Vol.2017-MPS-113 No.29
Vol.2017-BIO-50 No.29
2017/6/24

斜交座標系に基づく回転不変なブレンド交叉の提案

高濱 徹行[1,a)]　阪井 節子[2,b)]

概要：実数値遺伝的アルゴリズムにおける代表的な交叉の一つにブレンド交叉 (BLX-α) がある．２親交叉であるブレンド交叉は，２親を含む拡張領域に子を生成する交叉であり，実装が容易で多様性に優れているため，多数のアプリケーションで使用されている．しかし，変数ごとに独立した範囲で子を生成するため，変数間の依存関係が強い問題では性能が低下してしまうという問題点がある．本研究では，個体間の差分ベクトルから斜交座標系を構成し，斜交座標上で２親のブレンド交叉を実現する斜交交叉を提案する．斜交交叉は，個体分布が回転すると，斜交座標も回転し，子の生成も回転するため，回転不変性を有する．しかし，斜交交叉は，ブレンド交叉と比較して子の生成範囲が狭くなり多様性が失われやすいという課題がある．この課題に対応するために，ブレンド交叉よりも大きな拡張率を使用し，BLX と組み合わせるという方法について検討した．

Rotation-Invariant Blend Crossover Based on an Oblique Coordinate System

Tetsuyuki Takahama[1,a)]　Setsuko Sakai[2,b)]

Abstract: A representative crossover in real-coded genetic algorithms is blend crossover (BLX-α). The blend crossover, which is a two-parent crossover, has been applied to many applications because it can be implemented easily and it can realize excellent diversity as a child is generated in an extended region including two parents. However, since the child is generated for each variable independently, the performance deteriorates in a problem with strong dependency among variables. In this research, we propose an oblique crossover (OBX) where an oblique coordinate system is built from difference vectors among individuals and a blend crossover along the oblique coordinate system is performed. The oblique crossover is rotation-invariant because the distribution of individuals is rotated, the oblique coordinate system is rotated and a child is generated according to the rotated coordinate system. However, the diversity tends to be lost because the child is generated in narrow area compared with BLX-α. In order to improve the diversity, we propose to use a larger expansion rate than BLX-α and combine OBX with BLX.

1. はじめに

進化的アルゴリズム (Evolutionary Algorithm, EA) は，生物進化の過程をモデル化した最適化アルゴリズムの総称であり，遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm, GA)[1]，進化戦略 (Evolution Strategy, ES)，差分進化 (Differential Evolution, DE)[2] など多くのアルゴリズムが提案されている．EA は，最適化の対象である目的関数の値だけを利用して解を求めることができる直接探索法であり，アルゴリズムの実装が容易であることから，様々な最適化問題を解くために利用されている．

EA における重要な操作として交叉 (crossover) がある．交叉は複数の親個体から子個体を生成する操作であり，様々な交叉が提案されている．本研究では，遺伝子を実数値とする実数値進化的アルゴリズム (real-coded EA) における交叉を対象とする．最適化アルゴリズムにおける性質の一つに回転不変性 (rotation-invariant) がある．回転不変性を有するアルゴリズムは，変数分離型問題を解くのと同じように変数間に強い依存性がある問題を解くことができる

1　広島市立大学
Hiroshima City University
2　広島修道大学
Hiroshima Shudo University
a)　takahama@info.hiroshima-cu.ac.jp
b)　setuko@shudo-u.ac.jp

と考えられる．実数値進化的アルゴリズムにおける代表的な交叉の特徴を表 1 に示す．

表 1　交叉の比較

交　叉	親個体	座標系	回転不変
BLX-α, SBX	2 親	直交座標	無
RIX, EIG	2 親	個体集団から直交座標	有
SPX, REX	多親	個体集団から斜交座標	有
斜交交叉	2 親	個体集団から斜交座標	有

2 親交叉である BLX-α (Blend Crossover)[3] および SBX (Simulated Binary Crossover)[4] は遺伝子座，すなわち問題の次元毎にそれぞれ一様分布および多項式分布に基づいて子個体を生成する．これらの交叉は次元毎に分布を定めるため，回転不変性を持たず，次元間の依存関係が強い問題に対応するのは困難である．回転不変性を有する 2 親交叉としては，個体集団から直交座標系を構成し，その座標軸毎に交叉操作を行う交叉が提案されている．RIX (Rotation-Invariant Crossover)[5] は個体集団の重心から各個体へ向かうベクトルの集合を生成し，ランダム選択されたベクトルからグラムシュミットの直交化によって直交座標系を構成する．EIG (Eigen vector-based crossover)[6] は個体集団の分散共分散行列から得られた固有ベクトルを直交座標系として用いている．個体集団の回転により直交座標も回転するため回転不変性を有している．多親交叉である SPX(Simplex Crossover)[7] および REX(Real-Coded Ensemble Crossover)[8] では，親個体集合を選択し，その重心から各親個体に向かうベクトルを軸として一様分布や正規分布に基づいて子個体を生成する．これらの軸は直交していないため，斜交座標系を用いていることになる．個体集団の回転により斜交座標も回転するため回転不変性を有している．しかし，子個体が個体集団の中心に生成されやすい傾向があるため，多様性が失われやすく，個体集団の外側における探索能力が低下するという問題がある．

本研究では，探索点集合から斜交座標系を構成し，斜交座標上で 2 親のブレンド交叉を実現するという新しい交叉 OBX(Oblique Crossover) を提案する．斜交座標は，個体間の差分ベクトルから構成する．このため，個体分布が回転すると，斜交座標も回転し，子の生成も回転するため，回転不変性を有する．しかし，斜交交叉は，ブレンド交叉と比較して子の生成範囲が狭くなり多様性が失われやすいという課題がある．この課題に対応するために，ブレンド交叉よりも大きな拡張率を使用する必要がある．さらに，多様性を向上させるために，回転不変性は失われるが BLX と組み合わせる方法について検討する．代表的な 13 のベンチマーク関数を用いて OBX の性質を調べる．

本論文の構成は次の通りである．**2.** で代表的な交叉について簡単に説明する．**3.** で斜交交叉を提案する．**4.** にベンチマーク関数に関する実験結果を示す．**5.** はまとめである．

2. 交叉

2.1 2 親交叉

2 親交叉は，集団から 2 個体の親 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ が選択され，交叉によって子が生成される．ここでは，BLX-α について説明する．

BLX-α は，2 つの親が構成する超直方体を拡張した領域に子を生成する交叉であり，子 $\boldsymbol{x}'$ は以下のように生成される．

$$x'_j = r_j p_j + (1 - r_j) q_j \tag{1}$$

r_j は区間 $[-\alpha, 1+\alpha]$ の一様乱数であり，次元毎に独立に生成される．拡張率 $\alpha(\alpha \geq 0)$ は，2 親が対角位置にある超直方体をどれだけ拡張するかを指定するパラメータである．もし α が 0 ならば，2 親が構成する超直方体の内部に生成される．2 次元における BLX-α の様子を図 1 に示す．

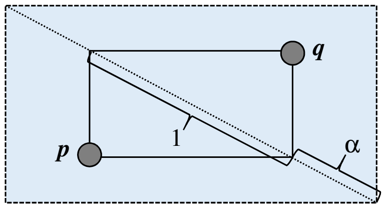

図 1　Area of children generated by BLX-α

2.2 多親交叉

多親交叉とは，UNDX(Unimodal Normal Distribution Crossover)[9]，SPX[10]，REX[11] のように 2 つ以上の親を利用する交叉である．ここでは，REX について説明する．

REX は回転不変かつスケール不変の交叉である．REX は集団から重複なしにランダムに選択された複数の親から子個体を生成する交叉である．親個体集合を $\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m\}$ とし，その重心を $\boldsymbol{x}^g$ とすると，子個体 $\boldsymbol{x}'$ は以下のように生成される．

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^g + \sum_{i=1}^{m} \xi^i (\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^g) \tag{2}$$

$$\xi^i \sim \phi(0, \sigma_\xi^2),\ \sigma_\xi^2 = \frac{1}{m} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}^g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}^i \tag{4}$$

ここで，m は親の数 $(m \geq D)$(D は次元数)，ξ^i は $\phi(\cdot)$ に従う乱数，$\phi(0, \sigma_\xi^2)$ は平均 0，分散 σ_ξ^2 の確率分布である．$\phi(\cdot)$ の例は以下の通りである．

$$\phi(0, \sigma^2) = N(0, (\sqrt{1/m})^2) \tag{5}$$

$$\phi(0, \sigma^2) = U(-\sqrt{3/m}, \sqrt{3/m}) \tag{6}$$

ここで，N は正規分布，$U(l, r)$ は区間 $[l, r]$ の一様乱数で

ある．図 2 に一様乱数を用いた 2 次元 3 親 ($D = 2$, $m = 3$) の場合を示す．

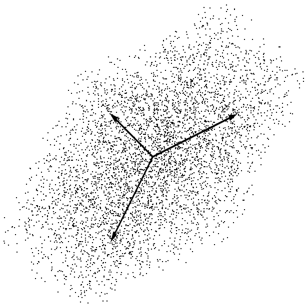

図 2　An example of children generated by REX

3. 斜交座標に基づく 2 親交叉

BLX-α と同様に，集団 $P = \{\boldsymbol{x}^i \,|\, i = 1, 2, \cdots, N\}$ を用いて親ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ から子 $\boldsymbol{x}'$ を生成する．

3.1 斜交交叉

選択された 2 親 $\boldsymbol{p}$,$\boldsymbol{q}$ について，$\boldsymbol{p}$ を出発点，$\boldsymbol{q}$ を目標点とする．このとき，斜交座標の座標ベクトルを以下のように決定する．

(1) 現在位置 $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}$ とする．k=1.

(2) 現在位置と目標点の差ベクトル $\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_{k-1}$ を求める．

(3) 集団 P を用いて斜交座標の座標軸ベクトル $\boldsymbol{v}_k$ を決定する．

(4) $\boldsymbol{d}_k$ の $\boldsymbol{v}_k$ への正射影 $\boldsymbol{e}_k$ を求め，正射影に沿って位置を進めることにより目標位置に近づける．正射影は座標軸の単位ベクトルに対応する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_k &= ||\boldsymbol{d}_k|| \cos\theta \frac{\boldsymbol{v}_k}{||\boldsymbol{v}_k||} = \frac{(\boldsymbol{d}_k, \boldsymbol{v}_k)}{||\boldsymbol{v}_k||} \frac{\boldsymbol{v}_k}{||\boldsymbol{v}_k||} \\
&= \frac{(\boldsymbol{d}_k, \boldsymbol{v}_k)}{(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k)} \boldsymbol{v}_k \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_{k-1} + \boldsymbol{e}_k \qquad (8)
$$

ただし，θ は $\boldsymbol{d}_k$ と $\boldsymbol{v}_k$ のなす角度である．

(5) $k < n - 1$ ならば，k=$k + 1$ として (2) へ戻る．

(6) $k = n - 1$ ならば，$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_{n-1}$ とする．

これにより，明らかに以下の式が成立する．

$$
\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{e}_k \qquad (9)
$$

図 3 に 3 次元斜交交叉の様子を示す．

得られた斜交座標に基づき子 $\boldsymbol{x}'$ を生成する．

$$
\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{p} + \sum_{k=1}^{n} r_k \boldsymbol{e}_k \qquad (10)
$$

r_k は次元毎に生成される一様乱数であり，BLX-α と同様に $[-\alpha, 1 + \alpha]$ の範囲で生成される．この様子を図 4 に示す．

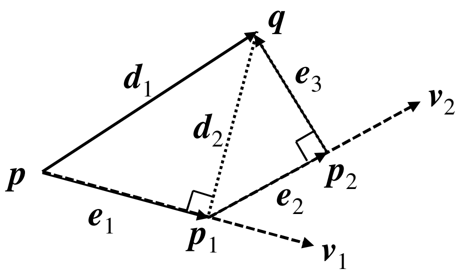

図 3　Oblique crossover

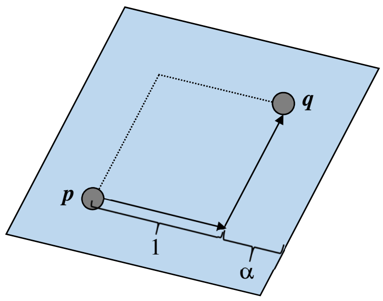

図 4　Area of children generated by OBX

3.2 回転不変性

回転行列を R とすると，$R^T R = I$ が成り立つ．このとき，以下のように回転行列による回転の前後で内積の値は不変である．

$$
\begin{aligned}
(R\boldsymbol{x}, R\boldsymbol{y}) &= (R\boldsymbol{x})^T (R\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T R^T R \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

アルゴリズム中でベクトルの和・差以外の部分は内積であり，$\frac{(\boldsymbol{d}_k, \boldsymbol{v}_k)}{(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k)}$ の値は回転の前後で変化しないため，回転の影響を受けず，回転不変性が成立する．

3.3 実数値 GA

本研究における実数値 GA の擬似コードを図 5 に示す．各個体を必ず親の一つとして選択し，子が良ければ親と置換するという差分進化と同様の方法を採用している．

```
GA with OBX()
{
// Initialize a population
  P=N individuals generated randomly in S;
  FE=FE+N;
  for(t=1; FE < FE_max; t++) {
    for(i=1; i ≤ N; i++) {
      x^r=randomly selected from P s.t. r ≠ i.
      x'=generated from x^i and x^r by OBX;
      FE=FE+1;
// Survivor selection
      if(f(x') < f(x^i)) z^i = x';
      else z^i = x^i;
    }
    P = {z^i};
}
```

図 5　The pseudo-code of real-coded GA with OBX

4. 実験

4.1 テスト問題

表 2 に，テスト問題の関数定義とその初期化領域を示す．なお，D は次元数を表している．

表 2 Test functions of dimension D. These are sphere, Schwefel 2.22, Schwefel 1.2, Schwefel 2.21, Rosenbrock, step, noisy quartic, Schwefel 2.26, Rastrigin, Ackley, Griewank, and two penalized functions, respectively[12]

Test functions	Bound constraints
$f_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D} x_i^2$	$[-100, 100]^D$
$f_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D} \lvert x_i\rvert + \prod_{i=1}^{D} \lvert x_i\rvert$	$[-10, 10]^D$
$f_3(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D} \left(\sum_{j=1}^{i} x_j\right)^2$	$[-100, 100]^D$
$f_4(\boldsymbol{x}) = \max_i\{\lvert x_i\rvert\}$	$[-100, 100]^D$
$f_5(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2\right]$	$[-30, 30]^D$
$f_6(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D} \lfloor x_i + 0.5\rfloor^2$	$[-100, 100]^D$
$f_7(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D} i x_i^4 + rand[0, 1)$	$[-1.28, 1.28]^D$
$f_8(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D} -x_i \sin\sqrt{\lvert x_i\rvert} + D \cdot 418.98288727243369$	$[-500, 500]^D$
$f_9(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{D} \left[x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10\right]$	$[-5.12, 5.12]^D$
$f_{10}(\boldsymbol{x}) = -20\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D} x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\cos(2\pi x_i)\right) + 20 + e$	$[-32, 32]^D$
$f_{11}(x) = \frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{D} x_i^2 - \prod_{i=1}^{D}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	$[-600, 600]^D$
$f_{12}(x) = \frac{\pi}{D}[10\sin^2(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{D-1}(y_i - 1)^2 \{1 + 10\sin^2(\pi y_{i+1})\} + (y_D - 1)^2] + \sum_{i=1}^{D} u(x_i, 10, 100, 4)$ where $y_i = 1 + \frac{1}{4}(x_i + 1)$ and $u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m & x_i > a \\ 0 & -a \le x_i \le a \\ k(-x_i - a)^m & x_i < -a \end{cases}$	$[-50, 50]^D$
$f_{13}(x) = 0.1[\sin^2(3\pi x_1) + \sum_{i=1}^{D-1}(x_i - 1)^2 \{1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})\} + (x_D - 1)^2 \{1 + \sin^2(2\pi x_D)\}] + \sum_{i=1}^{D} u(x_i, 5, 100, 4)$	$[-50, 50]^D$

回転に対する性能を調べるために，得られた解候補を $\boldsymbol{z}$ とし，$\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{z}$ により変換し，$f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求める．ここで，M は回転行列であり，本研究では図 6 に示す Helmert 行列を用いた．

次元数 $D = 30$ に設定し，個体数 $N = 100$，最大関数評価回数は文献 [13] に基づいて決定した．各関数について 50 回の試行を行い，結果を比較する．

4.2 パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ の効果

回転なしの実験および Helmert 行列によって回転した実験の結果を表 3 と表 4 に示す．各関数に対して，各試行における最良値の平均値と標準偏差を示した．さらに，Wilcoxon signed rank test を行い，BLX-α に対して有意に優れていた場合に $+$，有意に劣っていた場合に $-$，有意差がない場合に $=$ を付与した．なお，有意水準 5%の場合は $+, -$，有意水準 1%の場合は $++, --$ で表現している．

回転なしの問題では，OBX は $\alpha = 0.6$ のときが最良の結果となっており，f_3, f_4, f_6, f_7 の 4 関数で BLX よりも有意に優れているが，他の 9 関数で有意に劣っている．回転ありの問題では，OBX は $\alpha = 0.7$ のときが最良の結果となっており，f_2, f_3, f_5, f_7, f_8, f_{12}, f_{13} の 7 関数で BLX よりも有意に優れており，有意に劣っているのは 5 関数である．BLX では，$\alpha = 0.5$ が標準的であるが，OBX では多様性が失われやすいため，α=0.5 よりも 0.6 や 0.7 の方が良い結果となったと考えられる．しかし，回転なしの問題で α を 0.6 から 0.7 に上げても良い結果が得られていないため，α を大きくするだけで多様性を確保することは困難であると考えられる．

4.3 OBX と BLX の併用

OBX と BLX を組み合わせることによって多様性を確保することができるかどうかを調べるために，各個体毎に確率 p で OBX，確率 $1 - p$ で BLX を選択するという方法を提案する．p=0.25, 0.5, 0.75 の 3 通りについて実験を行った．なお，BLX の併用によってアルゴリズム全体としての回転不変性は失われる．

回転なしの問題と回転ありの問題の結果をそれぞれ表 5 と表 6 に示す．回転なしの場合，p の値にかかわらず，f_1, f_3, f_4, f_6, f_7, f_{10} の 6 関数で BLX より有意に優れており，その他の 7 関数で有意に劣っている．回転ありの場合，f_5, f_9 以外の 11 関数で有意に優れている．したがって，OBX と BLX の組み合わせは，変数間の依存性が強い問題には有効であると考えられる．

5. おわりに

本研究では，斜交座標系に基づくブレンド交叉である OBX を提案した．OBX には多様性が失われやすいという課題があり，拡張率 α を大きくしたが，それだけでは良い性能を示すことはできなかった．OBX で変数間の強い依存関係に対応し，BLX で多様性を確保するために，OBX と BLX を確率的に併用するという方法を提案した．これによって，変数間の依存関係が強い回転した問題において，BLX 単独よりも優れた性能を示すことができた．

今後は，問題によって OBX と BLX の適切な比率を動的に調整する方法，OBX 単独でも十分に多様性が維持できるように斜交座標の構成ベクトルを選択する方法について

表 3　Results of OBX with changing α

	BLX-0.5	OBX-0.5	OBX-0.6	OBX-0.7
f_1	**8.24e-42 ± 4.80e-42**	6.12e-21 ± 1.20e-20 (--)	5.08e-29 ± 1.53e-28 (--)	7.11e-28 ± 1.74e-27 (--)
f_2	**5.80e-35 ± 2.42e-35**	4.62e-01 ± 3.38e-01 (--)	6.12e-02 ± 1.10e-01 (--)	4.75e-07 ± 3.11e-06 (--)
f_3	1.56e-02 ± 1.04e-02	9.80e-15 ± 1.67e-14 (++)	2.45e-35 ± 7.47e-35 (++)	**1.90e-46 ± 1.20e-45 (++)**
f_4	7.21e-20 ± 9.80e-20	1.07e-01 ± 1.60e-01 (--)	6.76e-19 ± 2.76e-18 (++)	**3.62e-20 ± 2.19e-19 (++)**
f_5	2.96e+01 ± 1.68e+01	3.66e+01 ± 3.16e+01 (--)	3.38e+01 ± 3.11e+01 (--)	**2.60e+01 ± 1.28e+01 (+)**
f_6	5.92e+01 ± 1.02e+01	**2.53e+01 ± 1.25e+01 (++)**	3.88e+01 ± 2.04e+01 (++)	1.16e+02 ± 3.68e+01 (--)
f_7	1.74e-03 ± 4.54e-04	1.86e-03 ± 8.35e-04 (=)	**1.54e-03 ± 6.00e-04 (+)**	1.71e-03 ± 5.81e-04 (=)
f_8	**5.54e+03 ± 1.03e+03**	7.61e+03 ± 5.14e+02 (--)	7.66e+03 ± 4.10e+02 (--)	7.66e+03 ± 3.28e+02 (--)
f_9	**6.48e+01 ± 2.81e+01**	1.37e+02 ± 2.20e+01 (--)	1.58e+02 ± 1.44e+01 (--)	1.70e+02 ± 1.20e+01 (--)
f_{10}	**1.36e-06 ± 2.90e-07**	9.08e-01 ± 7.37e-01 (--)	1.65e-01 ± 4.11e-01 (--)	1.89e-02 ± 1.30e-01 (--)
f_{11}	**1.48e-04 ± 1.04e-03**	1.27e-02 ± 1.15e-02 (--)	4.48e-03 ± 6.80e-03 (--)	1.40e-03 ± 3.75e-03 (--)
f_{12}	**2.50e-11 ± 2.23e-11**	2.74e-02 ± 7.16e-02 (--)	1.59e-06 ± 1.09e-05 (--)	4.15e-03 ± 2.03e-02 (--)
f_{13}	**3.83e-10 ± 2.81e-10**	4.60e-03 ± 8.19e-03 (--)	1.54e-03 ± 3.81e-03 (--)	1.09e-04 ± 6.94e-04 (--)
+	—	2	4	3
−	—	10	9	9

表 4　Results of OBX with changing α for rotated problems

	BLX-0.5	OBX-0.5	OBX-0.6	OBX-0.7
f_1	**8.24e-42 ± 4.80e-42**	6.12e-21 ± 1.20e-20 (--)	5.08e-29 ± 1.53e-28 (--)	7.11e-28 ± 1.74e-27 (--)
f_2	1.28e-02 ± 6.48e-02	4.61e-01 ± 4.35e-01 (--)	5.38e-02 ± 9.91e-02 (--)	**2.74e-10 ± 1.63e-09 (++)**
f_3	2.39e-02 ± 4.17e-02	1.03e-14 ± 2.28e-14 (++)	1.92e-34 ± 1.29e-33 (++)	**5.05e-47 ± 1.74e-46 (++)**
f_4	**1.57e-21 ± 5.94e-21**	1.59e-01 ± 2.83e-01 (--)	1.85e-19 ± 6.21e-19 (--)	1.85e-21 ± 7.52e-21 (=)
f_5	3.32e+01 ± 2.06e+01	3.78e+01 ± 2.79e+01 (--)	3.55e+01 ± 2.71e+01 (=)	**2.81e+01 ± 1.60e+01 (++)**
f_6	6.01e+01 ± 1.37e+01	**2.61e+01 ± 1.51e+01 (++)**	3.68e+01 ± 1.39e+01 (++)	1.24e+02 ± 4.26e+01 (--)
f_7	1.75e-03 ± 3.55e-04	1.71e-03 ± 7.24e-04 (=)	1.52e-03 ± 6.42e-04 (++)	**1.58e-03 ± 5.18e-04 (+)**
f_8	7.56e+03 ± 3.21e+02	6.94e+03 ± 4.76e+02 (++)	6.44e+03 ± 5.67e+02 (++)	**6.09e+03 ± 6.63e+02 (++)**
f_9	**1.31e+02 ± 1.73e+01**	1.33e+02 ± 2.94e+01 (=)	1.57e+02 ± 1.09e+01 (--)	1.67e+02 ± 1.20e+01 (--)
f_{10}	**1.54e-06 ± 3.12e-07**	7.64e-01 ± 7.23e-01 (--)	2.39e-02 ± 1.62e-01 (--)	3.00e-04 ± 3.17e-04 (--)
f_{11}	**1.32e-05 ± 8.45e-05**	1.20e-02 ± 8.49e-03 (--)	4.71e-03 ± 6.96e-03 (--)	6.09e-04 ± 2.27e-03 (--)
f_{12}	8.36e-06 ± 2.76e-06	1.91e-02 ± 4.51e-02 (--)	2.07e-03 ± 1.45e-02 (++)	**2.38e-07 ± 5.76e-07 (++)**
f_{13}	**1.16e-05 ± 3.21e-06**	3.52e-03 ± 5.54e-03 (−)	1.32e-03 ± 3.57e-03 (++)	4.41e-04 ± 2.15e-03 (++)
+	—	3	6	7
−	—	8	6	5

表 5　Results of OBX-0.6 and BLX-0.5 with changing p

	BLX-0.5	OBX-0.6 w.p. 0.25	OBX-0.6 w.p. 0.5	OBX-0.6 w.p. 0.75
f_1	8.24e-42 ± 4.80e-42	8.07e-44 ± 6.98e-44 (++)	**5.37e-45 ± 7.29e-45 (++)**	2.24e-42 ± 3.81e-42 (++)
f_2	**5.80e-35 ± 2.42e-35**	9.47e-04 ± 4.02e-03 (--)	1.25e-03 ± 7.16e-03 (--)	2.98e-04 ± 1.37e-03 (--)
f_3	1.56e-02 ± 1.04e-02	4.87e-13 ± 9.29e-13 (++)	5.72e-23 ± 2.64e-22 (++)	**2.25e-31 ± 9.63e-31 (++)**
f_4	7.21e-20 ± 9.80e-20	5.36e-26 ± 2.34e-25 (++)	1.64e-24 ± 6.11e-24 (++)	**8.81e-27 ± 2.80e-26 (++)**
f_5	2.96e+01 ± 1.68e+01	2.87e+01 ± 1.39e+01 (−)	**2.67e+01 ± 7.93e+00 (--)**	2.81e+01 ± 1.15e+01 (--)
f_6	5.92e+01 ± 1.02e+01	3.96e+01 ± 8.43e+00 (++)	2.42e+01 ± 4.85e+00 (++)	**2.09e+01 ± 8.39e+00 (++)**
f_7	1.74e-03 ± 4.54e-04	1.37e-03 ± 3.51e-04 (++)	1.22e-03 ± 3.51e-04 (++)	**1.08e-03 ± 3.21e-04 (++)**
f_8	**5.54e+03 ± 1.03e+03**	7.39e+03 ± 3.58e+02 (--)	7.12e+03 ± 4.00e+02 (--)	6.79e+03 ± 4.05e+02 (--)
f_9	**6.48e+01 ± 2.81e+01**	1.33e+02 ± 1.93e+01 (--)	1.47e+02 ± 1.58e+01 (--)	1.52e+02 ± 1.09e+01 (--)
f_{10}	1.36e-06 ± 2.90e-07	7.54e-07 ± 1.65e-07 (++)	**4.42e-07 ± 1.25e-07 (++)**	7.99e-07 ± 3.54e-07 (++)
f_{11}	1.48e-04 ± 1.04e-03	1.18e-07 ± 2.88e-07 (--)	**3.53e-08 ± 3.82e-08 (--)**	7.88e-04 ± 3.21e-03 (--)
f_{12}	**2.50e-11 ± 2.23e-11**	8.81e-08 ± 4.24e-08 (--)	2.85e-09 ± 1.74e-09 (--)	1.16e-09 ± 2.44e-09 (--)
f_{13}	**3.83e-10 ± 2.81e-10**	2.13e-07 ± 8.80e-08 (--)	1.03e-08 ± 6.73e-09 (--)	2.20e-04 ± 1.54e-03 (--)
+	—	6	6	6
−	—	7	7	7

$$
M = \begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{D}} & \frac{1}{\sqrt{D}} & \frac{1}{\sqrt{D}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{D}} & \frac{1}{\sqrt{D}} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{(D-2)+(D-2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{(D-2)+(D-2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{(D-2)+(D-2)^2}} & \cdots & \frac{-(D-2)}{\sqrt{(D-2)+(D-2)^2}} & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \frac{-(D-1)}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}}
\end{pmatrix}
$$

図 6 Helmert matrix

表 6 Results of OBX-0.6 and BLX-0.5 with changing p for rotated problems

	BLX-0.5	OBX-0.6 w.p. 0.25	OBX-0.6 w.p. 0.5	OBX-0.6 w.p. 0.75
f_1	8.24e-42 ± 4.80e-42	8.07e-44 ± 6.98e-44 (++)	**5.37e-45 ± 7.29e-45 (++)**	2.24e-42 ± 3.81e-42 (++)
f_2	1.28e-02 ± 6.48e-02	9.47e-04 ± 4.02e-03 (++)	1.25e-03 ± 7.16e-03 (++)	**2.98e-04 ± 1.37e-03 (+)**
f_3	2.39e-02 ± 4.17e-02	4.87e-13 ± 9.29e-13 (++)	5.72e-23 ± 2.64e-22 (++)	**2.25e-31 ± 9.63e-31 (++)**
f_4	1.57e-21 ± 5.94e-21	5.36e-26 ± 2.34e-25 (++)	1.64e-24 ± 6.11e-24 (++)	**8.81e-27 ± 2.80e-26 (++)**
f_5	3.32e+01 ± 2.06e+01	2.87e+01 ± 1.39e+01 (=)	**2.67e+01 ± 7.93e+00 (=)**	2.81e+01 ± 1.15e+01 (=)
f_6	6.01e+01 ± 1.37e+01	3.96e+01 ± 8.43e+00 (++)	2.42e+01 ± 4.85e+00 (++)	**2.09e+01 ± 8.39e+00 (++)**
f_7	1.75e-03 ± 3.55e-04	1.37e-03 ± 3.51e-04 (++)	1.22e-03 ± 3.51e-04 (++)	**1.08e-03 ± 3.21e-04 (++)**
f_8	7.56e+03 ± 3.21e+02	7.39e+03 ± 3.58e+02 (+)	7.12e+03 ± 4.00e+02 (++)	**6.79e+03 ± 4.05e+02 (++)**
f_9	**1.31e+02 ± 1.73e+01**	1.33e+02 ± 1.93e+01 (=)	1.47e+02 ± 1.58e+01 (--)	1.52e+02 ± 1.09e+01 (--)
f_{10}	1.54e-06 ± 3.12e-07	7.54e-07 ± 1.65e-07 (++)	**4.42e-07 ± 1.25e-07 (++)**	7.99e-07 ± 3.54e-07 (++)
f_{11}	1.32e-05 ± 8.45e-05	1.18e-07 ± 2.88e-07 (++)	**3.53e-08 ± 3.82e-08 (++)**	7.88e-04 ± 3.21e-03 (++)
f_{12}	8.36e-06 ± 2.76e-06	8.81e-08 ± 4.24e-08 (++)	2.85e-09 ± 1.74e-09 (++)	**1.16e-09 ± 2.44e-09 (++)**
f_{13}	1.16e-05 ± 3.21e-06	2.13e-07 ± 8.80e-08 (++)	**1.03e-08 ± 6.73e-09 (++)**	2.20e-04 ± 1.54e-03 (++)
+	—	11	11	11
−	—	0	1	1

検討する予定である．また，OBX は 2 つのベクトルをブレンドする仕組みを有するアルゴリズム．例えば Particle Swarm Optimization などに応用可能であると考えられるため，実数値 GA 以外のアルゴリズムへの導入を検討したいと考えている．

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 26350443, 17K00311 の助成を受けて行われた．

参考文献

[1] Goldberg, D. E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison Wesley (1989).

[2] Storn, R. and Price, K.: Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization*, Vol. 11, pp. 341–359 (1997).

[3] Eshelman, L. J. and Schaffer, J. D.: Real-Coded Genetic Algorithms and Interval Schemata, *Foundations of Genetic Algorithms 2* (Whitley, L. D., ed.), Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA, pp. 187–202 (1993).

[4] Deb, K. and Agrawal, R. B.: Simulated binary crossover for continuous search space, *Complex systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 115–148 (1995).

[5] Takahama, T. and Sakai, S.: Solving Nonlinear Optimization Problems by Differential Evolution with a Rotation-Invariant Crossover Operation using Gram-Schmidt process, *Proc. of Second World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (NaBIC2010)*, pp. 533–540 (2010).

[6] Guo, S.-M. and Yang, C.-C.: Enhancing differential evolution utilizing eigenvector-based crossover operator, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 19, No. 1, pp. 31–49 (2015).

[7] 樋口隆英，筒井茂義，山村雅之：実数値 GA におけるシンプレクス交叉の提案，人工知能学会誌，Vol. 16, No. 3, pp. 147–155 (2001).

[8] 秋本洋平，永田裕一，佐久間淳，小野　功，小林重信：適応的実数値交叉 AREX の提案と評価，人工知能学会誌，Vol. 26, No. 6, pp. 446–458 (2009).

[9] Ono, I. and Kobayashi, S.: A Real Coded Genetic Algorithm for Function Optimization Using Unimodal Normal Distributed Crossover, *Proc. of the 7th International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 246–253 (1997).

[10] Tsutsui, S., Yamamura, M. and Higuchi, T.: Multi-Parent Recombination with Simplex Crossover in Real Coded Genetic Algorithms, *Proc. of Genetic and Evolutionary Computation Conference(GECCO'99)*, pp. 657–664 (1999).

[11] Kobayashi, S.: The Frontiers of Real-Coded Genetic Algorithms, *Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence*, Vol. 24, No. 1, pp. 147–162 (2009).

[12] Yao, X., Liu, Y., Liang, K.-H. and Lin, G.: Fast Evolutionary Algorithms, *Advances in Evolutionary Computing: Theory and Applications* (Ghosh, A. and Tsutsui, S., eds.), Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, pp. 45–94 (2003).

[13] Zhang, J. and Sanderson, A. C.: JADE: Adaptive Differential Evolution With Optional External Archive, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 13, No. 5, pp. 945–958 (2009).