

A Cat-and-Mouse game on the set of integers

杉山 悦子¹ 篠田 正人^{2,a)}

概要: 数直線上をネズミが逃げ、ネコが追うゲームを考える。各ステップごとのネズミとネコの可動域は整数の集合として $R_M = \{-1, 0, 2\}$, $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$ のように指定され、ネコとネズミが同じ地点に移動したらネズミは捕獲されたことになる。本研究ではネコがネズミを有限時間内に捕獲できるための R_M, R_C の条件を示し、さらに捕獲時間の期待値の計算方法について述べる。

A Cat-and-Mouse game on the set of integers

ETSUKO SUGIYAMA¹ MASATO SHINODA^{2,a)}

Abstract: We define a game in which a cat chases a mouse on the number line. The range of a move of the cat and that of the mouse in each step are given as sets of integers, such as $R_M = \{-1, 0, 2\}$ and $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$. If the cat and the mouse stop on the same point on the line, then the mouse is captured. In this research we show the conditions that the cat can capture the mouse in finite steps, and moreover we mention how to calculate the expected value of captured times.

1. ゲームのルールと目標

ゲーム理論における混合戦略、均衡点、ミニマックス定理などを説明するために、逃げるシャーロックホームズと追うモリアティ教授をモデル化したゼロ和2人ゲームが von Neumann-Morgenstern[1] による導入以来、しばしば引き合いに出される(たとえば鈴木[2]など)。この例では、2人のプレイヤーがドローに直行するかカンタベリーで途中下車するかという2つの戦略からどちらかを一度だけ(同時に)選択し、自分の利得の期待値を最大化しようとする。本研究では、同様に Mouse が逃げ、Cat が追うゲームを考える^{*1}。ただし、前述の例と異なる以下の特徴がある。

- 戦略の選択は、Mouse が Cat に捕まるまで何度もくり返し行われる。
- Mouse と Cat の動ける空間が無限集合である。

具体的には次のようなゲームである。2人のプレイヤー M (Mouse 役), C (Cat 役) が整数のカードを何種類か持ち、その中から1枚ずつ選んで場に同時に出す。そして出したカードの数だけ数直線上を移動する。ゲーム開始時には Mouse, Cat どちらも原点にいるものとし、カードを同時に出す操作をくり返して Mouse, Cat が再び同じ点に移動したら Mouse が Cat に捕まったものとしてゲームは終了する。なお、カードは何回でも使える(場に出しても再び手元に戻る)ものとする。このとき、Cat が Mouse を有限回の移動で捕まえることができるかを、M, C それぞれの持ちカード、たとえば

例 1.1 (= 例 3.1) M の持ちカードは $\{-1, 0, 2\}$, C の持ちカードが $\{-2, 4, 5, 7\}$,

例 1.2 (= 例 3.2) M の持ちカードは $\{-1, 0, 2\}$, C の持ちカードが $\{-3, 5, 6, 8\}$

の組み合わせによって判定するのが問題である。

この設定を以下のように定式化する。 $M_n, C_n \in \mathbb{Z}$ を時刻 n での Mouse と Cat の位置とする。Mouse と Cat は時刻 $n = 0$ で原点を出発 ($M_0 = C_0 = 0$) し、再び $M_n = C_n$ となると Mouse が Cat に捕まったものとみなしてゲームが終了する。この時刻 $T = \inf\{n > 0 | M_n = C_n\}$ を捕獲

¹ 奈良女子大学大学院人間文化研究科
Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University

² 奈良女子大学研究院自然科学系
Faculty, Division of Natural Sciences, Nara Women's University

^{a)} shinoda@cc.nara-wu.ac.jp

^{*1} カードゲーム「Spite and Malice」が「Cat and Mouse」と呼ばれることもあるが、ここで扱うゲームはそれとは異なる。

時間という。右辺が空集合 (Mouse がずっと捕まらない場合) は $T = \infty$ と定める。なお Mouse と Cat はともに \mathbb{Z} 上を動くが、すれ違う (M_n と C_n の大小が逆転する) だけでは捕まらないものとする。

次に Mouse と Cat の戦略選択について述べる。各時刻 n ごとに、Mouse は $R_M = \{m_1, m_2, \dots, m_{k_M}\}$ (ただし $|R_M| = k_M < \infty, m_1 = m_{\min} < m_2 < \dots < m_{k_M} = m_{\max}, m_i \in \mathbb{Z}$)、Cat は $R_C = \{c_1, c_2, \dots, c_{k_C}\}$ (ただし $|R_C| = k_C < \infty, c_1 = c_{\min} < c_2 < \dots < c_{k_C} = c_{\max}, c_j \in \mathbb{Z}$) から 1 つの要素を予め定められた推移確率分布に従って選ぶ。すなわち任意の整数 x に対して、

$$\sum_{i=1}^{k_M} p(x, m_i) = 1, \quad \sum_{j=1}^{k_C} q(x, c_j) = 1$$

が成り立つように $\mathbf{p} = \{p(x, m_i)\}_{x \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k_M}$ および $\mathbf{q} = \{q(x, c_j)\}_{x \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq k_C}$ を定め、 $M_n - C_n = x$ のときに Mouse は m_i を確率 $p(x, m_i)$ 、Cat は c_j を確率 $q(x, c_j)$ で独立に選ぶことにする。これは Mouse と Cat がそれぞれ R_M, R_C のどの要素を選ぶかを互いの位置の差 x ごとに混合戦略として定めることに他ならない。ここで $p(x, m_i)$ と $q(x, c_j)$ は時刻によらず定まっていることに注意しておく。実際に時刻 $n+1$ で Mouse が m_i 、Cat が c_j を選んだとき ($X_{n+1} = m_i, Y_{n+1} = c_j$ と書くことにする) 数直線上を Mouse は m_i 、Cat は c_j 移動して $M_{n+1} = M_n + m_i$ 、 $C_{n+1} = C_n + c_j$ となる。よって、時刻 n でのそれぞれの位置は $M_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 、 $C_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ とも表せる。

Mouse の戦略として \mathbf{p} 、Cat の戦略として \mathbf{q} が決まったとき、全体の確率法則 \mathbb{P} が (\mathbf{p}, \mathbf{q} によって) 定まり、 T の確率分布が決まる。そこで、Mouse は T を大きく、Cat は T を小さくするように \mathbf{p}, \mathbf{q} を決める。捕獲時間が有限となる確率が 1 かどうかで (I),(II) の 2 つのクラスが定まる。

- (I) どのように \mathbf{q} を定めても、 $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ となる \mathbf{p} がある。このとき、単に $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ と表す。
- (II) ある \mathbf{q} を定めると、すべての \mathbf{p} に対して $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ となる。このとき、単に $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ と表す。

与えられた R_M, R_C について、(I), (II) のどちらのクラスに属するかの判定条件を求めることが本研究の目標である。この目的のために第 2 章で基本的な命題をいくつか示し、第 3 章にて具体的な判定条件とその証明を述べる。

なお、上記のクラス分けでは Cat が戦略 \mathbf{q} を選択した後で Mouse がそれを見て戦略 \mathbf{p} を選べる設定となっている。ただし、この順序はクラス分けにはほぼ影響がない (Mouse が先に戦略 \mathbf{p} を定めて公開したとしてもほぼ同じ) であることが次章以降の議論でわかる。この選択順が影響する例については 3.4 節で取り上げる。

与えられた R_M, R_C から上記のクラス (II) であるこ

とがわかったときには、平均捕獲時間 (捕獲時間の期待値) $T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の値にも興味がある。第 3 章でわかるように $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ ならば、 $E(T) = \min_{\mathbf{q}} \left(\max_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right)$ として定義される値は有限となる。このときに $E(T)$ の値、および Mouse と Cat の最善の戦略 \mathbf{p}, \mathbf{q} を具体的に求める方法を知りたい。第 4 章にて、2 つの簡単な具体例において $E(T)$ の計算方法と結果を示し、他の様々な例での計算方法やその手順を示唆する。本研究で扱っているゲームは理論値が厳密に求められるものとして、シミュレーションや機械学習で得られる解の精度をテストする用途にも使えると考えている。

2. 基本的な命題

まず、 R_M, R_C の個々の包含関係についての単調性を表す命題を述べる。証明は省略する。

命題 2.1 R_M と R_C がクラス (I) に属するとき

- (i) $R_M \subseteq R_M'$ ならば R_M' と R_C もクラス (I) に属する。
- (ii) $R_C \supseteq R_C'$ ならば R_M と R_C' もクラス (I) に属する。

(注) R_M, R_C がクラス (II) に属する場合は逆の単調性が成り立つ。

次に、 R_M, R_C の平行移動に関するクラスの不変性を述べる。これも証明は省略する。

命題 2.2 $x \in \mathbb{Z}$ とする。 R_M と R_C をそれぞれ x 平行移動して $R_M + x$ と $R_C + x$ に変更してもクラスは変わらない。

R_M, R_C から (I), (II) のどちらのクラスに属するかがすぐわかる場合をいくつか挙げる。

命題 2.3 $m_{\max} > c_{\max}$ ならば $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$ 、すなわちクラス (I) に属する。

証明 Mouse が常に $X_i = m_{\max}$ とする戦略を採用するとき、 $Y_i \leq c_{\max}$ なので $n \geq 1$ に対して

$M_n = n \times m_{\max} > n \times c_{\max} \geq Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = C_n$.
すなわち $\forall x$ に対して $p(x, m_{\max}) = 1$ とすると $\mathbb{P}(M_n > C_n \forall n \geq 1) = 1$ 、つまり $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$ であることがわかる。(終)

系 2.4 $m_{\min} < c_{\min}$ ならば $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$ 、すなわちクラス (I) に属する。

以下、 $c_{\min} \leq m_{\min} \leq m_{\max} \leq c_{\max}$ を仮定して考える。 $k_M = 1$ のときにクラス (II) に属する必要十分条件は、命題 2.3, 系 2.4 と次の命題によりわかる。

命題 2.5 $k_M = 1, c_{\min} \leq m \leq c_{\max}$ のとき $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ 、すなわちクラス (II) に属する。

(注) この場合、 $\mathbb{P}(T \leq k) = 1$ となる有限な k の存在も具体的にわかる。

証明 命題 2.2 より $R_M = \{0\}$ としてよい。 $c_{\min} \leq 0 \leq c_{\max}$ とする。

- (i) $c_{\min} = 0$ のとき、 $Y_1 = c_{\min}(= 0)$ とすると $M_1 = C_1$.

よって $\mathbb{P}(T = 1) = 1$ とできる. $c_{max} = 0$ のときも同様に $\mathbb{P}(T = 1) = 1$ とできる.

(ii) $c_{min} < 0 < c_{max}$ のとき, Cat が c_{min} を c_{max} 回, c_{max} を $|c_{min}|$ 回使うと $k = c_{max} + |c_{min}| = c_{max} - c_{min}$ について $M_k = 0$, $C_k = c_{min}c_{max} + c_{max}|c_{min}| = 0$. よって $\mathbb{P}(T \leq k) = 1$ である. (終)

例 2.1 $R_M = \{2\}$, $R_C = \{-101, 98\}$ とする. 命題 2.2 より平行移動によって $R_M = \{0\}$, $R_C = \{-103, 96\}$ として考えてよい. Cat が $Y_1 = Y_2 = \dots = Y_{96} = -103$, $Y_{97} = Y_{98} = \dots = Y_{199} = 96$ とすれば $M_{199} = C_{199} = 0$ となり, Cat は $\mathbb{P}(T = 199) = 1$ とできることがわかる. よって, クラス (II) に属する.

ここからは $k_M \geq 2$ の場合を調べていく. まずクラス (I) に属する簡単な十分条件を次に示す. この命題のアイデアが次章でも重要になる.

命題 2.6 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対してある $m \in R_M$ が存在して, すべての $c \in R_C$ に対して $x + m - c \neq 0$ であるならば $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$, すなわちクラス (I) に属する.

証明 $M_n - C_n = x$ のとき, どのような $c \in R_C$ に対しても $x + m - c \neq 0$ となる $m \in R_M$ を選んで $X_{n+1} = m$ とすれば $\mathbb{P}(T = n + 1 | M_n - C_n = x) = 0$ となる. これを時刻 $n + 2, n + 3, \dots$ でもくり返せばよい. (終)

命題 2.7 $2 \leq k_M = k_C$ のとき

- (i) $R_M = R_C$ のとき $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$,
- (ii) $R_M \neq R_C$ のとき $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$.

すなわち, どちらの場合もクラス (I) に属する.

証明 (i) すべての $m \in R_M$ に対して $p(0, m) = k_M^{-1}$ とすると, どのような q に対しても $\mathbb{P}(T = 1) \leq k_M^{-1} < 1$ となる. そして $M_1 - C_1 > 0$ のときは Mouse がその後 m_{max} を選び続ければ Cat に捕まらない. $M_1 - C_1 < 0$ のときも同様に, Mouse がその後 m_{min} を選び続ければ Cat に捕まらない.

(ii) もし R_C を平行移動させると R_M に一致するならば, $m_{max} > c_{max}$ または $m_{min} < c_{min}$ なので命題 2.3, 系 2.4 の通り示せる. そうでない場合は, 命題 2.6 の仮定が成立するのでやはり示せる. (終)

これで $2 \leq k_M = k_C$ の場合の判定はできたので, 次の章では $2 \leq k_M < k_C$ の場合の判定条件を調べていく.

3. クラスの分類

3.1 Mouse が捕まる必要十分条件

本章では以下, $k_M \geq 2, c_{min} < m_{min} < m_{max} < c_{max}$ とする. $m_{max} = c_{max}$ または $m_{min} = c_{min}$ のときは特別な場合として 3.4 節で述べる. Mouse が次に捕まる可能性がある危険な場所として以下のように D, \bar{D} を定める.

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \{x \in \mathbb{Z} | \forall m \in R_M, \exists c \in R_C \text{ s.t. } x + m - c = 0\}, \\ D &= \bar{D} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Mouse と Cat の位置の差 $M_n - C_n$ が D に入らなければ捕まらないことを示すのが次の命題である. これは命題 2.6 と本質的に同じものである.

命題 3.1 すべての $x \notin D$ に対してある $m \in R_M$ が存在して, すべての $c \in R_C$ に対して $x + m - c \notin D$ ならば $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$.

また, 次の条件 (*) をみたす安全な場所 S があれば, Mouse は Cat との位置の差 $M_n - C_n$ が S に入らないように逃げれば捕まらないことは明らかである.

$$\left. \begin{aligned} 0 \notin S, \text{ かつ} \\ \forall x \in S \text{ に対しある } m \in R_M \text{ が存在して} \\ \forall c \in R_C \text{ に対して } x + m - c \in S. \end{aligned} \right\} (*)$$

命題 3.2 (*) をみたす S が存在し, かつ $\mathbb{P}(M_k - C_k \in S) > 0$ をみたす k が存在するならば $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$.

よって, 次のことも明らかである.

命題 3.3 $D = \emptyset$ ならば $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$.

証明 $k_M \geq 2$ であることから $\mathbb{P}(M_1 - C_1 \neq 0) > 0$ とできる. $D = \emptyset$ のとき $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とすれば, (*) をみたすので $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ である. (終)

よって以下では $D \neq \emptyset$ と仮定し, D の最大公約数を l (≥ 1) とする. クラス (II) に属する十分条件として次のことがいえる.

定理 3.4 $l = 1$ のとき, $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

この定理 3.4 は 3.2 節で証明する.

$l = 1$ でない場合はより複雑な判定条件となる. $l > 1$ のとき, Mouse と Cat の位置の差 x を l で割った余りで分類して

$$D_1 = \left\{ x \in \{1, 2, \dots, l\} \mid \begin{array}{l} \forall m \in R_M, \exists c \in R_C \\ \text{s.t. } x + m - c \equiv 0 \pmod{l} \end{array} \right\}$$

とする. ここで D_1 の最大公約数を l_1 とする.

定理 3.5 $l_1 = 1$ のとき, $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

この定理 3.5 も 3.2 節で証明する.

例 3.1 (Mouse が捕まる例) $R_M = \{-1, 0, 2\}$, $R_C = \{-2, 4, 5, 7\}$ とする. このとき, $D = \{5\}$, $l = 5$ であるので定理 3.4 では $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ かどうか確定できない. ここで Mouse と Cat の位置の差の変化に関する表を作る. 数字は $Y_{n+1} - X_{n+1}$ の値を $l = 5$ で割った余りを表す.

$R_M \backslash R_C$	7	5	4	-2
2	0	③	2	1
0	2	0	4	③
-1	③	1	0	4

○を付けた 3 は「どのような X_{n+1} の選択に対しても, $Y_{n+1} - X_{n+1}$ の余りが 3 となるような Y_{n+1} が存在する (すべての行に 3 がある)」ことを意味している. よって $D_1 = \{3, 5\}$, D_1 の最大公約数は $l_1 = 1$ となり, 定理 3.5

の条件をみたす。ここで実際に Mouse が Cat に捕まるかどうかを確認してみる。以下 $x' \in \mathbb{Z}$ とする。

(i) $M_n - C_n = 5x' + 3$ のとき

$$M_{n+1} - C_{n+1} = \begin{cases} 5(x' - 1) & (X_{n+1} = -1, Y_{n+1} = 7), \\ 5(x' + 1) & (X_{n+1} = 0, Y_{n+1} = -2), \\ 5x' & (X_{n+1} = 2, Y_{n+1} = 5). \end{cases}$$

すなわち, Cat が Y_{n+1} として $-2, 5, 7$ のいずれかをランダムに ($q(5x'+3, -2), q(5x'+3, 5), q(5x'+3, 7)$ の値をすべて > 0 とする) 選べば X_{n+1} がどれであっても $M_{n+1} - C_{n+1}$ は $5y$ ($y \in \mathbb{Z}$) になる確率を正にできる。

(ii) $M_n - C_n = 5x' + 1$ のとき

$$M_{n+1} - C_{n+1} = \begin{cases} 5(x' - 2) + 3 & (X_{n+1} = -1, Y_{n+1} = 7), \\ 5x' + 3 & (X_{n+1} = 0, Y_{n+1} = -2), \\ 5(x' - 1) + 3 & (X_{n+1} = 2, Y_{n+1} = 5). \end{cases}$$

すなわち, X_{n+1} がどれであっても $M_{n+1} - C_{n+1}$ は $5y + 3$ ($y \in \mathbb{Z}$) になる確率を正にできる。

(iii) $M_n - C_n = 5x' + 4$ のとき

$$M_{n+1} - C_{n+1} = \begin{cases} 5(x' - 1) + 1 & (X_{n+1} = -1, Y_{n+1} = 7), \\ 5(x' + 1) + 1 & (X_{n+1} = 0, Y_{n+1} = -2), \\ 5x' + 1 & (X_{n+1} = 2, Y_{n+1} = 5). \end{cases}$$

すなわち, X_{n+1} がどれであっても $M_{n+1} - C_{n+1}$ は $5y + 1$ ($y \in \mathbb{Z}$) になる確率を正にできる。

(iv) $M_n - C_n = 5x' + 2$ のとき

$$M_{n+1} - C_{n+1} = \begin{cases} 5(x' - 2) + 4 & (X_{n+1} = -1, Y_{n+1} = 7), \\ 5x' + 4 & (X_{n+1} = 0, Y_{n+1} = -2), \\ 5(x' - 1) + 4 & (X_{n+1} = 1, Y_{n+1} = 5). \end{cases}$$

すなわち, X_{n+1} がどれであっても $M_{n+1} - C_{n+1}$ は $5y + 4$ ($y \in \mathbb{Z}$) になる確率を正にできる。

よって, Mouse がどこの場所においても Cat は $M_{n+1} - C_{n+1}$ を 5 で割った余りを $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ の順に変えていく確率を正にできる。このアイデアをもとに $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ が示せる。(3.2 節参照)

(注) (ii)~(iv) においては, Y_{n+1} の選択を工夫すれば $M_{n+1} - C_{n+1}$ を 5 で割った余りをより効率的に (ショートカットして) 0 とすることができるが, わかりやすさを優先するためこのような選択で統一している。

例 3.2 (Mouse が捕まらない例) $R_M = \{-1, 0, 2\}$, $R_C = \{-3, 5, 6, 8\}$ とする。 $D = \{6\}$, $l = 6$ である。例 3.1 と同様に Mouse と Cat の位置の差の変化に関する表を作る。数字は $Y_{n+1} - X_{n+1}$ の値を $l = 6$ で割った余りである。この表より $D_1 = \{3, 6\}$ であるため D_1 の最大公約数は $l_1 = 3$ となる。以下 $x' \in \mathbb{Z}$ とする。

(i) $M_n - C_n = 3x' + 1$ のとき

$$X_{n+1} = 0 \text{ とすると,}$$

	R_C	8	6	5	-3
R_M					
	2	0	4	③	1
	0	2	0	5	③
	-1	③	1	0	4

$$M_{n+1} - C_{n+1} = \begin{cases} 3(x' + 1) + 1 & (Y_{n+1} = -3), \\ 3(x' - 2) + 2 & (Y_{n+1} = 5), \\ 3(x' - 2) + 1 & (Y_{n+1} = 6), \\ 3(x' - 3) + 2 & (Y_{n+1} = 8). \end{cases}$$

(ii) $M_n - C_n = 3x' + 2$ のとき

$$X_{n+1} = -1 \text{ とすると,}$$

$$M_{n+1} - C_{n+1} = \begin{cases} 3(x' + 1) + 1 & (Y_{n+1} = -3), \\ 3(x' - 2) + 2 & (Y_{n+1} = 5), \\ 3(x' - 2) + 1 & (Y_{n+1} = 6), \\ 3(x' - 3) + 2 & (Y_{n+1} = 8). \end{cases}$$

よって Mouse は (i),(ii) の戦略をとれば $M_{n+1} - C_{n+1}$ が 3 の倍数になることを必ず避けられる。また, $p(0, 0) = p(0, 2) = \frac{1}{2}$ とすれば $\mathbb{P}(M_1 - C_1 \not\equiv 0 \pmod{3}) > 0$ である。ゆえに $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ がいえる。なお, この例では 3 の倍数ではない整数全体の集合が安全な場所 S となっている。

D_1 の最大公約数 $l_1 > 1$ であるとき, x を l_1 で割った余りが $1, 2, \dots, l_1 - 1$ ならば $x \notin D_1$ である。そこで $l_1 > 1$ のときはさらに

$$D_2 = \left\{ x \in \{1, 2, \dots, l_1\} \mid \begin{array}{l} \forall m \in R_M, \exists c \in R_C \\ \text{s.t. } x + m - c \equiv 0 \pmod{l_1} \end{array} \right\}$$

と定め, D_2 の最大公約数を l_2 とする。以下, 同様に D_3, l_3 以降を定める。このとき $l \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq 1$ なので, どこかで $l_N = 1$ になるか $l_N = l_{N+1} > 1$ になるかのどちらかである (例 3.2 では $l_1 = l_2 = 3$ であった)。これらの記号を用いて定理 3.6 が定まる。

定理 3.6 $l_1 > 1$ とする。このとき (i),(ii) が成り立つ。

(i) $l_N = l_{N+1} > 1$ となる N が存在し, かつ

$$\forall c \in R_C \exists m \in R_M \text{ s.t. } m - c \not\equiv 0 \pmod{l_N} \quad (**)$$

のとき $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ である。

(ii) (i) 以外するとき $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ である。

定理 3.6(i) は 3.3 節で証明する。

3.2 $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ の場合の証明

この節では定理 3.4 と定理 3.5, すなわち Mouse が必ず捕まる場合の証明を行う。定理 3.4 の証明をするにあたり, 以下の補題を用いるので先に示す。

補題 3.7 表が出る確率が $p(> 0)$ のコインを, k 回連続で表が出るまで投げ続けるとする。このときコインを投げ回数の期待値は有限であり, その値は

$$\frac{1}{p^k} (1 + p + p^2 + \dots + p^{k-1})$$

である。

証明 コインを無限回投げ続けるときに $(jk + 1)$ 回目から $(j + 1)k$ 回目まで続けて表が出る事象を A_j ($j \geq 0$) とし、確率変数 T_c を $T_c = \inf\{j | A_j \text{が起る}\}$ と定めると $P(T_c = j) = (1 - p^k)^j \times p^k$ であるので $E(T_c) = p^{-k} < \infty$ である。よって、この補題で求めるコイン投げの回数の期待値も有限であることがわかる。元の設定に戻り、コインの表が i 回 ($0 \leq i \leq k - 1$) 続けて出ている状態から全部で k 回続けて表が出るまでのコイン投げの回数の期待値を E_i とすると

$$E_i = 1 + pE_{i+1} + (1-p)E_0 \quad (0 \leq i \leq k-2),$$

$$E_{k-1} = 1 + (1-p)E_0$$

が成り立つ。この解として

$$E_{k-1} = p^{-k}, E_{k-2} = p^{-k}(1+p), \dots,$$

$$E_0 = p^{-k}(1 + p + p^2 + \dots + p^{k-1})$$

が得られる。(終)

補題 3.8 $d' \in D$ とする。このとき、 $j \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}(M_{n+j} - C_{n+j} = 0 | M_n - C_n = jd') \geq \left(\frac{1}{k}\right)^j$$

が (p にかかわらず) 成り立つように q を選ぶことができる。

証明 D の定義から、各 $m \in R_M$ に対し $c_{d'}(m) \in R_C$ を $c_{d'}(m) - m = d'$ となるように選ぶことができる。そこで $R_C^{d'} = \{c_{d'}(m) | m \in R_M\}$ とするとき、Cat は $R_C^{d'}$ の要素をそれぞれ確率 $|R_C^{d'}|^{-1}$ で選ぶようにすれば

$$\mathbb{P}(M_{n+1} - C_{n+1} = (j-1)d' | M_n - C_n = jd') \geq \frac{1}{|R_C^{d'}|} \geq \frac{1}{k}$$

となる。これを j 回くり返せばよい。(終)

定理 3.4 の証明 $l = 1$ であるので、十分大きな整数 N を指定すれば、 N 以上の任意の整数 x に対して非負整数 a_1, a_2, \dots が $\sum_{d_i \in D} a_i d_i = x$ となるようにとれる。そこで、Cat はまず c_{min} の移動をくり返して行い

$$N \leq M_n - C_n < N + (m_{max} - c_{min})$$

となるようにする。(***)

そして $M_n - C_n = x$, $\sum_{d_i \in D} a_i d_i = x$ であるとき Cat は

そこから $\sum_{d_i \in D} a_i$ 回の移動について $R_C^{d_1}$ の要素を a_1 回、 $R_C^{d_2}$ の要素を a_2 回、 \dots と選ぶ。まず Cat が Y_{n+1} として $R_C^{d_1}$ の要素を 1 つ選ぶとすると、Mouse の X_{n+1} の選択によって $Y_{n+1} - X_{n+1} = d_1$ となればこれはコインで表が出たと解釈し、 $Y_{n+1} - X_{n+1} \neq d_1$ となれば裏が出たものとみなす。このようにして以降も $R_C^{d_i}$ の要素を Cat が選んで $Y_{n'} - X_{n'} = d_i$ となればコインで表が出たものとみなす。なお、このコインで表が出る確率は各回ごとに k^{-1} 以上である (補題 3.8)。よって、もしコインの表が $\sum_{d_i \in D} a_i$

回続けて出れば $M_{n+\sum a_i} - C_{n+\sum a_i} = 0$ となって Cat が Mouse を捕まえたことになり、コインで一度でも裏が出れば再び (***) の操作に戻る。これをくり返すとき、補題 3.7 からコインを投げる回数の期待値は有限であるため、 $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ の結果が得られる。(終)

定理 3.5 の証明 $l > 1$, $D' = \{x \in \mathbb{Z} | \mathbb{P}(T < \infty | M_n - C_n = x) > 0\}$ とする。 $D' = \mathbb{Z}$ となるように q が設定できることを示せば $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ が言える。以下

(i) x が l の倍数で十分大きいとき $x \in D'$,

(ii) x を l で割った余りが k ($1 \leq k \leq l-1$) で x が十分大きいとき $x \in D'$,

(iii) すべての整数 x に対して $x \in D'$

を示していく。

(i) の証明 x は D の要素 d_1, d_2, \dots, d_i と正の整数 a_1, a_2, \dots を用いて $x = \sum_{d_i \in D} a_i d_i$ とかけるので、Cat は

$M_n - C_n = x$ の状態からの $\sum a_i$ 回の移動について $R_C^{d_i}$ の要素からの選択 (すべて確率を $|R_C^{d_i}|^{-1}$ で選ぶ) を a_i 回ずつ行くと、 $M_{n+\sum a_i} - C_{n+\sum a_i} = 0$ となる確率は $k^{-\sum a_i}$ 以上になる。よって $x \in D'$ である。

(ii) の証明 $M_n - C_n = x$ で x が十分大きく、 x を l で割った余りが $d' (\neq 0)$ である状況を考える。もし $d' \in D_1$ であれば、各 $m \in R_M$ に対して $d' + m - c \equiv 0 \pmod{l}$ となる $c \in R_C$ を $c_{d'}(m)$ とし $R_C^{d'} = \{c_{d'}(m) | m \in R_M\}$ とし、Cat は $R_C^{d'}$ の要素を等確率で選ぶことにすると $|R_C^{d'}|^{-1}$ の確率で $M_{n+1} - C_{n+1}$ は l の倍数となるので $x \in D'$ である。同様に、 x を l で割った余りが D_1 に含まれないときも D_1 の要素 d'_1, d'_2, \dots, d'_i を用いて $x = \sum_{d'_i \in D_1} b_i d'_i$ と表し、Cat

はこの状態からの $\sum b_i$ 回の移動について $R_C^{d'_i}$ の要素の移動を b_i 回ずつ行ふことにすれば $M_{n+\sum b_i} - C_{n+\sum b_i}$ が l の倍数となる確率は $k^{-\sum b_i}$ 以上となり、 $x \in D'$ である。

(iii) の証明 $M_n - C_n = x$ のとき、Cat は c_{min} の選択をくり返し行ふことで $M_{n'} - C_{n'}$ を十分大きくすることができる。(終)

なお、定理 3.6(ii) の証明は定理 3.5 の証明と同様にできるので省略する。

3.3 $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ の場合の証明

この節では定理 3.6(i), すなわちどのように q を定めても Mouse が捕まらない確率が正である場合の証明を行う。基本的なアイデアは例 3.2 で述べたものである。

定理 3.6(i) の証明 $l_N = l_{N+1} > 1$ とする。(**) の条件から、 $\mathbb{P}(M_1 - C_1 \not\equiv 0 \pmod{l_N}) > 0$ である。このとき、 $x \not\equiv 0 \pmod{l_N}$ となるすべての x について

$$\exists m \in R_M \text{ s.t. } \forall c \in R_C, x + m - c \not\equiv 0 \pmod{l_N}$$

である。よって、 $M_n - C_n = x$ かつ $x \not\equiv 0 \pmod{l_N}$ のとき、Mouse はこの m を X_{n+1} として選べば $M_{n+1} - C_{n+1} \equiv$

0 (mod l_N) とはならない。(終)

なおこの場合 l_N の倍数でない整数全体の集合が安全な場所 S となり、命題 3.2 に対応している。

3.4 R_M, R_C の最大値が最小値が等しい場合

本節では $c_{min} \leq m_{min} < m_{max} = c_{max}$ の場合について、Cat が先に戦略 q を決めると、Mouse が $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ となるように戦略 p を選べることを示す。なお $c_{min} = m_{min} < m_{max} \leq c_{max}$ の場合についても同じことがいえる。

例 3.3 $R_M = \{-1, 0, 1\}$, $R_C = \{-2, -1, 0, 1\}$ とする。このときどのように Cat の推移確率を定めても、その後に Mouse が $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ となるように推移確率を定められることを背理法で示す。ある q についてすべての p に対し $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ であると仮定する。このとき $q(0, 1) < 1$ とすると、すべての x について $p(x, 1) = 1$ とすることで $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ となってしまう。よって $q(0, 1) = 1$ でなくてはならない。そこで Mouse は $p(0, 1) = 0$ とする。この例では $D = \{-1\}$ なので $M_n - C_n = -1$ のときに Cat が Mouse を捕まえに行かなければならないが、 $q(-1, -1) = 0$ とすると $p(-1, 0) = 1$ とすれば Mouse は捕まらず、 $q(-1, -1) > 0$ とすると $p(-1, 1) = 1$ とすることで $\mathbb{P}(M_{n+1} - C_{n+1} > 0) > 0$ となり、 $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ となってしまう。

この例 3.3 を一般化して次の定理を得る。

定理 3.9 $c_{min} \leq m_{min} < m_{max} = c_{max}$ とする。このときすべての q に対して、 $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ となる p が存在する。

証明 ある q についてすべての p に対し $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ と仮定する。 $q(0, c_{max}) < 1$ とすると $p(0, m_{max}) = 1$ のとき $\mathbb{P}(M_1 - C_1 > 0) = 1 - q(0, c_{max}) > 0$ となり、 $M_1 - C_1 > 0$ のときにその後 Mouse が m_{max} を出し続けられれば $T = \infty$ となるので $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ に反する。よって $q(0, m_{max}) = 1$ 。このとき $p(0, m_{max}) = 0$ としてよい。この後も同様に、もし $\mathbb{P}(M_n - C_n > 0) > 0$ となると $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ に反することに注意しておく。

ここで $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ とするためには、 $\mathbb{P}(T = n + 1 | M_n - C_n = k) > 0$ となる $k < 0$ が p にかかわらず存在しなければならない。 $T = n + 1$ となる確率を正にするためには、すべての $m \in R_M$ に対してある $c \in R_C$ が存在して $k + c = m$ が成り立ちかつ $q(k, c) > 0$ でなければならない。すなわち $k + c = m_{max}$ かつ $k + c' = m_{min}$ となる $c > c'$ について $q(k, c) > 0$ かつ $q(k, c') > 0$ である。しかしこのとき $p(k, m_{max}) = 1$ とすると

$$\mathbb{P}(M_{n+1} - C_{n+1} > 0 | M_n - C_n = k)$$

$$\geq p(k, m_{max}) \times q(k, c') = q(k, c') > 0$$

となるので、 $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ に反する。(終)

これでクラス (I)(II) の分類がすべて終わったことになる。

なお、本節で取り扱った状況では p, q を指定する順序によって結論が変わり得ることを述べておく。例 3.3 において、もし p を見て後から q を定めることができれば $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ とできることを示す。 q の設定を

- ・ $p(-1, 1) > 0$ ならば $q(-1, 0) = 1$,
- ・ $p(-1, 1) = 0$, $p(-1, 0) > 0$ ならば $q(-1, -1) = 1$,
- ・ $p(-1, -1) = 1$ ならば $q(-1, -2) = 1$

および

- ・ $p(-2, 1) > 0$ ならば $q(-2, -1) = 1$,
- ・ $p(-2, 1) = 0$ ならば $q(-2, -2) = 1$

とし、まず $Y_1 = 1$ を選択すればつねに $-2 \leq M_n - C_n \leq 0$ であり、 $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ となる。したがってこの例では、

- ・ q を見てから p を定めることができれば $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$,
- ・ p を見てから q を定めることができれば $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$,
- ・ p, q を同時に出す場合は、お互いどのような p, q を選ぶかの段階で混合戦略を採用することになり、 $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ と $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ のいずれの可能性もある

こととなる。

4. 平均捕獲時間の最小化

4.1 平均捕獲時間に関する基礎事項

第 3 章では R_M と R_C に応じて $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ となる場合および $\mathbb{P}(T < \infty) < 1$ となる場合の判定条件がわかった。そこで本章では $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ の場合において、平均捕獲時間を最小化する Cat の戦略を考察する。すなわち、 p, q を設定するとそのときの平均捕獲時間 $T(p, q)$ が定まるが、双方が最善を尽くしたミニマックス値 $E(T) = \min_q \left(\max_p T(p, q) \right)$ を求めたい。

なお、このモデルでは $M_n - C_n = x$ の値が十分大きいときは $p(x, m_{max}) = q(x, c_{max}) = 1$ 、十分小さい (x が負で $|x|$ が十分大きい) ときには $p(x, m_{min}) = q(x, c_{min}) = 1$ としてよく、したがって p, q は有限次元の定義域を持つベクトルとみなせるため $E(T) < \infty$ である場合はその値を達成する p, q の組合せ (具体的な最適戦略) が存在する。ただし R_M, R_C が簡単な場合を除いて $E(T)$ の厳密な値を求めることは大変であり、ここでは 2 つの具体例での $E(T)$ の計算のみを示す。

4.2 Cat の戦略例 (R_M, R_C とも対称性のある場合)

次の例における Cat の戦略 q を考え、Cat にとって最悪の p が選ばれたときの $T(p, q)$ の値を最小化し、そのミニマックス値 $E(T)$ を求めていくことが本節での目標である。

例 4.1 $R_M = \{-1, 0, 1\}$, $R_C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 。このとき $D = \{-1, 1\}$ であり、クラス (II) に属する。ここで $M_n - C_n = x$ である地点からの平均捕獲時間 (のミニマッ

クス値)を $f(x)$ と書くことにすると $f(x) < \infty$ であり, 対称性から $f(x) = f(-x)$ が成り立つ. また Mouse は $|x| \geq 2$ に対して, $\mathbb{P}(T = n + 1 | M_n - C_n = x) = 0$ とできるので $f(1) = f(-1) < f(x)$ である.

まず $M_n - C_n \geq 3$ のとき $Y_{n+1} = 2, X_{n+1} = 1$, $M_n - C_n \leq -3$ のとき $Y_{n+1} = -2, X_{n+1} = -1$ としてよく, $f(3) = 1 + f(2)$ である. このことから以降は $-2 \leq M_n - C_n \leq 2$ の場合の p, q について考えればよい. Cat が Mouse を捕える前段階として, $M_n - C_n = 1$ または -1 とするための戦略を考える. そこで Cat の戦略として

$$\begin{aligned} M_n - C_n \geq 2 & \text{ のとき } Y_{n+1} \geq 1, \\ M_n - C_n \leq -2 & \text{ のとき } Y_{n+1} \leq -1, \\ M_n - C_n = 1 & \text{ のとき } Y_{n+1} \geq 0, \\ M_n - C_n = -1 & \text{ のとき } Y_{n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

の条件を仮定して十分であり, 以下, $f(1), f(2)$ を求める.

(i) $M_n - C_n = 2$ のとき, X_{n+1}, Y_{n+1} の値によって $M_{n+1} - C_{n+1}$ の値は次の表のようになる.

	R_C	2	1	0
R_M				
1		1	2	3
0		0	1	2
-1		-1	0	1

このとき $f(1) < f(2) < f(3)$ の大小関係から, 純戦略の優劣比較が可能で $q(2, 2) = 1$ とすべきことがわかる. よって $p(2, 1) = 1$ も定まり, $f(2) = 1 + f(1)$ がわかる.

(ii) $M_n - C_n = 1$ のとき, X_{n+1}, Y_{n+1} の値によって $M_{n+1} - C_{n+1}$ の値は次の表のようになる.

	R_C	2	1	0
R_M				
1		0	1	2
0		-1	0	1
-1		-2	-1	0

この表からわかる Mouse, Cat の戦略についての対称性を考慮に入れ, 混合戦略

$$p(1, -1) = p(1, 1) = x, p(1, 0) = 1 - 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right),$$

$$q(1, 0) = q(1, 2) = a, q(1, 1) = 1 - 2a \quad \left(0 \leq a \leq \frac{1}{2}\right)$$

における $f(1)$ を計算すると, $f(2) = 1 + f(1)$ を代入することで

$$f(1) = \{2(1 - 3a)x + 2a\}f(1) + 2ax + 1$$

となる. この $f(1)$ の値が大きくなるように x を, 小さくなるように a を定めなくてはならない. ここで Mouse の特別な戦略 $x = 0$ および $x = \frac{1}{2}$ を考えて上式の $f(1)$ を求め

$$\begin{cases} g_1(a) = \frac{1}{-2a + 1} & (x = 0), \\ g_2(a) = \frac{a + 1}{a} & \left(x = \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

とする. このとき $\max_{0 \leq a \leq 1/2} \{g_1(a), g_2(a)\}$ が最小となるとき, すなわち $y = g_1(a)$ と $y = g_2(a)$ の交点が Cat にとっての最適な戦略となる. この a の値を求めると $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ となる ($0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ をみたとす). よって $f(1) = 2 + \sqrt{3}$, $f(2) = 3 + \sqrt{3}$ となる.

最後に $n = 1$ での Mouse と Cat の戦略について考える. $M_1 - C_1$ は次の表のようになっている.

	R_C	2	1	0	-1	-2
R_M						
1		-1	0	1	2	3
0		-2	-1	0	1	2
-1		-3	-2	-1	0	1

このとき $f(1) < f(2) < f(3)$ の大小関係により, Cat にとって $Y_1 = 2, -2$ のどちらかを選ぶことは $Y_1 = 1, -1$ に比べて不利であるので $Y_1 = 1, 0, -1$ のいずれかを選ぶこととしてよい. ここでまた対称性を考慮して混合戦略を

$$p(0, 1) = p(0, -1) = y, p(0, 0) = 1 - 2y \quad \left(0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right),$$

$$q(0, 1) = q(0, -1) = b, q(0, 0) = 1 - 2b \quad \left(0 \leq b \leq \frac{1}{2}\right)$$

と設定する. このとき $f(1) = 2 + \sqrt{3}, f(2) = 3 + \sqrt{3}$ より, 最初の状態 $M_0 = C_0 = 0$ からの平均捕獲時間 $f(0)$ は

$$f(0) = 1 + 2(2 + \sqrt{3})y + 2(2 + \sqrt{3})b - 2(5 + 3\sqrt{3})by$$

となる. ここで再び Mouse の特別な戦略として $y = 0, \frac{1}{2}$ の場合を考えて

$$\begin{cases} h_1(b) = 1 + 2(2 + \sqrt{3})b & (y = 0), \\ h_2(b) = 3 + \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})b & \left(y = \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

とすると, $\max_{0 \leq b \leq 1/2} \{h_1(b), h_2(b)\}$ が最小となるすなわち $y = h_1(b)$ と $y = h_2(b)$ の交点が Cat にとっての最適な戦略となる. この b の値を求めると $b = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ となる ($0 \leq b \leq \frac{1}{2}$ をみたとす). よって $f(0) = 2 + \sqrt{3}$ となる. 以上より $E(T) = 2 + \sqrt{3} = 3.732 \dots$ となる.

4.3 Cat の戦略例 (R_C に対称性のない場合)

例 4.1 では R_M と R_C に左右対称性がある場合における Cat の戦略を考えた. 次の例では R_C に対称性がない場合を取り上げ, Cat の戦略を考えて $T(p, q)$ を最小化し $E(T)$ の値を求めていく.

例 4.2 $R_M = \{-1, 0, 1\}$, $R_C = \{-2, 0, 1, 2\}$ とする. 例 4.1 と比較して R_C の要素が減っているが $D = \{1\}$ であ

り第3章の判定条件から $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ であることがわかる。ただし R_C について左右対称性がないので少し複雑な計算が必要となり、詳細な戦略の比較については煩雑となるため記述を一部省略する。

まず、Cat が仮に次のような戦略 \mathbf{q}_0 を定めたとしたときの $\max_{\mathbf{p}} T(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0)$ を求め、 $E(T)$ の上界とする。

$$q_0(0, 0) = 1, q_0(1, 0) = q_0(1, 1) = q_0(1, 2) = \frac{1}{3},$$

$$q_0(2, 1) = q_0(2, 2) = \frac{1}{2}, q_0(-1, -2) = 1, q_0(-2, -2) = 1.$$

このときに Mouse は

$$p(2, 1) = 1, p(1, -1) = 1, p(0, -1) = 1,$$

$$p(-1, 1) = 1, p(-2, -2) = 1$$

という戦略を採ると $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0)$ は最大となるのが簡単な考察からわかり、このとき平均捕獲時間の関係式を解くことで上界 $E(T) \leq 14$ 、および $M_n - C_n = x$ である状態からの平均捕獲時間 $f(x)$ について $f(2) \leq 12$ 、 $f(1) \leq 10$ 、 $f(-1) \leq 13$ 、 $f(-2) \leq 14$ という評価式も得られる。

以下 $E(T)$ の厳密な値を考察する。 $M_n - C_n = x$ の状態において、 x の値によっては以下の戦略が最善であることがこれも簡単な考察からわかる。

$$x \geq 3 \text{ のとき } q(x, 2) = 1, p(x, 1) = 1,$$

$$x \leq -2 \text{ のとき } q(x, -2) = 1, p(x, -1) = 1.$$

その他の $x \in \{-1, 1, 2\}$ に対しては、Cat の混合戦略として以下のように確率を定めておく。

$$q(1, 2) = a, q(1, 1) = b,$$

$$q(1, 0) = 1 - a - b \quad (a \geq 0, b \geq 0, 1 - a - b \geq 0),$$

$$q(2, 2) = c, q(2, 1) = 1 - c \quad (0 \leq c \leq 1),$$

$$q(-1, 0) = d, q(-1, -2) = 1 - d \quad (0 \leq d \leq 1).$$

これ以外の確率を 0 として除外できる理由として $f(3) = 1 + f(2)$ 、 $f(-2) = 1 + f(-1)$ などの評価や大小関係を用いている。このとき、 $f(x)$ について以下の式が成り立つ。

$$f(1) = 1 + \max\{bf(1) + (1 - a - b)f(2),$$

$$af(-1) + (1 - a - b)f(1), af(-2) + bf(-1)\},$$

$$f(2) = 1 + \max\{cf(1) + (1 - c)f(2), (1 - c)f(1),$$

$$cf(-1)\},$$

$$f(-1) = 1 + \max\{(1 - d)f(2), df(-1) + (1 - d)f(1),$$

$$df(-2)\}.$$

右辺の \max 内は、Mouse が X_{n+1} として $1, 0, -1$ のどの値を選択するかによって得られる期待値である。このとき、Mouse は戦略の比較により $p(2, 0) = 0$ 、 $p(-1, -1) = 0$ とすべきであることもわかる（説明は省略する）。上式の $f(1), f(2), f(-1)$ の値を最小化するために Cat は

$$bf(1) + (1 - a - b)f(2) = af(-1) + (1 - a - b)f(1)$$

$$= af(-2) + bf(-1),$$

$$cf(1) + (1 - c)f(2) = cf(-1),$$

$$(1 - d)f(2) = df(-1) + (1 - d)f(1)$$

となるように a, b, c, d の値を定めるとよく、また等式 $f(-2) = 1 + f(-1)$ も代入してこれらの式の解を求めると $a = 0.3067 \dots$ 、 $b = 0.2807 \dots$ 、 $c = 0.8352 \dots$ 、 $d = 0.1648 \dots$ のとき $f(1) = 4.871 \dots$ 、 $f(2) = f(-1) = 6.066 \dots$ という結果を得る。

以上のように $x \neq 0$ に対して $f(x)$ が求められたので、最後に $n = 1$ での Cat の戦略について考察する。ここで $M_1 - C_1$ を次の表に示す。

		R_C			
		2	1	0	-1
R_M	1	-1	0	1	3
	0	-2	-1	0	2
	-1	-3	-2	-1	1

表から見てわかるとおり、 $Y_1 = 2$ という戦略は $Y_1 = 1$ という戦略に劣るので $q(0, 2) = 0$ としてよい。

$$q(0, 1) = s, q(0, 0) = t,$$

$$q(0, -2) = 1 - s - t \quad (s \geq 0, t \geq 0, 1 - s - t \geq 0)$$

とすると、最初の状態からの平均捕獲時間 $f(0)$ は以下のように表せる。

$$f(0) = 1 + \max\{tf(1) + (1 - s - t)f(3),$$

$$sf(-1) + (1 - s - t)f(2),$$

$$sf(-2) + tf(-1) + (1 - s - t)f(1)\}.$$

このとき Cat は右辺の \max 内の 3 つの値をすべて等しくなるように s, t を定めるのが最適な戦略となる。また、上で得られた $f(1), f(2), f(-1)$ と等式 $f(3) = 1 + f(2)$ 、 $f(-2) = 1 + f(-1)$ を代入してこれらの式の解を求めると $s = 0.263 \dots$ 、 $t = 0.223 \dots$ となり、 $f(0) = 5.717 \dots$ が得られ $E(T) = 5.717 \dots$ となる。例 4.1 と比べ Cat は R_C に -1 を含まない分不利になっており、その影響で $E(T)$ が約 1.985 だけ増加している。ただし、上に述べた単純な戦略 \mathbf{q}_0 に比べると平均捕獲時間はかなり下げられたこともわかる。

以上のように捕獲時間の期待値が計算できるが、 R_M, R_C が複雑になると $E(T)$ を求めるための戦略比較がより面倒となるため、厳密解を得るためには適切な戦略を取捨選択するためのより効率的な判定法を見つけることが今後の課題である。

参考文献

- [1] von Neumann, J. and Morgenstern, O. : Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press(1944).
- [2] 鈴木光男：新装版ゲーム理論入門、共立出版 (2003).