3C-03

SAT ソルバーを用いた Magic Graph の構成とその応用

杉山 雅英 (会津大学)

1. まえがき SAT ソルバーおよび順序符号化手法を用いた Magic Graph を構成法とその応用 (虫食いおよび辺への指定数字対の配置) について述べる。

2. Magic Graph と magic sum グラフ G の頂点と辺のノードに連続した $1 \sim n$ の数を割り当て各辺毎の数字の和が一定になるとき Magic Graph、その一定の和 S を定和 (magic sum) とよぶ [1]。頂点・辺の個数を v, e、辺に置くノード数を m とする。頂点には一つのノードとするので使用する数字は $n = me + v$ で与えられる。$1 \sim n$ の数字の配置を L で表す。

2.1 定和方程式と定和の計算 次数 d の regular graph G の頂点 i に配置する数字を x_i、その和を $X = \sum_i^v x_i$ とする。定和 S は定和方程式 (1) を満す。

$$e \cdot S = (d-1)X + \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

式 (1) から性質 1 が得られる。

性質 1 定和の最大・最小

1. 定和 S は X の値で決定されるので S の最大・最小 $S_{\max}, S_{\min}$ は X の最大・最小 $X_{\max}, X_{\min}$ で与えられる。
2. X の最小値 $X_{\min}$ は頂点に $1 \sim v$ を配置する場合であり、最大値 $X_{\max}$ は頂点に $n-v+1 \sim n$ を配置する場合である。$X_{\max} = nv - \frac{v(v-1)}{2}$, $X_{\min} = \frac{v(v+1)}{2}$ で与えられる。

v 個の頂点に小さい数から置く場合を最小定和 $S_{\min}$・最小配置 $L_{\min}$、大きい数から置く場合を最大定和 $S_{\max}$・最大配置 $L_{\max}$ と呼ぶ。式 (1) から S の最大・最小 $S_{\max}, S_{\min}$ は式 (2) で与えられる [2]。

$$\begin{cases} S_{\min} = & mv + (v+1) + \frac{1}{2} \cdot (m^2 e + m) \\ S_{\max} = & 2me + (v+1) + \frac{1}{2} \cdot (m^2 e + m) \end{cases} \tag{2}$$

式 (1) を用いて性質 2 が得られる。

性質 2 G の辺の個数 e が偶数であり、全ての頂点の次数が奇数とする。 $n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod.}\ 4)$ であれば定和配置は存在しない。

性質 2 から Wheel W_k ($k \equiv 3 (\mathrm{mod.}\ 4)$) や正４，１２，２０面体において m が奇数の定和配置は存在しないことが導かれる [3]。

3. ソルバーと符号化 命題論理式の充足可能性判定問題 (SAT: Boolean Satisfiability testing) は命題論理式を真にする値割り当てを探す組み合せ探索問題である [4]。SAT に関する特集記事 [5] の「SAT 技術の進化」,「SAT とパズル」を参照すると良い。SAT ソルバーとしては minisat が良く知られている。制約充足問題 (CSP: Constraint Satisfaction Problems) を SAT ソルバーに解かせるための CNF 記法への変換を符号化とよぶ。順序符号化法 (sugar) は多くの問題に対して優れた性能を持つと報告されている [6]。 本報告では minisat と sugar を用いて Magic Graph を構成する。

4. ソルバーによる Magic Graph の構成
グラフの頂点数 v、辺の数 e、m の値及び辺の接続情報 (辺行列) から csp ファイルを生成する。正４面体 ($m = 2$) の場合 $n = 16$ であるので 16 個の変数 (`v_i`, `e_i_j`) が $1 \sim 16$ の値を変化すること、全ての変数が異なる値を持つこと (`alldifferent`)、$e = 6$ 個の辺の定和が $S = 26$ であること (`(= (+ v_0 e_0_0 e_0_1 v_1) 26 )`) を記述する。実現可能 (`SATISFIABLE`) の場合には各変数への値の配置が得られる。

$m = 2$ の正４面体、正６面体、正８面体の可能な全ての定和に対して解を探索できた。実行時間は正４面体の場合、全ての定和に対して大きな差はなく平均 1.44 秒、正６面体、正８面体の場合、探索時間は定和の値によって大きく異なり最小定和・最大定和に近いほど探索に要する時間が大きくなった。平均値ではそれぞれ 204.63 秒、50.36 秒であった。

5. ソルバー Magic Graph の応用

5.1 虫食い Magic Graph 構成した Magic Graph のいくつかの数字を虫食いにして元の Magic Graph を完成させるクイズにおいて元の Magic Graph 以外の解が存在しないかどうかをソルバーを用いて検証する。

正４面体 ($m = 2$) に対する虫食い Magic Graph の復元率を図 1 に示す。ここで初期配置は最小定和に対応する配置である。$n = 16$ であり虫食いの穴数 $h = 10$ に対して 8008 個の組み合せ中 17 個 (0.21%) が虫食い

* SAT Solver Applied to Magic Graph Generation and Its Applications, M. Sugiyama (The Univ. of Aizu)

Magic Graph となる。図 2 に $h = 10$ の虫食い Magic Graph を示す。1 から 16 までの数字の内、10 個 (1, 2, 3, 4, 9, 11, 12, 13, 15, 16) が虫食いとなっている。

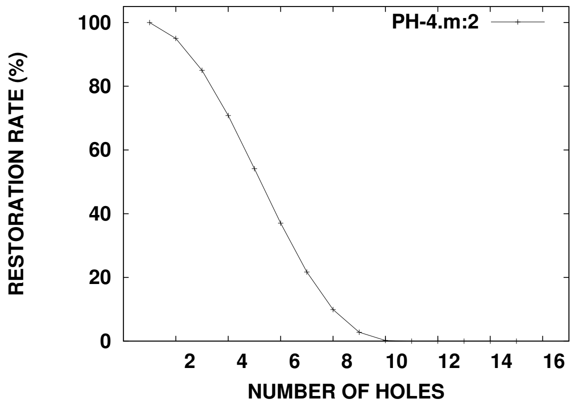

図 1: **正四面体 ($m = 2$) の虫食い Magic Graph の穴数と復元率の関係**

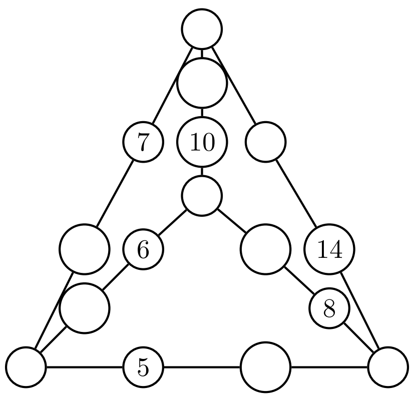

図 2: **正四面体の虫食い Magic Graph の例** ($m = 2, n = 16, k : 10$)

5.2 数字対配置 Magic Graph　アルブレヒト・デューラー (Albrecht DÜRER) の版画作品「メランコリア I」には図 3 の 4 次の魔方陣が描かれており、その最下行の中央の 2 数 15, 14 は製作年 1514 を表わしている。デューラーの魔方陣に対応して $m = 2$ として数字対 i, j を辺に配置する。使用する数字が $1 \sim n$ の時、この中の 2 つの数字の組み合せの数は ${}_n\mathrm{C}_2$ である。ここで数字対 (i, j) $(i < j)$ と数字対 $(n+1-j, n+1-i)$ の実現可能性とは同値であるので、実現可能点は直線 $y = n + 1 - x$ に対して対称となる。

正四面体 ($m = 2$) の場合、 $n = 16$ であり、デューラーの作った 4 次の魔方陣と同一である。探索による実現可能な数字対を図 4 に示す。120 通りの数字対の組み合せに対して 116 通り (96.7%) が実現可能である。

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

図 3: 「メランコリア I」の魔方陣

実現不可能な対は $(1, 2), (1, 3), (15, 16), (14, 16)$ の 4 通りのみである。デューラーの作った魔方陣に対応する $15, 14$ を持つ正 4 面体 Magic Graph は構成可能である。

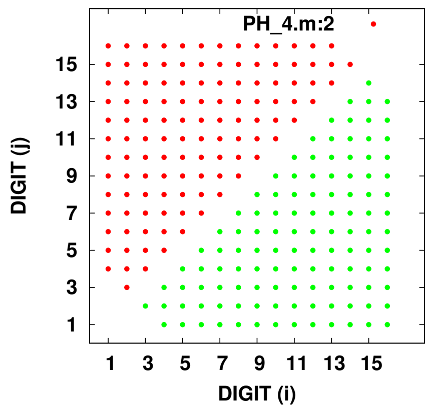

図 4: **正四面体の数字対配置可能点** ($m = 2$)

6. むすび　SAT ソルバーを用いた Magic Graph の構成法とその応用として二つのクイズとその性質について述べた。今後の課題は、正１２、２０面体 ($m = 2$) の全ての定和の実現性の検証、大規模なグラフに対してソルバーの動作検証、である。

謝辞 ソルバーに関してご教示いただき、議論していただいた神保秀司先生 (岡山大学大学院 自然科学研究科)、保木邦仁先生 (電通大大学院 情報理工学研究科) に感謝します。

参考文献

[1] A. M. Marr, W. D. Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhuser/Springer, New York. (2013)

[2] 杉山, グラフへの整数配置問題, 情報処理学会, 3C-2 (2014-03).

[3] 杉山, 正多面体における Magic Graph の構成, 情報処理学会, 7B-02 (2016-03).

[4] 丹生, 命題論理の充足可能性判定問題への符号化を用いた制約充足問題の解法に関する研究, 神戸大学大学院工学研究科博士論文 (2012-01).

[5] 番原, 鍋島, 森畑, SAT 技術の進化と応用, 情報処理, Vol.57, No.8, pp.702-737 (2016-08).

[6] 田村, 丹生, 番原, SAT 変換に基づく制約ソルバーとその性能評価, コンピュータソフトウェア, Vol.27, No.4, pp.183-196 (2008-10).