5A-07

領域隣接情報が厳密な円の Voronoi 図の近似構成の性能評価

今井　敏行
† 和歌山大学システム工学部

1　概要

円の Voronoi 図の構成では，円周を一様に点列近似し点の Voronoi 図の構成法を利用する近似構成法が，よく用いられるが，精度と計算量が両立しない．厳密な位相情報の獲得のみ注力して，一様な近似をやめ，近似点数を減らすことで高速化けした構成法を提案し，この構成法の計算量の評価実験を行う．

2　はじめに

平面上に n 個の点 $g_1, \cdots, g_n$ が与えられたとき，「どの点に最も近いか」を基準に平面を与えられた点の勢力圏に分割した図を Voronoi 図という．　与えられた点を母点あるいは生成元, 勢力圏を Voronoi 領域, 隣接する勢力圏の共通境界を Voronoi 辺, Voronoi 辺の端点を Voronoi 点という．以下, 適宜, 領域, 辺, 頂点と略記する. Voronoi 図は計算幾何学の中心課題のひとつであるとともに, その自然な定義から, 幅広い応用を持つ．実用上，生成元を線分や円に一般化した勢力圏図の需要も高い. 生成元が円の勢力圏図を 円 Voronoi 図とよび, 元の図は点 Voronoi 図とよぶ. ここでは, 生成元どうしが接したり，任意の 4 生成元が同一円周 (直線を含む) に接ししたりしないものと仮定する．

点 Voronoi 図には, いくつもの構成アルゴリズムが提案されプログラムに実装されている. 生成元を一般化すると，構成アルゴリズム設計は点 Voronoi 図のときに較べて難しくなる. そのため, たとえば円 Voronoi 図では，生成元の円周を等間隔の多数の点列で近似し，点 Voronoi 図をもって円 Voronoi 図の近似構成とするようなことが普通に行われる [3]. 円 Voronoi 図でも同様である. このような近似構成をとると, 非常に計算時間がかかる上, 得られた図は厳密構成した Voronoi 図と較べて, 領域の隣接関係すら保証されない. 辺，領域などの隣接，接続関係のように，離散値をとる情報を位相情報，Voronoi 点の座標のような連続値をとる情報を計量情報とよぶことにする．一般に，図形に関する情報はこの 2 情報に分けられる. 筆者らは, 線分の Voronoi 図を点 Voronoi 図で近似構成するときに, 不要な点を極力とらずに位相情報の正確さを保証するアルゴリズムを提案した [2]．位相情報が正しければ，Voronoi 点の座標など計量情報は高速な線形オーダで求められる．その意味で, この近似構成は実質的には厳密構成であるといえる.

Evaluating the Performance of the Topologically Strict Construction of the Approximate Voronoi Diagram for Circles
†Toshiyuki IMAI
†Faculty of Systems Engineering, Wakayama University

3　局所 flip と提案したアルゴリズム

生成元の円を点列で近似する. 点 Voronoi 図から, 両側の母点が同一生成元の円に属する Voronoi 辺を消去したものを擬似 Voronoi 図とよぶ. 擬似 Voronoi 図の辺は折れ線になる. 無限に伸びる Voronoi 辺は生成元の凸包上隣接する生成元の間にある辺なので, 擬似 Voronoi 図と真の Voronoi 図で, 無限に伸びる Voronoi 辺が表す領域の隣接関係は正しいと仮定できる.

点 Voronoi 図, 円 Voronoi 図と擬似 Voronoi 図に共通した操作として, 生成元 g_1, g_2 の間に辺 e があり, その両端の頂点が g_1, g_2, g_3 および g_2, g_1, g_4 によって時計回りに囲まれるとき, この局所的な構造を, 生成元 g_3, g_4 の間に辺 e' があり, その両端の頂点が g_2, g_3, g_4 および g_4, g_3, g_1 によって時計回りに囲まれるものに差し替えることを e から e' への局所 flip ということにする.

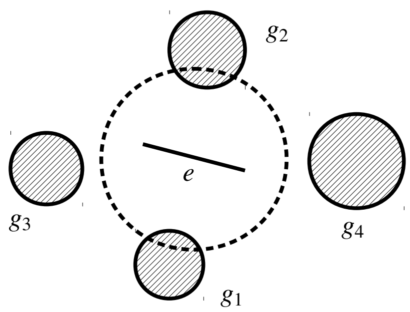

図 1: 局所 flip 不可能

生成元 g_3, g_4 と共有点をもつ円で, g_1, g_2 が円の外部にあるようなものがとれるとき, e は e' に局所 flip 可能という．言い換えると, 局所 flip 可能とは, この 4 生成元 g_1, g_2, g_3, g_4 のみで Voronoi 図を構成すると存在する辺が g_1, g_2 の間の辺 e ではなく g_3, g_4 の間の辺 e' であることを意味する．すべての辺において局所 flip 可能でないとき, この Voronoi 図は局所 flip 不可能であるとよぶ. 擬似 Voronoi 図が flip 不可能なことと隣接関係が正しい Voronoi 図であることは同値であること [1] を利用

してアルゴリズムが成立する.

提案したアルゴリズムの概容は次のとおりである.

構造が厳密な円 Voronoi 図の近似構成

1. 全円の中心 (および円周上の数点) を生成元とする点 Voronoi 図を描く. 2. 擬似 Voronoi 図の各辺において, 局所 flip が不可能と判断できないものがある限り, 射影点 4 点を生成元に追加して点 Voronoi 図を更新する. 3. 擬似 Voronoi 図を出力して終了.

上記 2 において, 局所 flip 不可能性の判断は, 点 Voronoi 図の双対の Delaunay 三角形分割により行う, 擬似 Voronoi 図の Voronoi 辺 e の両側の生成元の円を g_1, g_2 とするとき, 折れ線 e 上は点 Voronoi 図の Voronoi 点 v の列があるが, それに対応する Delaunay 三角形の列を考える. 折れ線 e 上に中心をおく空円を三角形列の頂点である母点と 2 個以上と接するようにして e 上を移動させたとき, 空円が e を囲む 4 円のうち g_1, g_2 以外と共有点を持たないことがあるならば, e が局所 flip 不可能と判定できる. つまり, e が局所 flip 不可能と判定できないときには, e を囲む 4 円すべてと共有点をもつ空円が存在する. 手続きとしては, まず三角形列の各三角形の外接円で判定する. それで判断できる場合以外, すなわち, 外接円で (1) g_1, g_2 以外と共有点を持たない (判定可能) か, (2) 4 円と共有点がある (判定不可能) 場合以外では, 折れ線 e 上で隣接する Voronoi 点 v_1, v_2 で g_1, g_2 を含む異なる 3 円と共有点をもつものが存在する. 折れ線 e 上 v_1, v_2 の間で上記 (1), (2) のどちらを満たす空円があるかを円の中心 v の 2 分探索によって決定する.

空円が 4 円と共有点があるすなわち, 局所 flip 不可能と判定不可能な場合, 生成元の円周上に点を追加して点 Voronoi 図を更新するが, 円の中心 v から 4 円までの最短距離を与える円周上の点を追加する. この点を v から各円周への射影点とよぶ. 射影点は v から各円周に下ろした垂線の足になり, 空円の内部の点になる. したがって, この空円は点 Voronoi 図の更新後は存在できない.

4 アルゴリズムの性能評価

提案したアルゴリズムは，領域の隣接関係という構造情報の厳密性を保証できる場合には，生成元の円周をより細かい点列で近似しない．そのため，一様な近似より少ない点で擬似 Voronoi 図が構成できるといえる．一方，構造情報が厳密に得られるまで逐次的に点を追加し, flip により Voronoi 図を更新していくため，最終的な点数を m として，計算量的には $O(m^2)$ かかる．

総点数 m が生成元の円の総数 n に対して，どのくらいの値になるか考える．提案したアルゴリズムを，4 円が同一円周に接する場合に適用すると，射影点をいくら追加しても局所 flip が不可能と判断できないものが残る．仮定により, このような入力 (退化入力) がないと仮定されているが，退化に近い場合には，総点数 m は, 円の数 n にかかわらず, いくらでも大きくなり得る．

今，この仮定を外し，ある辺 e の周りの 4 円が同一円周 C に接する場合を考える．このとき，追加される射影点は，C の各円周の 4 接点に収束する無限点列になる．点の追加により，更新された擬似 Voronoi 図の Voronoi 点も円 C の中心に収束する点列になる．射影点の追加のときに Voronoi 点が円 C の中心から ε だけ離れていたとすると，前回追加された射影点は $O(\sqrt{\varepsilon})$ だけ接点から離れており，今回の追加で $O(\varepsilon)$ だけ接点から離れたところに射影点が追加される．すなわち，射影点は 2 次収束する．退化入力に近い場合には，ほぼ 2 次収束に近い挙動を示しながら射影点が追加され，途中でアルゴリズムが終了する．この場合，収束先に「ある程度」近づいたところで打ち切りになるとみなせる．この「ある程度」が「どの程度退化入力に近いか」を表すことになるが，2 次収束であるので，早い段階で打ち切られる．特に退化に近いとみなされないような場合には，非常に少ない点数で，構造情報の厳密性が保証される．これらを，数値実験で検証する．

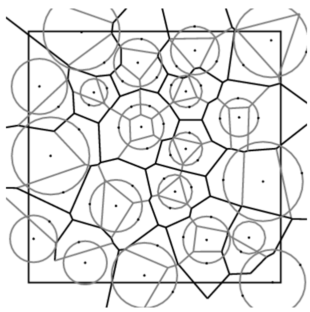

図 2: 出力例 (無限に延びる辺は省略)

参考文献

[1] 今井敏行, 一般化 Voronoi 図の一貫性と局所フリップ不可能性について, 日本応用数理学会 2004 年度年会講演予稿集 (2004), 452–453.

[2] 今井敏行, 渡辺秀臣, 点 Voronoi 図による線分 Voronoi 図の位相的に正しい近似構成法, 日本応用数理学会 2005 年度年会講演予稿集 (2005), 206–207.

[3] 杉原厚吉, 計算幾何学, 朝倉書店, 2013.