種類の Lax 対とは異なる Lax 対

加えて, 論文 [2], [3] の Lax 対とは異なる Lax 対を提案する. x_1^n, x_2^n, x_3^n を, n に依存するスカラーの変数とする. もし,

$$F_1^n = x_1^n = x_1(n\delta),\ F_2^n = x_2^n = x_2(n\delta),$$
$$F_3^n = x_3^n = x_3(n\delta), \tag{41}$$

ここで, δ は差分間隔であり,

$$A^n(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & x_1^n & 0 & x_2^n \\ x_1^n & 0 & -x_2^n & 0 \\ 0 & -x_2^n & 0 & x_1^n \\ x_2^n & 0 & x_1^n & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2x_3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_3^n \\ -2x_3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3^n & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^2 \begin{bmatrix} 0 & x_1^n & 0 & -x_2^n \\ x_1^n & 0 & x_2^n & 0 \\ 0 & x_2^n & 0 & x_1^n \\ -x_2^n & 0 & x_1^n & 0 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

$$B^n(\mu) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \delta x_3^n & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\delta x_3^n \\ -\delta x_3^n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \delta x_3^n & 0 & -1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & \delta x_1^n & 0 & -\delta x_2^n \\ \delta x_1^n & 0 & \delta x_2^n & 0 \\ 0 & \delta x_2^n & 0 & \delta x_1^n \\ -\delta x_2^n & 0 & \delta x_1^n & 0 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

とするならば, 式 (9) より, 離散オイラーのコマを得ることができる,

$$\frac{x_1^{n+1}-x_1^n}{\delta} = x_2^{n+1}x_3^n + x_3^{n+1}x_2^n, \tag{44}$$
$$\frac{x_2^{n+1}-x_2^n}{\delta} = -(x_3^{n+1}x_1^n + x_1^{n+1}x_3^n), \tag{45}$$
$$\frac{x_3^{n+1}-x_3^n}{\delta} = x_1^{n+1}x_2^n + x_2^{n+1}x_1^n. \tag{46}$$

7. 離散オイラーのコマの保存量

これ以降, $\delta = 1$ と定義する. 式 (14) の $H_0(0)$ と $H_3(1)$ から, 離散オイラーのコマの保存量を得る. $H_0(0)$ と $H_3(1)$ は, [1] で述べた保存量と同値であることが, 次のようにわかる. もし,

$$x_1^n = \mathrm{i}\sqrt{\delta_2}\sqrt{\delta_3}\omega_1^n,\ x_2^n = \sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}\omega_2^n, \tag{47}$$
$$x_3^n = \mathrm{i}\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_2}\omega_3^n, \tag{48}$$

とすると, 式 (44)-(46) は式 (27)-(29) に変換できる. さらに, 式 (47)-(48) を使って, 式 (44)-(46) の $H_0(0)$ と $H_3(1)$

$$H_0(0) = \left(\frac{(x_1^n)^2+(x_2^n)^2}{(x_3^n)^2+1}\right)^2, \tag{49}$$
$$H_3(1) = \frac{8(x_1^n+x_3^n)(x_1^n-x_3^n)}{-(x_1^n)^2-(x_2^n)^2+(x_3^n)^2+1}, \tag{50}$$

から, 式 (27)-(29) の二つの保存量 $H_0'(0)$ と $H_3'(1)$ を得る,

$$H_0'(0) = \delta_3^2\left(\frac{\delta_1(\omega_2^n)^2-\delta_2(\omega_1^n)^2}{\delta_1\delta_2(\omega_3^n)^2-1}\right)^2, \tag{51}$$
$$H_3'(1) = \frac{8\delta_2(\delta_1(\omega_3^n)^2-\delta_3(\omega_1^n)^2)}{\delta_2\delta_3(\omega_1^n)^2-\delta_1\delta_3(\omega_2^n)^2-\delta_1\delta_2(\omega_3^n)^2+1}. \tag{52}$$

ゆえに, $H_0'(0) = \delta_3^2 G_1^2,\ H_3'(1) = 8\delta_2 G_2$ より, G_1 と G_2

$$G_1 = \frac{\delta_1(\omega_2^n)^2-\delta_2(\omega_1^n)^2}{1-\delta_1\delta_2(\omega_3^n)^2}, \tag{53}$$
$$G_2 = \frac{\delta_1(\omega_3^n)^2-\delta_3(\omega_1^n)^2}{\delta_2\delta_3(\omega_1^n)^2-\delta_1\delta_3(\omega_2^n)^2-\delta_1\delta_2(\omega_3^n)^2+1}, \tag{54}$$

は, 保存量である, [1] では, 3 つの保存量を得ている,

$$G_3 = \frac{\delta_1(\omega_2^n)^2-\delta_2(\omega_1^n)^2}{1-\delta_1\delta_2(\omega_3^n)^2}, \tag{55}$$
$$G_4 = \frac{\delta_2(\omega_3^n)^2-\delta_3(\omega_2^n)^2}{1-\delta_2\delta_3(\omega_1^n)^2}, \tag{56}$$
$$G_5 = \frac{\delta_3(\omega_1^n)^2-\delta_1(\omega_3^n)^2}{1-\delta_3\delta_1(\omega_2^n)^2}, \tag{57}$$

ここで, $G_1 = G_3$ であることを注意する. もし, J_1, J_2, J_3 を次のように定義するならば,

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_1}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_1}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_2}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_2}{\partial\omega_3^n} \end{bmatrix}, \tag{58}$$
$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_3}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_3}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_4}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_5}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_5}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_5}{\partial\omega_3^n} \end{bmatrix}, \tag{59}$$
$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_3}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_3}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_4}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_3^n} \end{bmatrix}, \tag{60}$$

J_1, J_2, J_3 のランクは, それぞれ 2,2,2 である. 加えて,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_1}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_1}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_2}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_2}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_4}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_3^n} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_3}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_3}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_4}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_4}{\partial\omega_3^n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial\omega_1^n} & \frac{\partial G_2}{\partial\omega_2^n} & \frac{\partial G_2}{\partial\omega_3^n} \end{vmatrix} = 0, \tag{61}$$

を得る. 以上より, $H_0(0)$ と $H_3(1)$ は, [1] で得られた G_3,G_4,G_5 の保存量に同値である.

8. まとめ

本論文では, Kamata と Nakamula の q-アナログの方程式とは異なった離散 Nahm 方程式を提案した. 我々の Nahm 方程式の離散アナログは, 通常差分方程式であり, Lax 表現を有する. 離散 Nahm 方程式からの簡約として, [1] で導入された離散オイラーのコマを, 離散行列離散オイラーのコマに拡張した. 加えて, 離散オイラーのコマの Lax 対について, 計算機代数を用いて導出された Lax 対 [2] と四元数の観点から導入された Lax 対 [3] の両方と異なる別の Lax 対を得ることができた.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 17H02858 の助成を受けている.

参考文献

[1] Ryogo Hirota and Kinji Kimura, Discretization of the Euler top, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 69, No. 3, 627-630, (2000).
[2] Kinji Kimura, A Lax pair of the discrete Euler top, J. Phys. A: Math. Theor. No. 50 (2017) 245203.
[3] Kinji Kimura, A Lax pair of the discrete Euler top in terms of quaternions, https://arxiv.org/abs/1611.02271, (2016).
[4] Masaru Kamata and Atsushi Nakamula, Aspects of q-discretized Nahm equations, Mathematics and Computers in Simulation 80, 674-681, (2009).
[5] W.Nahm, in Monopoles in quantum field theory, eds. N.S.Craigie, P.Goddard and W.Nahm, World Scientific, (1982).
[6] Yu.B. Suris, Generalized Toda chains in discrete time. Leningrad Math. J., vol. 2, 339-352, (1991).
[7] Yu.B. Suris, The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach. Progress in Mathematics, Vol. 219. Basel: Birkhauser, chapter 21, (2003).
[8] Alexei Zhedanov, Regular algebras of dimension 2, the generalized eigenvalue problem and Padé interpolation, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Vol. 12, Supplement 2, 333-356, (2005).