

パスカルの三角形とフィボナッチ的数列を作り出す カードゲームに関する研究

北川 将¹ 鈴木 翔大¹ 戸國 友貴² 福井 昌則^{3,a)} 宮寺 良平^{1,b)}

概要：箱に白色のカードと赤色のカードがあり、複数のプレイヤーが箱からカードを交互にカードを取り出し、一定のルールに従って、一人の敗者を決める。これは、ロシアンルーレットのゲームと数学的に同値なものである。ルールとして例えば、初めて赤のカードを引いた人が負けるゲーム、赤のカードを2枚引いた人が負けるゲームなどを考える。このようなゲームにおいて、ある順番の人が負けるような組み合わせの数を三角形の形に並べると、パスカルの三角形に似た性質を満たす。また、この三角形の数字を斜めに足すことで、フィボナッチ数列に似た数列を作り出すことができることがわかった。

キーワード：ロシアンルーレット フィボナッチ数列 パスカルの三角形

1. 序論

[1]において、筆者の一人は、定義1.1のゲームにおいて、 $s=1$ のときにおける様々な結果に関する確率を用いて、パスカルの三角形(パスカルの三角形に似た三角形)が生成されることを示した。また、パスカルの三角形からどのようにしてフィボナッチ的数列(フィボナッチ数列に似た数列)を生成するかについて示し、フィボナッチ的数列とフィボナッチ数列との関係の存在について示した。フィボナッチ的数列については、[1]と[2]を参照されたい。本稿では、[1]の結果を一般化し、定義1.1のゲームと、それを一般化したゲームからパスカルの三角形が得られること、そして、パスカルの三角形からフィボナッチ的数列が得られることを示す。次の定義1.1は、 $s=1$ のときは[1]における定義1と同じである。

定義 1.1. p, n, m, s を $m \leq n$ を満たす正の整数とする。円形のテーブルの周りに p 人のプレイヤー $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ を配置し、プレイヤー θ_1 からゲームを開始する。そして順に、同じ大きさの n 枚のカードを含む箱を渡していく。 m 枚の赤いカードを除き、残りは全て白のカードである。プレイヤーは箱を受け取ったら、 s 回カードを無作為に取り、取ったカードは箱に戻さない。したがって、箱の中のカードの数は減少していく。ただし、箱の中を見ることはできない

とする。この方法で、プレイヤー θ_1 が最初にカードを引き、第 s ラウンドまでカードを引く。そして、プレイヤー θ_2 が第 $s+1$ ラウンドでカードを引き、第 $2s$ ラウンドまでカードを引く。最初に赤のカードを引いたプレイヤーが負けであり、そこでゲームは終了する。

元々、筆者らは、ロシアンルーレットのゲームを研究していたが、ロシアンルーレットのゲームは研究に適切ではないと考える人もいるため、筆者らは数学的に同じゲームである定義1.1のゲームを作成した。

定義 1.2. 定義1.1のゲームにおいて v 番目のプレイヤーが負ける確率を $f(p, n, m, s, v)$ とする。

例 1.1. [1]において、集合 $\{f(p, n, m, s, v) : m \leq n, n = 1, 2, \dots\}$ は、正の整数 p, v と $s = 1$ に対してパスカルの三角形と似たパターンを有することが示されている。例として、 $\{f(4, n, m, 1, 1), 1 \leq m \leq n, n = 1, 2, \dots, 6, 7\}$ から作られるパスカルの三角形を図1に示す。見て明らかのように、図1は美しい特徴を有する。例えば、図1によれば、 $f(4, 6, 2, 1, 1) = \frac{6}{15}, f(4, 6, 3, 1, 1) = \frac{10}{20}, f(4, 7, 3, 1, 1) = \frac{16}{35}, 6 + 10 = 16, 16 + 20 = 35$ であり、分子と分母でパスカルの三角形が作られる。図2の数字は、図1にある分数の分子である。

例 1.2. パスカルの三角形の対角線上の数を足していくと、フィボナッチ数列になり、なり、図2の三角形の対角線上の数を足していくと、フィボナッチ的数列になることなることはよく知られている。このようにして作られた数列を b_n とする。そのとき、 $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1 + 1 = 2, b_4 = 1 + 2 = 3, b_5 = 2 + 3 + 1 = 6, b_6 = 2 + 4 + 3 = 9, b_7 =$

¹ 関西学院高等部

² 関西学院大学

³ 兵庫教育大学

a) m16195c@hyogo-u.ac.jp

b) runners@kwansei.ac.jp

$\frac{1}{1}$	1
$\frac{1}{2}, \frac{1}{1}$	1, 1
$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$	1, 2, 1
$\frac{1}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$	1, 3, 3, 1
$\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$	2, 4, 6, 4, 1
$\frac{2}{6}, \frac{6}{15}, \frac{10}{20}, \frac{10}{15}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$	2, 6, 10, 10, 5, 1
$\frac{2}{7}, \frac{8}{21}, \frac{16}{35}, \frac{20}{35}, \frac{15}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$	2, 8, 16, 20, 15, 6, 1

図 1 パスカルの三角形 図 2 図 1 の分子を取り出したもの

$2 + 6 + 6 + 1 = 15, \dots$ となる. この数列のルールは以下の
ような簡単な式で示される.

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + \begin{cases} 1 & (n \equiv 1 \pmod{4}) \\ 0 & (n \not\equiv 1 \pmod{4}). \end{cases} \quad (1)$$

定理 1.1. 数列 b_n は, 次の等式を満たす. ここで $F(n)$ は
フィボナッチ数列を表す.

$$b_{4n} = F(2n)F(2n+2) = F(2n+1)^2 - 1 \quad (2)$$

$$b_{4n+1} = F(2n+1)F(2n+2) \quad (3)$$

$$b_{4n+2} = F(2n+2)^2 \quad (4)$$

$$b_{4n+3} = F(2n+2)F(2n+3). \quad (5)$$

この定理の証明については, [2] を参照されたい.

2. パスカルの三角形を生成する一般化された ゲーム

本節では, 第 1 節で提示された [1] と [2] の結果を一般化
する. なお, カードゲームであっても, ロシアンルーレット
を考えるときのデータ構造を用いることで, 計算を明快
なものにすることができる. ロシアンルーレットでは, シ
リンダーの中に実弾を配置しておいて, 最初の弾倉から
順に引き金を引くことになる. カードゲームの場合でも,
カードがある順で並んでいて, 端から取り出されると考
えて計算する. なお, プレイヤーはカードがどのように並
んでいるかは知らないとする.

定義 2.1. 第 y ラウンドでゲームが終わるとき (ここで第 y
ラウンドとは, y 枚目のカードが取り出される時のこと),
赤いカードを白いカードの組み合わせの数を $R(n, m, y)$ と
する. ただし, $R(n, m, y)$ は, プレイヤの数 p と, プレイヤ
が自分のターンでカードを引く回数 s とは無関係である.

例 2.1. 例として $R(6, 3, 3)$ を計算する. 2 人のプレイヤ
が, $n = 6, m = 3, s = 1$ の条件で定義 1.1 のゲームを行
うとする. もし赤い数字のカードが第 3 ラウンドにあり,
他の 2 つの赤いカードが 4, 5, 6 の場所にある場合, 第 3 ラ
ウンドでゲームは終了する. この配置の場合, 赤い数字の
カードを引く方法は, ${}_3C_2$ 通りである. よって, $R(6, 3, 3)$

$= {}_3C_2$ となる.

補題 2.1. $m \leq n, y \leq n - m + 1$ を満たす自然数 n, m, y
に対し, $R(n, m, y) = {}_{n-y}C_{m-1}$ である.

証明. 赤いカードが y の場所にあり, 他の $m - 1$ 枚の赤い
数のカードが第 $y + 1, \dots, n$ の場所にあるとき, ゲームは第 y
ラウンドで終了する. この配置の場合, 赤い数字のカード
を引く方法は, ${}_{n-y}C_{m-1}$ 通りである. よって, ${}_{n-y}C_{m-1}$
は第 y ラウンドでゲームが終わる場合の数である. \square

定義 2.2. 定義 1.1 のゲームにおいて, v 番目のプレイヤ
が負けるカード組み合わせの数を $U(p, n, m, s, v)$ とする.

定理 2.1.

$$U(p, n, m, s, v) = \sum_{h=1}^s \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+1-s(v-1)+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n-(i-1)ps-s(v-1)-h}C_{m-1}) \right). \quad (6)$$

証明. $1 \leq h \leq s$ を満たす自然数 h に対し, もし
 $n - (i - 1)ps - s(v - 1) - h \geq m - 1$, すなわち $i \leq$
 $\lfloor \frac{n-m-h+1-s(v-1)+ps}{ps} \rfloor$ であるならば, 第 $((i - 1)ps + s(v -$
 $1) + h)$ ラウンドで v 番目のプレイヤが負ける. \square

補題 2.2. 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $1 \leq u \leq s$ を満たす全ての整数 u と非負整数 t に対し,
 $U(p, tps + u, 1, s, 1) = ts + u$.

(ii) $s < u \leq ps$ を満たす全ての整数 u と非負整数 t 対
し, $U(p, tps + u, 1, s, 1) = ts + s$.

証明. $1 \leq u \leq s$ を満たす u に対し, 定理 2.1 より,

$$\begin{aligned} U(p, tps + u, 1, s, 1) &= \sum_{h=1}^s \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{tps+u-h+ps}{ps} \rfloor} ({}_{tps+u-(i-1)ps-h}C_0) \right) \\ &= \sum_{h=1}^s \left\lfloor \frac{tps + u - h + ps}{ps} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (7)$$

(i) もし $1 \leq u \leq s$ ならば, (7) は $\sum_{h=1}^u (t + 1) + \sum_{h=u+1}^s t$
 $= st + u$.

(ii) もし $s < u \leq ps$ ならば, (7) は $\sum_{h=1}^s (t + 1) = st + s$. \square

補題 2.3. 全ての整数 u に対し, $U(p, u, u, s, 1) = 1$.

証明. 定理 2.1 より,

$$\begin{aligned} U(p, u, u, s, 1) &= \sum_{h=1}^s \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{-h+1+ps}{ps} \rfloor} ({}_{u-(i-1)ps-h}C_{u-1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{ps}{ps} \rfloor} ({}_{u-(i-1)ps-1}C_{u-1}) \\ &= {}_{u-1}C_{u-1} = 1. \end{aligned}$$

□

ここで、定義 1.1 のゲームを一般化することで、そこで次の定義 2.3 のゲームを得る。

定義 2.3. p, n, m を $m \leq n$ を満たす正の整数とする。 p 人のプレイヤー $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$ がいる。 n 枚のカードのうちで、 m 枚の赤いカードを除き、残りは全て白のカードである。プレイヤー Θ_1 が、第 $\theta_{1,1}$ ラウンド、第 $\theta_{1,2}$ ラウンド、第 $\theta_{1,3}$ ラウンド、..., 第 θ_{1,s_1} ラウンドでカードを引く。ここで、 $\theta_{1,1} < \theta_{1,2} < \theta_{1,3}, \dots, < \theta_{1,s_1}$ である。次に、プレイヤー Θ_2 が、第 $\theta_{2,1}$ ラウンド、第 $\theta_{2,2}$ ラウンド、第 $\theta_{2,3}$ ラウンド、..., 第 θ_{2,s_2} ラウンドでカードを引く。ここで、 $\theta_{2,1} < \theta_{2,2} < \theta_{2,3}, \dots, < \theta_{2,s_2}$ である。最後に、プレイヤー Θ_p が、第 $\theta_{p,1}$ ラウンド、第 $\theta_{p,2}$ ラウンド、第 $\theta_{p,3}$ ラウンド、..., 第 θ_{p,s_p} ラウンドでカードを引く。ここで、 $\theta_{p,1} < \theta_{p,2} < \theta_{p,3}, \dots, < \theta_{p,s_p}$ である。そして、最初に赤のカードを引いたプレイヤーが負けであり、そこでゲームは終了する。ここで、 $v \neq w$ を満たす全ての自然数 v, w に対し、 $\bigcup_{u=1}^p \{\theta_{v,u}, u = 1, 2, \dots, s_v\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ かつ $\{\theta_{v,u}, u = 1, 2, \dots, s_v\} \cap \{\theta_{w,u'}, u' = 1, 2, \dots, s_w\} = \emptyset$ と仮定する。この条件は、各ラウンドでちょうど一人のプレイヤーがプレーするというを数学的に表現している。

例 2.2. 定義 1.1 のゲームは、定義 2.3 のゲームの特別な場合である。定義 1.1 のゲームで $p = 2, n = 6, s = 2$ とおく。そのとき Θ_1 と Θ_2 の 2 人のプレイヤーがいる。プレイヤー Θ_1 は第 $\theta_{1,1} = 1$ ラウンド、第 $\theta_{1,2} = 2$ ラウンド、第 $\theta_{1,3} = 5$ ラウンド、第 $\theta_{1,4} = 6$ ラウンドでプレイし、プレイヤー Θ_2 は第 $\theta_{2,1} = 3$ ラウンド、第 $\theta_{2,2} = 4$ ラウンドでプレイする。

定義 2.4. 定義 2.3 のゲームにおいて、プレイヤー Θ_v が負けるカード組み合わせの数を $U_g(p, n, m, v)$ とする。定義 2.3 においては、変数 s を使っていないので、 $U_g(p, n, m, v)$ は変数 s を持たない。

定義 2.4 は、定義 2.2 を一般化したものである。

定理 2.2.

$$\begin{aligned} U_g(p, n, m, v) &= \sum_{i=1}^{\max\{i:\theta_{v,i} \leq n-m+1\}} R(n, m, \theta_{v,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{\max\{\theta_{v,i} \leq n-m+1\}} n - \theta_{v,i} C_{m-1}. \end{aligned}$$

証明. プレイヤ Θ_v は、もし $n - \theta_{v,i} \geq m - 1$ ならば、第 $\theta_{v,i}$ ラウンドで負ける。 □

定理 2.3. $n \leq m$ と $v \leq s$ を満たす自然数 p, n, m, s, v に対し、 $U_g(p, n, m, v) = U_g(p, n-1, m, v) + U_g(p, n-1, m-1, v)$ 。

証明.

$$U_g(p, n, m, v) = \sum_{i=1}^{\max\{i:\theta_{v,i} \leq n-m+1\}} R(n, m, \theta_{v,i}), \quad (8)$$

$$U_g(p, n-1, m, v) = \sum_{i=1}^{\max\{i:\theta_{v,i} \leq n-m\}} R(n-1, m, \theta_{v,i}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} U_g(p, n-1, m-1, v) &= \sum_{i=1}^{\max\{i:\theta_{v,i} \leq n-m+1\}} R(n-1, m-1, \theta_{v,i}). \quad (10) \end{aligned}$$

$i_M = \max\{i : \theta_{v,i} \leq n - m + 1\}$ とおく。ここで以下の 2 つの場合がある。

(i) もし、 $\theta_{v,i_M} = n - m + 1$ ならば、 $i_M - 1 = \max\{i : \theta_{v,i} \leq n - m\}$ 。補題 2.1 から、 $i = 1, 2, \dots, i_M - 1$ に対し、

$$\begin{aligned} R(n, m, \theta_{v,i}) &= n - \theta_{v,i} C_{m-1} \\ &= n - \theta_{v,i-1} C_{m-1} + n - \theta_{v,i-1} C_{m-2} \\ &= R(n-1, m, \theta_{v,i}) + R(n-1, m-1, \theta_{v,i}). \quad (11) \end{aligned}$$

$n - \theta_{v,i_M} = m - 1$ と $n - \theta_{v,i_M} - 1 = m - 2$ から、

$$\begin{aligned} R(n, m, \theta_{v,i_M}) &= n - \theta_{v,i_M} C_{m-1} = 1 \\ &= n - \theta_{v,i_M-1} C_{m-2} = R(n-1, m-1, \theta_{v,i_M}). \quad (12) \end{aligned}$$

(8), (9), (10), (11), (12) より、 $U_g(p, n, m, v) = U_g(p, n-1, m, v) + U_g(p, n-1, m-1, v)$ 。

(ii) $\theta_{v,i_M} < n - m + 1$ と仮定する。 $i_M = \max\{i : \theta_{v,i} \leq n - m\}$ から、 $i = 1, 2, \dots, i_M$ に対し、

$$\begin{aligned} R(n, m, \theta_{v,i}) &= n - \theta_{v,i} C_{m-1} \\ &= n - \theta_{v,i-1} C_{m-1} + n - \theta_{v,i-1} C_{m-2} \\ &= R(n-1, m, \theta_{v,i}) + R(n-1, m-1, \theta_{v,i}). \quad (13) \end{aligned}$$

(2), (3), (10), (13) から、 $U_g(p, n, m, v) = U_g(p, n-1, m, v) + U_g(p, n-1, m-1, v)$ 。 □

注意 2.1. $U(p, n, m, s, v)$ は $U_g(p, n, m, v)$ の特別な場合であり、定理 2.3 より $U(p, n, m, s, v) = U(p, n-1, m, s, v) + U(p, n-1, m-1, s, v)$ となる。

3. パスカルの三角形から生成されるフィボナッチ的数列

本節では、例 1.2 で紹介した数列を一般化して、定義 3.1 で $B_{p,s}(n), n = 1, 2, 3, \dots$ を定義する。

定義 3.1. $B_{p,s}(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} U(p, n-k, k+1, s, 1)$ とする。

定理 3.1.

$$B_{p,s}(n) = B_{p,s}(n-1) + B_{p,s}(n-2) + \begin{cases} 1 & (1 \leq n \leq s \pmod{ps}) \\ 0 & (n=0 \text{ または } n \geq s+1 \pmod{ps}). \end{cases} \quad (14)$$

証明. $0 \leq h < ps$ を満たす非負整数 t, h に対し, $n = tps+h$ とおく.

$$B_{p,s}(tps+h) = U(p, tps+h, 1, s, 1) + U(p, tps+h-1, 2, s, 1) + \dots + U(p, tps+h-t_1, t_1+1), \quad (15)$$

$$B_{p,s}(tps+h-1) = U(p, tps+h-1, 1, s, 1) + U(p, tps+h-2, 2, s, 1) + \dots + U(p, tps+h-1-t_2, t_2+1), \quad (16)$$

$$B_{p,s}(tps+h-2) = U(p, tps+h-2, 1, s, 1) + U(p, tps+h-3, 2, s, 1) + \dots + U(p, tps+h-2-t_3, t_3+1), \quad (17)$$

$$\text{ここで, } t_1 = \lfloor \frac{tps+h-1}{2} \rfloor, t_2 = \lfloor \frac{tps+h-2}{2} \rfloor, t_3 = \lfloor \frac{tps+h-3}{2} \rfloor, \quad (18)$$

(i) $tps+h$ を偶数と仮定する. そのとき $t_1 = t_2 = t_3 + 1$ 定理 2.3 および注意 2.1 より, $k = 1, 2, \dots, t_1$ に対し, $U(p, tps+h-k, k+1, s, 1) = U(p, tps+h-1-k, k+1, s, 1) + U(p, tps+h-1-k, k, s, 1)$, 式 (15) の 2 番目, 3 番目, ..., t_1+1 番目の項の合計は, 式 (16) の 2 番目, 3 番目, ..., t_1+1 番目の項, 式 (17) の 1 番目, 2 番目, ..., t_1 番目の項の合計と等しい. よって, (15) と (16) の第一項目を比較するだけでよい. (15) の第一項目は $U(p, tps+h, 1, s, 1)$, (16) の第一項目は $U(p, tps+h-1, 1, s, v)$. よって, 補題 2.2 から,

$$B_{p,s}(n) - (B_{p,s}(n-1) + B_{p,s}(n-2)) = U(p, tps+h, 1, s, 1) - U(p, tps+h-1, 1, s, 1). \quad (19)$$

もし $1 \leq n \leq s \pmod{ps}$ ならば, (19) は $ts+h-(ts+h-1) = 1$.

もし $n=0$ もしくは $n \geq s+1 \pmod{ps}$ ならば, (19) は $ts+s-(ts+s) = 0$. よって, 定理は証明された.

(ii) 次に $tps+h$ を奇数と仮定する. そのとき $t_1 = t_2 + 1 = t_3 + 1$ となる. 定理 2.3 より, $k = 1, 2, \dots, t_2$ に対し, $U(p, n-k, k+1, v) = U(p, n-1-k, k+1, v) + U(p, n-1-k, k, v)$. 式 (15) の 2 番目, 3 番目, ..., t_2+1 番目の項の合計は, 式 (16) の 2 番目, 3 番目, ..., t_2+1 番目の項, 式 (17) の 1 番目, 2 番目, ..., t_3 番目の項の合計と等しい. よって, (15) の第一項目と第 $t_1+1 = t_2+2$ 項目, (16) の第一

項目および (17) の第 t_3+1 項目を比較するだけでよい. $tps+h$ が奇数であることから, $t_1 = \lfloor \frac{tps+h-1}{2} \rfloor = \frac{tps+h-1}{2}$ かつ $t_3 = \lfloor \frac{tps+h-3}{2} \rfloor = \frac{tps+h-3}{2}$. よって, 補題 2.3 により, $tps+h-t_1 = t_1+1$ かつ $tps+h-2-t_3 = t_3+1$.

$$U(p, tps+h-t_1, t_1+1) = U(p, tps+h-2-t_3, t_3+1). \quad (20)$$

よって, 補題 2.2 より, $B_{p,s}(n) - (B_{p,s}(n-1) + B_{p,s}(n-2)) = U(p, tps+h, 1, s, 1) - U(p, tps+h-1, 1, s, 1)$, そして, (i) と同様の方法を用いることで, 証明を行うことができる. \square

以下に, 数列 $B_{p,v}(n)$ とフィボナッチ数列 $F(n)$ の関係性を示す.

(1) $F(n)$ is $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\}$.

(2) $B_{2,1}(n)$ is $\{1, 1, 3, 4, 8, 12, 21, 33, 55, 88, 144, 232, 377, 609, 987\}$.

(3) $B_{3,1}(n)$ is $\{1, 1, 2, 4, 6, 10, 17, 27, 44, 72, 116, 188, 305, 493, 798\}$.

(4) $B_{4,1}(n)$ is $\{1, 1, 2, 3, 6, 9, 15, 24, 40, 64, 104, 168, 273, 441, 714\}$.

$B_{2,1}(n), B_{3,1}(n)$, そしてフィボナッチ数列 $F(n)$ の関係はよく知られている.

$B_{2,1}(n) = F(n+1) - \frac{(1+(-1)^n)}{2}$. この性質については, [3] の A004695 を参照されたい.

$B_{3,1}(n) = \lfloor (\frac{F(n+2)}{2}) \rfloor$. この性質については, [3] の A052952 を参照されたい.

$B_{2,2}(n) = \lfloor ((1+\sqrt{5})/2)^{n+3} / 5 \rfloor$. この性質については, [3] の A097083 を参照されたい. なお, $B_{2,2}(n) + (1+i)^n + (-1)^n + (-i)^n / 4 = B_{4,1}(n+1)$ が成り立つようである.

4. 2回赤のカードを引くと負けるケース

これまでの議論をさらに拡張して, 赤のカードを複数引いたプレイヤーが負けるというゲームを考える. しかし, 議論が複雑になるので, プレイヤーの数を 2 名にして, 赤のカードを 2 枚引くと負けるという問題に限定する.

定義 4.1. カードが n 枚あり, その中に m 枚の赤のカードと $n-m$ 枚の白のカードがある. A と B の 2 人のプレイヤーがゲームに参加し, A から始め, A と B が交互にカードを引く. 同じプレイヤーが 2 回赤のカードを引くと, そのプレイヤーが負けて, ゲームは終了する. このとき, A が負ける場合の数を $U_2(n, m)$ と書く.

補題 4.1. $k = \frac{n-m+1}{2}$ を満たす自然数 k に対して, $n-2k-1 C_{m-2} = n-2k C_{m-1} = 1$ となる.

証明. $n-2k-1 C_{m-2} = m-2 C_{m-2} = 1$.

かつ $n-2k C_{m-1} =_{m-1} C_{m-1} = 1$. □

定理 4.1. $U_2(n, m)$
 $= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3})$.
 したがって、A が負けとなる確率は $F(n, m) = \frac{U_2(n, m)}{{}_n C_m}$ と
 なる。

証明. A が負ける場合は、次の2つの場合がある。
 (i) A が2枚目の赤のカードを引くまでに、B が1枚も赤のカードを引かない場合、 $2k+1$ 番目に、A が2枚目の赤のカードを引くとする。これまでに、A は、1, 3, ..., $2k-1$ 回目のどこかで1回赤を引くので、それは ${}_k C_1 = k$ 通りある。 $2k+1$ 回目以降の引く回数は、 $n - (2k+1) = n - 2k - 1$ 回あり、残りの赤のカードは $m - 2$ 枚あるので、この組み合わせは、 ${}_{n-2k-1}C_{m-2}$ 通りとなる。次に k の範囲を決める。

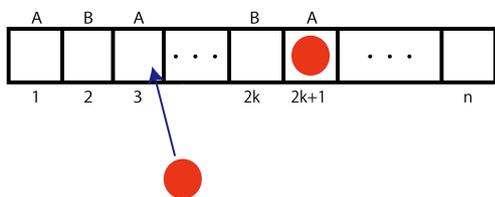


図 3 (i) の場合

残りの赤のカードの数は、残りのカードの枚数を超えることはないので、 k の範囲は $n - 2k - 1 \geq m - 2$ より $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor$ となる。以上により A が2枚目の赤のカードを引くまでに、B が1枚も赤のカードを引かない場合は、 $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2})$ 通りとなる。

(ii) A が2枚目の赤のカードを引くまでに、B が1枚だけ赤のカードを引く場合。A は、1, 3, ..., $2k-1$ 回目のどこかで1回赤を引くので、それは ${}_k C_1 = k$ 通りある。B は、2, 4, ..., $2k$ 回目のどこかで1回赤を引くので、それは ${}_k C_1 = k$ 通りある。したがって、これらの場合は $k * k = k^2$ 通りとなる。

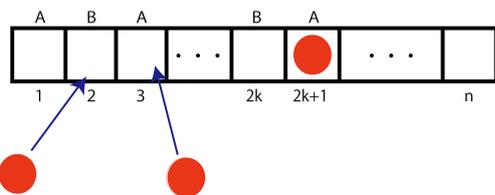


図 4 (ii) の場合

残りの $n - 2k - 1$ 回において、すでに3枚の赤のカードを使用しているため残りの赤のカードは $m - 3$ 枚である。よってこの組み合わせは ${}_{n-2k-1}C_{m-3}$ 通りとなる。

次に、 k の範囲を決める。残りの赤のカードの数は、残りのカードの枚数を超えることはないので、そのため k の範囲は、 $n - 2k - 1 \geq m - 3$ より $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor$ となる。A が2枚目の赤のカードを引くまでに、B が1枚だけ赤のカードを引く場合は $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-3})$ 通りとなる。A が負ける組み合わせは (i) と (ii) の和なので、

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3})$$

通りとなる。 □

次の公式は良く知られているが、私達のゲームにおいても、本質的にはこの性質がパスカルの三角形に近い法則を作る。

定理 4.2.

$${}_n C_m + {}_n C_{m+1} = {}_{n+1} C_{m+1}. \quad (21)$$

$U_2(n, m)$ は定理 4.2 にある ${}_n C_m$ の公式と同じタイプの公式を満たす。

定理 4.3.

$$U_2(n, m) + U_2(n, m+1) = U_2(n+1, m+1). \quad (22)$$

証明. 定理 4.1 により、等式 (22) の左辺は、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3}) \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-1}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-2}). \end{aligned} \quad (23)$$

等式 (22) の右辺は、

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k}C_{m-1}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2({}_{n-2k}C_{m-2}).$$

等式 (22) を証明するために、下の等式 (24) と (25) を証明する。等式 (24) は、A が2枚目のカードを引くまでに B が赤のカードを引かない場合、等式 (25) は、A が2枚目のカードを引くまでに B が1枚の赤のカードを引く場合である。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-1}) \\ & = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k}C_{m-1}). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-2}) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k}C_{m-2}). \end{aligned} \quad (25)$$

等式 (24) を証明する. 次の (i) と (ii) の場合がある.

(i) $n - m$ が偶数のとき $\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor$ なので, $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor$ に対して, 定理 4.2 により,

$$k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + k({}_{n-2k-1}C_{m-1}) = k({}_{n-2k}C_{m-1})$$

が成り立つので, 等式 (24) が証明される.

(ii) $n - m$ が奇数のときは, $n - m = 2p + 1$ とすると, $\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2p+2}{2} \rfloor = p + 1$ かつ $\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor = p$ で,

$$\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor = \frac{n-m+1}{2} \quad (26)$$

である. まず, $k = 1, 2, 3, \dots, p$ に関して, 定理 4.2 により

$$k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + k({}_{n-2k-1}C_{m-1}) = k({}_{n-2k}C_{m-1}). \quad (27)$$

等式 (26) と補題 4.1 により, $k = p + 1 = \frac{n-m+1}{2}$ のとき ${}_{n-2k-1}C_{m-2} = {}_{n-2k}C_{m-1} = 1$ であるから,

$$k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) = k({}_{n-2k}C_{m-1}). \quad (28)$$

等式 (27) と (28) により等式 (24) が証明される.

次に等式 (25) を証明する.

(i) $n - m$ が奇数のとき, $n - m = 2p + 1$ とすると, $\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2p+3}{2} \rfloor = p + 1 = \lfloor \frac{2p+2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor$ となるので, 定理 4.3 により, $k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-2}) = k^2 ({}_{n-2k}C_{m-2})$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-2}) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k}C_{m-2}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

(ii) $n - m$ が偶数のとき, $n - m = 2p$ とすると, $\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor = \frac{n-m+2}{2} = \lfloor \frac{2p+2}{2} \rfloor = p + 1$ かつ $\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor = p$ より $k = 1, 2, \dots, p$ について $k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-2}) = k^2 ({}_{n-2k}C_{m-2})$ となることと, 補題 4.1 により $k = \frac{n-m+2}{2}$ のとき $k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-3}) = k^2 ({}_{n-2k}C_{m-2})$ が成り立つことから,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k-1}C_{m-2}) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2 ({}_{n-2k}C_{m-2}) \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上により $U_2(n, m) + U_2(n, m + 1) = U_2(n + 1, m + 1)$ は成り立つ. \square

注意 4.1. 定義 1.1, 定義 2.3, 定義 4.1 のゲームにおいて, 負ける確率は三角形の形に並べると, 分母・分子がそれぞれパスカルの三角形に似た性質を持つ. このことは, 注意 2.1, 定理 4.3 からわかる.

参考文献

- [1] Matsui, H., Minematsu, D., Yamauchi T., Miyadera, R.: Pascal-like triangles and Fibonacci-like sequences, *Mathematical Gazette*, 2010.
- [2] Matsui, H., Saita, N., Kawata, K., Sakurama Y., Miyadera, R.: *Elementary Problems*, B-1019, *Fibonacci Quarterly*, series 44.3, (2006).
- [3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>