

# 実対称定値一般固有値問題を解くための 少数のレゾルベントの多項式を用いたフィルタの設計法

村上 弘<sup>1,a)</sup>

**概要：**フィルタ対角化法を用いて、実対称定値一般固有値問題の固有値が指定された区間にある固有対の近似を求める。本報告ではフィルタを少数のレゾルベントの多項式として設計する方法について検討する。フィルタに用いるレゾルベントが少数ならば、レゾルベントの作用に対応する連立一次方程式を直接法により解く場合には、必要な行列分解の数が少なくて済む利点がある。

**キーワード：**フィルタ対角化, 固有値問題, レゾルベント, 多項式

## Designs of Filters Which Use a Polynomial of a Few Resolvents to Solve Real Symmetric-Definite Generalized Eigenproblem

**Abstract:** By the use of the filter diagonalization method, we solve approximations of those pairs of a real symmetric-definite generalized eigenproblem whose eigenvalues are in the specified interval. In this report, we consider methods to design the filter as a polynomial of a small number of resolvents. When the filter consists of a small number of resolvents, and if we solve those simultaneous linear equations which correspond to resolvents by matrix decomposition method, then we have an advantage that only a small number of matrix decompositions are required in the application of the filter.

**Keywords:** filter diagonalization, eigenproblem, resolvent, polynomial

### 1. はじめに

係数  $A$  と  $B$  が実対称で  $B$  は正定値である一般固有値問題  $Av = \lambda Bv$  の固有対で固有値が指定した区間にあるものをフィルタ対角化法を用いて求めるものとする。

いまシフト  $\rho$  のレゾルベントを  $\mathcal{R}(\rho) = (A - \rho B)^{-1}B$  と定義する。特性が十分良いフィルタを複素数のシフトを持つレゾルベント 8 個から 16 個程度の線形結合の実部として構成できることが既に判っている。レゾルベント  $\mathcal{R}(\rho)$  のベクトルの組  $V$  に対する作用は、係数が行列  $C = A - \rho B$  で右辺ベクトルの組が  $BV$  である連立一次方程式を解いて実現する ( $C$  はシフト  $\rho$  が実数ならば実対称,  $\rho$  が複素数ならば複素対称であり,  $C$  の非零要素の位置は  $A$  と  $B$  の非零要素の位置の合併になるので,  $A$  と  $B$  が極めて疎な行列であれば  $C$  も同様であり, たとえば  $A$  と  $B$  が帯行列な

らば  $C$  も帯行列になる)。いま連立一次方程式を行列分解を用いて直接法により解くとすれば, フィルタの作用を実現するには少なくともフィルタを構成するレゾルベントと同じ数だけの行列分解が必要である (連立一次方程式を反復法で解く場合も, 前処理として行列の不完全分解を用いるのであれば, 少なくともフィルタを構成するレゾルベントと同じ数だけの行列の不完全分解が必要になる)。

そこでこれまでは行列分解の数を最も少なくするために, フィルタをただ一つのレゾルベントの (シフトが複素数の場合にはレゾルベントの定数倍の実部の) 作用の「多項式」として構成する方法を試みてきた。その場合には用いるレゾルベントが一つだけなので, 連立一次方程式を直接法で解く場合には行列分解も一つだけで済み, レゾルベントを多数用いる場合に比べて行列分解に費やす演算量の低減が期待できる。

求めたい固有値の区間が固有値分布の端の場合にはレゾルベントのシフトを固有値分布の範囲の外側にある実数にすると, フィルタ対角化法の計算の全体が実数演算だけに構成できる。そうしてレゾルベントに対応する連立一

<sup>1</sup> 首都大学東京・数理情報科学専攻  
Department of Mathematics and Information Sciences,  
Tokyo Metropolitan University

<sup>a)</sup> mrkmhrsh@tmu.ac.jp

次方程式の係数行列  $C$  は実対称で定値になるので、ピボット交換なしの修正コレスキー法で安定に解けて、さらに  $C$  が帯であれば帯専用の解法が使える。

求めたい固有値の区間が固有値分布の一般的な位置にある場合にはレゾルベントのシフトを (実数ではない) 複素数にする。シフトが互いに複素共役である二つのレゾルベントを同じ実ベクトルに作用させて得られる二つの複素ベクトルは互いに複素共役になる性質を利用すると、片方 (たとえばシフトが正の虚部を持つ複素数) のレゾルベントの定数倍の実部を実線形作用素として、その作用素の多項式によりフィルタが構成できることが示せる。この場合にも用いるレゾルベントは一つだけで済むので、対応する連立一次方程式を直接法で解く場合には分解する行列は一つだけになる。そうしてこの場合はレゾルベントに対応する連立一次方程式の係数行列  $C$  は正則で複素対称 ( $C^T = C$ ) になるので、複素対称性を用いた修正コレスキー法が使える。もしもピボット交換なしの場合の数値安定性に問題があれば、計算量や記憶量は増加するが  $C$  の複素対称性を利用しない片側ピボット交換付きの複素数版の  $LU$  分解を行なうことが可能で、さらに  $C$  が帯行列ならば、帯用の修正コレスキー法や帯用の片側ピボット交換付きの  $LU$  分解を用いることができる。

## 2. 準備

実対称定値一般固有値問題  $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$  の任意の固有対  $(\lambda, \mathbf{v})$  の固有値は必ず実数であり、固有ベクトル  $\mathbf{v}$  も実にとれるのでそうであるとする。さらに固有ベクトル全体は空間全体を張る  $B$ -正規直交系にとれる。いまこの固有値問題に対するシフト  $\rho$  のレゾルベント  $R$  を  $R(\rho) = (A - \rho B)^{-1}B$  と定義する。任意の固有対  $(\lambda, \mathbf{v})$  に対して  $R(\rho)\mathbf{v} = 1/(\lambda - \rho) \cdot \mathbf{v}$  であることから、 $P(x)$  を  $x$  の任意の多項式とすると、 $P(R)\mathbf{v} = P(1/(\lambda - \rho))\mathbf{v}$  となる。するとフィルタ  $\mathcal{F}$  がレゾルベント  $R(\rho)$  の多項式として  $\mathcal{F} = P(R(\rho))$  と書ければ、任意の固有対  $(\lambda, \mathbf{v})$  に対してフィルタ  $\mathcal{F}$  の  $\mathbf{v}$  に対する作用は  $\mathcal{F}\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}$  であり、フィルタの伝達関数は  $f(\lambda) = P(1/(\lambda - \rho))$  となる。

いま固有値の指定区間  $\lambda \in [a, b]$  と標準区間  $t \in [0, 1]$  の間の一次変換  $\lambda = a + (b - a)t$  を用いた対応で  $\lambda$  の正規化座標  $t$  を定義する。そうして  $\mu > 1$  と  $\sigma > 0$  をパラメータとして、非負領域  $0 \leq t$  で定義された有理関数  $x(t) = (\mu + \sigma)/(t + \sigma)$  をとり、いまから構成するフィルタ  $\mathcal{F}$  の伝達関数  $f(\lambda)$  を正規化座標  $t$  を用いて表した有理関数  $g(t) = f(\lambda)$  がある  $n$  次多項式  $P$  を用いて  $g(t) = P(x(t))$  と書けるとする。この  $g(t)$  は無限遠  $t = \infty$  で有界な値  $P(0)$  をとり、また複素数の範囲に於いて  $g(t)$  の極は  $x(t)$  から由来する負の実数  $-\sigma$  だけであり、それは  $n$  位の極である。このことから  $g(t)$  に対応する線形作用素であるフィルタ  $\mathcal{F}$  はこの  $g(t)$  の唯一の極に対応する実数をシフトとするレゾルベントの多項式である。

$x(t)$  は定義域とした非負の実数の範囲では狭義単調減少で  $x(\infty) = 0$ ,  $x(\mu) = 1$  である。そうしていま  $x_H = x(0) = 1 + \mu/\sigma$ ,  $x_L = x(1) = 1 + (\mu - 1)/(1 + \sigma)$  とおくと  $1 < x_L < x_H$  である。これらのことから定義域  $0 \leq t$  に関する通過域、遷移域、阻止域への区分けをそれぞれ  $[0, 1]$ ,  $(1, \mu)$ ,  $[\mu, \infty)$  とするとき、対応する  $x(t)$  の値域はそれぞれ  $[x_L, x_H]$ ,  $(1, x_L)$ ,  $[0, 1]$  となる。

## 3. 関数合成による伝達関数の拡張

いま正規化座標  $t$  で表したフィルタ  $\mathcal{F}$  の伝達関数  $g(t)$  が半無限区間  $t \geq 0$  で有界な実有理関数であるとし、その区間  $t \geq 0$  の通過域 (passband), 遷移域 (transitionband), 阻止域 (stopband) の各領域への区分けをそれぞれ  $[0, 1]$ ,  $(1, \mu)$ ,  $[\mu, \infty)$  (ただし  $\mu > 1$ ) とする。そうして通過域に於ける  $g(t)$  の最大値は 1 に規格化されているとして、通過域に於ける  $g(t)$  の最小値を  $g_p$ , 阻止域に於ける  $|g(t)|$  の最大値を  $g_s$  とする (この  $g_p$  と  $g_s$  を伝達率の閾値と呼ぶことにする)。通過域に於ける伝達関数の最大最小比は  $g_p$  の逆数である。

そうしていま  $t \geq 0$  を定義域とする別の実有理関数  $h(t)$  が以下の性質を満たすとする。ただし  $1 < \mu'$  であるとする。

- $h(t)$  は  $t \in [0, 1]$  を  $[0, 1]$  全体に写す (対応は一对一でなくて良い)。
- $h(t)$  は  $t \in [1, \mu']$  で単調増加。
- $h(t)$  の  $t \in [\mu', \infty)$  に於ける最小値は  $\mu$  で、特に  $h(\mu') = \mu$ 。

そのとき  $g(t)$  と  $h(t)$  の合成関数  $g'(t) \equiv g(h(t))$  を定義すると、 $g'(t)$  も有理関数であり、 $g'(t)$  の定義域  $t \geq 0$  の通過域、遷移域、阻止域への区分けをそれぞれ  $[0, 1]$ ,  $(1, \mu')$ ,  $[\mu', \infty)$  と設定すると、 $g'(t)$  と  $g(t)$  の伝達率の閾値は両者で一致して、通過域に於ける最小値は  $g_p$  で阻止域に於ける大きさの最大値も  $g_s$  となることがわかる。しかも  $g'(t)$  も無限遠で有界な有理関数になるので、その部分分数分解の相異なる極ごとに相異なるシフトのレゾルベントの多項式を対応させて線形作用素  $\mathcal{F}'$  を構成すれば、その伝達関数は  $g'(t)$  になる。

元の伝達関数  $g(t)$  とこのような関数合成で得られた伝達関数  $g'(t)$  を比べると、最大値 1 と伝達率の閾値  $g_p$  と  $g_s$  はそれぞれ両方で一致するが、遷移域の幅を与えるパラメータが異なり、 $g(t)$  では  $\mu$  であるが  $g'(t)$  では  $\mu'$  である。つまり伝達関数  $g(t)$  の形状パラメータの三つ組は  $(\mu, g_p, g_s)$  から適切な性質を持つ関数  $h(t)$  との合成で  $(\mu', g_p, g_s)$  に変わる。そうして関係  $h(\mu') = \mu$  から決まる  $\mu'$  が  $\mu' < \mu$  を満たすと、合成で得られた伝達関数  $g'(t)$  の遷移域の幅は元の伝達関数  $g(t)$  のものよりも狭くなる。

以下では、アナログ電気回路理論の典型フィルタの四種類として知られる「バターワース (Butterworth) 型」, 「チェビシェフ (Chebyshev) 型」, 「逆チェビシェフ (inverse-

Chebyshev) 型], 「楕円 (elliptic) 型」のうち今回は楕円型以外の三種類のフィルタとその構成法を利用して, 主に簡易構成の伝達関数を拡張する例を示す.

### 3.1 バターワース型の拡張

いま正規化座標  $t$  で表したフィルタ  $\mathcal{F}$  の伝達関数を  $g(t)$  とする. この  $g(t)$  は  $t \geq 0$  で定義され, 最大値は 1 に規格化されているとする. そうして定義域の通過域, 遷移域, 阻止域への区分けをそれぞれ  $[0, 1]$ ,  $(1, \mu)$ ,  $[\mu, \infty)$  とし, 対応する伝達率の閾値をそれぞれ  $g_p$  と  $g_s$  とする.

そのとき, ある正の整数  $k$  に対して  $h(t) \equiv t^k$  とおく. これは多項式で  $0 \leq t$  で定義されている.  $h(t)$  による  $t \in [0, 1]$  の像は  $[0, 1]$  であり,  $h(t)$  は  $1 < t$  では単調増加である. そうしていま  $\mu' \equiv \mu^{1/k}$  とおくと,  $h(t)$  は  $t \geq \mu'$  のときは  $\mu$  以上の値をとり, 特に  $h(\mu') = \mu$  である. よってこの  $h(t)$  は前述の関数合成についての条件を満たしている.

すると合成関数  $g'(t) \equiv g(h(t)) = g(t^k)$  を伝達関数を持つフィルタ  $\mathcal{F}'$  が存在する. そうして伝達率  $g'(t)$  の各閾値は  $g(t)$  と一致して  $g_p$  と  $g_s$  であり, 伝達関数  $g'(t)$  の通過域, 遷移域, 阻止域はそれぞれ  $[0, 1]$ ,  $(1, \mu')$ ,  $[\mu', \infty)$  となる. つまり新しい伝達関数  $g'(t)$  の形状パラメタの三つ組は  $(\mu', g_p, g_s)$  である.

特に  $k$  が偶数の場合には  $g'(t)$  は偶関数になり,  $g'(t)$  の定義域は実軸全体に自然に拡張できる. そのような定義域の拡張をすれば通過域, 遷移域, 阻止域はそれぞれ  $t \in [-1, 1]$ ,  $|t| \in (1, \mu')$ ,  $|t| \in [\mu', \infty)$  となる. そうして整数  $k$  が 2 以上の場合には, 伝達関数  $g'(t)$  の原点  $t = 0$  における  $s$  階の導関数の値  $(d/dt)^s g'(t)|_{t=0}$  は  $s=1, 2, \dots, k-1$  のすべてで零になるバターワース特性を持つ. (注: 通常のパターワース型のフィルタ設計では,  $k$  が偶数の場合だけを扱うが, ここでは少し複雑にはなるが  $k$  が奇数の場合も含める.)

いま定義域が  $t \geq 0$  である元の伝達関数  $g(t)$  が (前述のように) パラメタ  $\mu > 1$  と  $\sigma > 0$  および  $n$  次多項式  $P$  を用いて  $g(t) \equiv P(x)$ ,  $x \equiv (\mu + \sigma)/(t + \sigma)$  と表され, 通過域, 遷移域, 阻止域はそれぞれ  $[0, 1]$ ,  $(1, \mu)$ ,  $[\mu, \infty)$  であり, 対応する伝達率の閾値は  $g_p$  と  $g_s$  であるとする. そうして  $g'(t) = P(x'(t))$ ,  $x'(t) = (\mu + \sigma)/(t^k + \sigma)$  である.

有理関数  $x'(t) = (\mu + \sigma)/(t^k + \sigma)$  の複素数の範囲での  $k$  個の極はすべて単純で, 負数  $-\sigma$  の複素  $k$  乗根全体として

$$t_j = \sigma^{1/k} \omega^{2j-1}, j=1, 2, \dots, k \quad (1)$$

と書ける. ここで  $\omega \equiv \exp(\pi\sqrt{-1}/k)$  は 1 の複素  $2k$  乗根である. このとき  $x'(t)$  の  $k$  個の極には  $k$  が偶数のときは実数のものは無く,  $k$  が奇数のときには実数の極は負数  $-\sigma^{1/k}$  だけである. そうしてすべての極が実数になるのは元の  $k = 1$  の場合にだけである. 実数でない極は必ず互いに共役な複素数の対として現れる. 正の虚部を持つ極は上記の  $t_j$  の式 (1) に於いて添字の範囲が  $j=1, 2, \dots, [k/2]$  のものに対応している.

#### 3.1.1 バターワース型の拡張によるフィルタの構成

バターワース型拡張された伝達関数  $g'(t)$  に対応するフィルタ  $\mathcal{F}'$  の構成には, まず正規化座標  $t$  の実有理関数  $x'(t) = (\mu + \sigma)/(t^k + \sigma)$  に対応する実線形作用素  $\mathcal{X}'$  をレゾルベントの線形結合として構成する. そうして作用素  $\mathcal{X}'$  を  $n$  次多項式  $P$  と合成して  $\mathcal{F}' = P(\mathcal{X}')$  とする. 実数の極にはシフトが実数のレゾルベントが対応し, 互いに複素共役である複素数の極にはシフトが互いに共役な複素数であるレゾルベントがそれぞれ対応する. シフトがすべて実数になるのは,  $k = 1$  の場合だけである.

フィルタを作用する対象を実ベクトルの組に限定すると, 実有理関数  $x'(t)$  に対応する実作用素  $\mathcal{X}'$  の構成において, シフトが実数のレゾルベントの作用はそのまま用いるが, シフトが互いに複素共役のレゾルベントの対の作用は (作用した結果が互いに複素共役なベクトルの組になるので) 対のうちの片方 (例えばシフトの虚部が正の側) の作用だけを用いる. よってフィルタを構成するレゾルベントは,  $k$  が奇数の場合は実数のシフトのもの一つと (虚部が正の) 複素数のシフトのもの  $(k-1)/2$  個であり,  $k$  が偶数の場合は (虚部が正の) 複素数のシフトのもの  $k/2$  個である. そうしてフィルタのベクトルの組に対する作用の計算では, それらのレゾルベントの組をベクトルの組に対して順次に  $n$  回適用する.

フィルタ  $\mathcal{F}'$  は,  $k$  が偶数のときは固有値が固有値分布の任意の位置にある固有対 (中間固有対) を求めるのに使えるが,  $k$  が奇数のときは固有値が固有値分布の下端にある場合の固有対 (下端固有対) を求めるときにだけ使う. これは  $k$  が偶数のときはレゾルベントのシフトはどれも実数ではないので実数である固有値と一致または近接は起こらないが,  $k$  が奇数のときには実数のシフトが固有値と一致や近接を起こすと通過域での伝達率の大きさに上限がなくなるので, その可能性を除くためである. (なお, 固有値が固有値分布の上端にある固有対を求める場合は, その固有値問題  $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$  に対して,  $A$  の符号を反対に変えた問題の固有対は変える前の問題の固有対と互いに固有値の符号だけを反対にしたものになるので, 容易に下端固有対を求める問題に帰着される.)

この  $k$  次のバターワース拡張では伝達関数は原点  $t = 0$  に於いて  $k = 1$  のときには傾きを持ち平坦ではないが,  $k > 1$  のときには  $(k-1)$  階までの導関数が零になる平坦性を持つ.

実有理関数  $x'(t)$  に対応する実作用素  $\mathcal{X}'$  を構成するにはまず  $x'(t)$  の部分分数分解を行なう. それは, 極  $t_j$  を式 (1) で表された負数  $-\sigma$  の複素  $k$  乗根であるとして以下のようになる.

$$x'(t) \equiv \frac{\mu + \sigma}{t^k + \sigma} = \frac{\mu + \sigma}{k\sigma} \sum_{j=1}^k \frac{-t_j}{t - t_j}. \quad (2)$$

この実関数  $x'(t)$  の式は (実数の極があれば) 実数の極と (複素対称性から) 虚部が正である複素数の極だけを用い

て以下のように書ける：

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{\mu+\sigma}{k\sigma} \left\{ \frac{\sigma^{1/k}}{t+\sigma^{1/k}} + 2 \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \operatorname{Re} \left( \frac{-t_j}{t-t_j} \right) \right\} & (k \text{ は奇数}), \\ \frac{\mu+\sigma}{k\sigma} \times 2 \sum_{j=1}^{k/2} \operatorname{Re} \left( \frac{-t_j}{t-t_j} \right) & (k \text{ は偶数}). \end{cases} \quad (3)$$

すると  $x'(t)$  に対応する線形作用素  $\mathcal{X}'$  は以下のように構成できる。

**$k$  が奇数のとき：**通過域  $t \in [0, 1]$  を（下端に位置する）固有値座標の区間  $\lambda \in [a, b]$  に線形変換  $\lambda = a + (b-a)t$  で対応させると， $t_j$  の定義を式 (1) として，極が虚数の項は  $-t_j/(t-t_j) = l_j/(\lambda-\rho_j)$  となる．ただしこの場合は  $l_j \equiv -(b-a)t_j$ ， $\rho_j \equiv a + (b-a)t_j$  である．また極が実数の項は  $\sigma^{1/k}/(t+\sigma^{1/k}) = l_R/(\lambda-\rho_R)$  となる．ここで  $l_R \equiv (b-a)\sigma^{1/k}$ ， $\rho_R \equiv a - (b-a)\sigma^{1/k}$  である．すると  $x'(t)$  に対応する実線形作用素は，レゾルベントを用いて以下の式で表せることがわかる．

$$\mathcal{X}' = \frac{\mu+\sigma}{k\sigma} \left[ l_R \mathcal{R}(\rho_R) + 2 \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \operatorname{Re} \{ l_j \mathcal{R}(\rho_j) \} \right]. \quad (4)$$

**$k$  が偶数のとき：**通過域  $t \in [-1, 1]$  を（任意の）固有値座標の区間  $\lambda \in [a, b]$  に線形変換  $\lambda = (a+b)/2 + t(b-a)/2$  で対応させると， $t_j$  の定義を式 (1) として， $-t_j/(t-t_j) = l_j/(\lambda-\rho_j)$  となる．ただし  $l_j \equiv -t_j(b-a)/2$ ， $\rho_j \equiv (a+b)/2 + t_j(b-a)/2$  である．式  $l_j/(\lambda-\rho_j)$  に対応する作用素はシフトが  $\rho_j$  のレゾルベントを用いて  $l_j \mathcal{R}(\rho_j)$  となる．すると  $x'(t)$  に対応する実線形作用素  $\mathcal{X}'$  は，レゾルベントを用いて以下の式で表せることがわかる．

$$\mathcal{X}' = \frac{\mu+\sigma}{k\sigma} \times 2 \sum_{j=1}^{k/2} \operatorname{Re} \{ l_j \mathcal{R}(\rho_j) \}. \quad (5)$$

### 3.1.2 簡易構成型の伝達関数のバターワース型拡張

$k$  次多項式  $h(t) = t^k$  を用いたバターワース型拡張により，元の伝達関数  $g(t)$  の伝達率の閾値  $g_p$  と  $g_s$  は変わらずに，遷移域の幅だけを  $\mu-1$  から  $\mu'-1$ （ただし  $\mu' = \mu^{1/k}$ ）に縮小した新しい伝達関数  $g'(t)$  が得られる．

一般には  $n$  次多項式  $P$  をうまく選んで伝達関数を  $g(t) = P(x(t))$  とするが，ここでは例として  $n$  次 Chebyshev 多項式を用いた簡易構成型の伝達関数

$$g(t) = g_s T_n(2x(t) - 1), \quad x(t) = \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma}$$

を採用して，それに対する  $k$  次多項式  $h(t) = t^k$  によるバターワース型拡張の伝達関数

$$g'(t) = g_s T_n(2x'(t) - 1), \quad x'(t) = \frac{\mu + \sigma}{t^k + \sigma}$$

を作り比較する（ $k=1$  の場合は元の伝達関数  $g(t)$  に一致する）．簡易構成の伝達関数を三つ組のパラメタ  $\mu, \sigma, n$  で指定する場合は， $x_H \equiv 1 + \mu/\sigma$ ， $x_L \equiv 1 + (\mu-1)/(\sigma+1)$

表 1 例 B-1：形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	4.0000	2	2.0000
3	1.5874	4	1.4142
5	1.3195	6	1.2599
7	1.2190	8	1.1892

表 2 例 B-2：形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	9.0000	2	3.0000
3	2.0801	4	1.7321
5	1.5518	6	1.4422
7	1.3687	8	1.3161

表 3 例 B-3：形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	16.000	2	4.0000
3	2.5198	4	2.0000
5	1.7411	6	1.5874
7	1.4860	8	1.4142

とおくと， $g(t)$  と  $g'(t)$  の双方で共有される伝達率の閾値はそれぞれ  $g_s = 1/T_n(2x_H-1)$  と  $g_p = g_s T_n(2x_L-1)$  である．あるいは双曲線関数を用いて

$$\begin{cases} g_s \leftarrow 1 / \cosh \left( 2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \right), \\ g_p \leftarrow g_s \cosh \left( 2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu-1}{\sigma+1}} \right) \end{cases} \quad (6)$$

を計算して求められる．

#### 例 B-1

三つ組のパラメタを  $\mu=4.0$ ， $\sigma=4.0$ ， $n=20$  と設定すると，元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=1.17486 \times 10^{-3}$ ， $g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる．表 1 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す．図 1 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す．

#### 例 B-2

三つ組のパラメタを  $\mu=9.0$ ， $\sigma=9.0$ ， $n=20$  と設定すると，元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=4.65986 \times 10^{-2}$ ， $g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる．表 2 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す．図 2 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す．

#### 例 B-3

三つ組のパラメタを  $\mu=16.0$ ， $\sigma=16.0$ ， $n=20$  と設定すると，元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=1.75152 \times 10^{-1}$ ， $g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる．表 3 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す．図 3 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す．

### 3.1.3 バターワース型拡張された簡易構成型のフィルタ

$k$  次実有理関数  $x'(t) = (\mu + \sigma)/(t^k + \sigma)$  に対応する実線形作用素  $\mathcal{X}'$  は， $k=2$  の場合はシフトが複素数のレゾル

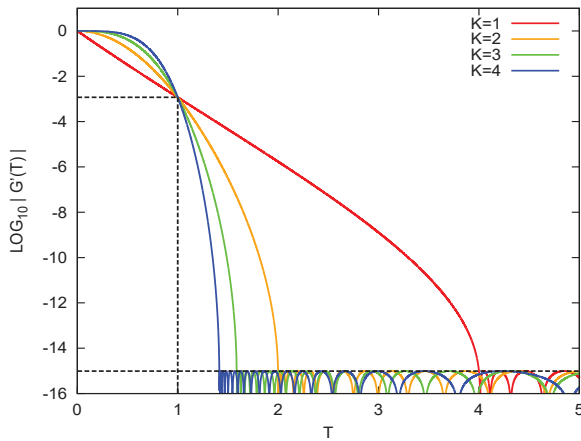


図 1 例 B-1: バターワース型拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=4.0$ ,  $g_p=1.17 \times 10^{-3}$ ,  $g_s=9.77 \times 10^{-16}$ ,  $n=20$ )

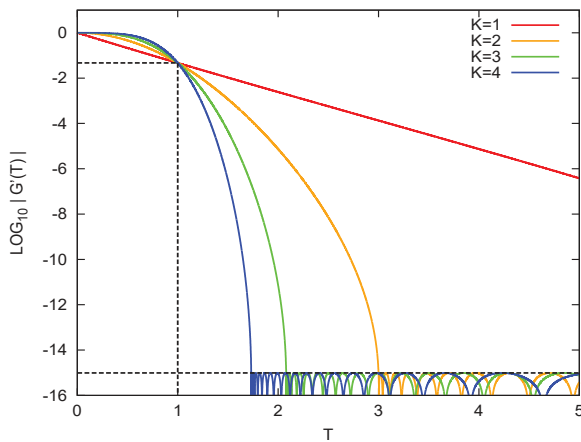


図 2 例 B-2: バターワース型拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=9.0$ ,  $g_p=4.66 \times 10^{-2}$ ,  $g_s=9.77 \times 10^{-16}$ ,  $n=20$ )

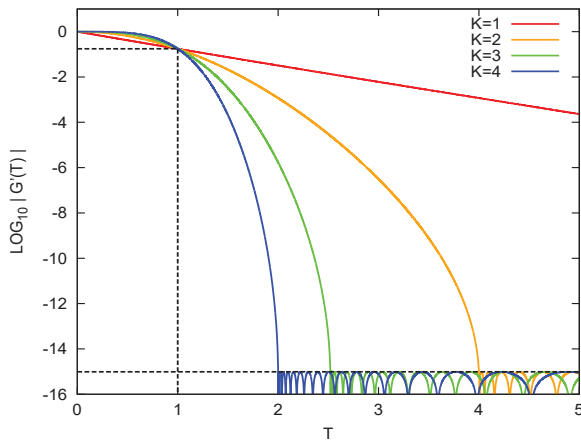


図 3 例 B-3: バターワース型拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=16.0$ ,  $g_p=1.75 \times 10^{-1}$ ,  $g_s=9.77 \times 10^{-16}$ ,  $n=20$ )

ベント一つの作用の虚部で表され,  $k=3$  の場合はシフトが実数のレゾルベント一つの作用と複素数のレゾルベント一つの作用の虚部の線形結合で表され,  $k=4$  の場合はシフトが複素数のレゾルベント二つの作用の虚部の線形結合で表される. そうして  $\mathcal{Y}' = 2\mathcal{X}' - I$  とおくと, いまの  $n$  次 Chebyshev 多項式を用いた簡易構成のフィルタのバターワース型拡張は  $\mathcal{F}' = g_s T_n(\mathcal{Y}')$  となる. 与えられたベクト

ルの組  $V$  に対する  $T_n(\mathcal{Y}')$  の作用は,  $V^{(m)} \equiv T_m(\mathcal{Y}')V$  と定義するとき, その計算は Chebyshev 多項式の三項漸化式を用いて以下のようにできる.

$$\begin{cases} V^{(0)} = V, \\ V^{(1)} = \mathcal{Y}' V, \\ V^{(m)} = 2\mathcal{Y}' V^{(m-1)} - V^{(m-2)} \quad (m \geq 2 \text{ の場合}). \end{cases} \quad (7)$$

これを用いて  $V$  から  $V^{(n)}$  を計算すると, フィルタの作用は  $\mathcal{F}' V = g_s V^{(n)}$  となる.

### 3.2 チェビシエフ型の拡張

バターワース型の拡張の場合に比べて, 通過域で伝達関数の値が波打つことを許容するのと引き換えに伝達関数の遷移域に於ける値の変化を急峻にすることを狙って, チェビシエフ型拡張を試みる.

いま  $t \geq 0$  で定義された  $k$  次の多項式を

$$h(t) \equiv \begin{cases} \frac{1+T_k(2t-1)}{2} & (k \text{ が奇数のとき}), \\ \frac{1+T_k(t)}{2} & (k \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (8)$$

とおく. すると  $\mu > 1$  のとき  $\mu = h(\mu')$  を満たす  $\mu' > 1$  が唯一存在する. 実際 ( $\mu > 1$  のとき  $\cosh^{-1}(2\mu-1) = 2 \cosh^{-1} \sqrt{\mu} = 2 \sinh^{-1} \sqrt{\mu-1}$  であることも使って),

$$\mu' = \begin{cases} \cosh^2 \left( \frac{1}{k} \sinh^{-1} \sqrt{\mu-1} \right) & (k \text{ が奇数のとき}), \\ \cosh \left( \frac{2}{k} \sinh^{-1} \sqrt{\mu-1} \right) & (k \text{ が偶数のとき}). \end{cases} \quad (9)$$

(通常のチェビシエフ型は  $k$  が偶数の場合だけを扱うが, ここでは少し複雑にはなるが  $k$  が奇数の場合も含めて考察を行なう.)

するとこの  $h(t)$  は  $k$  の偶奇に依らず  $t \in [0, 1]$  を  $[0, 1]$  全体に写し,  $1 < t$  では単調増加であり,  $\mu' \leq t$  では値が  $\mu$  以上でかつ  $h(\mu') = \mu$  であるから, 以前に述べた関数の合成についての要件を満たしている. また  $k$  が偶数のときには  $h(t)$  は偶関数なので, 伝達関数  $g'(t)$  も偶関数になるのでその定義域を実軸全体に自然に拡張できる.

すると, 元のフィルタ  $\mathcal{F}$  の伝達関数が  $n$  次の実多項式  $P$  を用いて

$$g(t) \equiv P(x(t)), \quad x(t) \equiv \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma} \quad (10)$$

と与えられるときに,

$$g'(t) \equiv P(x'(t)), \quad x'(t) \equiv \frac{\mu + \sigma}{h(t) + \sigma} \quad (11)$$

もまた新しいフィルタ  $\mathcal{F}'$  の伝達関数となる. そうしてフィルタ  $\mathcal{F}$  の形状パラメタの三つ組は  $(\mu, g_p, g_s)$  であり, フィルタ  $\mathcal{F}'$  の形状パラメタの三つ組は  $(\mu', g_p, g_s)$  であり, 遷移域の幅に関するパラメタだけが異なる.

元のフィルタ  $\mathcal{F}$  の規格化座標  $t$  による通過域, 遷移域, 阻止域はそれぞれ  $t \in [0, 1]$ ,  $t \in (1, \mu)$ ,  $t \in [\mu, \infty)$  であり, 関数合成で得られたフィルタ  $\mathcal{F}'$  の通過域, 遷移域, 阻止域はそれぞれ  $t \in [0, 1]$ ,  $t \in (1, \mu')$ ,  $t \in [\mu', \infty)$  となる. さらに  $k$  が偶数ならば, 各領域は原点对称に自然に拡張できて  $t \in [-1, 1]$ ,  $|t| \in (1, \mu')$ ,  $|t| \in [\mu', \infty)$  となる.

### 3.2.1 実有理関数 $x'(x)$ の極

実有理関数  $x'(t)$  に対応する線形作用素  $\mathcal{X}$  は,  $x'(t)$  の部分分数分解を用いて作る. いまの場合,  $k$  が奇数のときは  $z \equiv 2t - 1$ , 偶数のときは  $z \equiv t$  により  $z$  を定義すると  $h(t) = (1 + T_k(z))/2$  である. そうしてまず  $x'(t)$  の極を求めるために, その分母が零になる条件  $h(t) + \sigma = 0$  つまり方程式  $T_k(z) = -(1 + 2\sigma)$  を解く. いま  $w \equiv 1 + 2\sigma (> 1)$  とおいて,  $\alpha = (w + \sqrt{w^2 - 1})^{1/k}$  とすれば, 方程式の全ての複素数解  $z$  は以下の式 (12)

$$z_\ell = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} \cos \frac{(2\ell - 1)\pi}{k} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2} \sin \frac{(2\ell - 1)\pi}{k},$$

$$\ell = 1, 2, \dots, k \quad (12)$$

により表わされ, 重複する解は無い.  $z_\ell$  を求めたら,  $k$  が奇数のときは  $t_\ell = (1 + z_\ell)/2$ , 偶数のときは  $t_\ell = z_\ell$  とすると, 有理関数  $x'(t)$  の  $t$  についての極がすべて求まる. 正の虚部を持つ極の添字は  $k$  が偶数のときは  $\ell = 1, 2, \dots, k/2$  であり,  $k$  が奇数のときは  $\ell = 1, 2, \dots, (k-1)/2$  である. 実数の極は  $k$  が奇数のときに限り存在し, 添字が  $\ell = (k+1)/2$  の場合で, 値は  $t = -\sinh^2\{1/(2k) \cdot \cosh^{-1}(1+2\sigma)\}$  である.

### 3.2.2 実有理関数 $x'(x)$ の部分分数分解

実有理関数  $x'(t)$  の極を求めたら, 次に  $x'(t)$  の部分分数分解

$$x'(t) = \frac{\mu + \sigma}{h(t) + \sigma} = \sum_{\ell} \frac{c_\ell}{t - t_\ell} \quad (13)$$

を求める. 極  $t = t_\ell$  の係数は

$$c_\ell = \lim_{t \rightarrow t_\ell} \{(t - t_\ell)x'(t)\} = \frac{\mu + \sigma}{\frac{d}{dt}h(t)|_{t=t_\ell}} \quad (14)$$

により計算できる. ここで  $t = t_\ell$  に於ける  $(d/dt)h(t)$  の値を求めるには, たとえば公式  $(d/dz)T_m(z) = mU_{m-1}(z)$  を利用できる, ここで  $U_m(z)$  は第二種 Chebyshev 多項式であり, その値は以下の漸化式を用いて計算できる:

$$\begin{cases} U_0(z) = 1, & U_1(z) = 2z, \\ U_m(z) = (2z)U_{m-1}(z) - U_{m-2}(z) & (m \geq 2) \end{cases} \quad (15)$$

すると  $(d/dt)h(t)$  の  $t = t_\ell$  に於ける値は,  $k$  が奇数のときは  $kU_{k-1}(2t_\ell - 1)$ ,  $k$  が偶数のときは  $(k/2)U_{k-1}(t_\ell)$  となる.

実有理関数の部分分数分解に現れる互いに複素共役な極の係数同士は互いに複素共役なので, 部分分数分解の複素共役な極の項同士の和をまとめて  $c_\ell/(t - t_\ell) + \bar{c}_\ell/(t - \bar{t}_\ell) = 2\text{Re}\{c_\ell/(t - t_\ell)\}$  と片方の極の項だけを用いて表現すれば, 対応する実作用素も片方の極に対応するシフトを持つレゾルベントだけを用いて  $2\text{Re}\{\gamma_\ell \mathcal{R}(\rho_\ell)\}$  の形に表せる.

### 3.2.3 簡易構成型の伝達関数のチェビシェフ型拡張

元の伝達関数  $g(t)$  の伝達率の閾値  $g_p, g_s$  を保ったまま  $k$  次多項式  $h(t)$  によるチェビシェフ型の拡張により, 遷移域の幅  $\mu - 1$  を  $\mu' - 1$  に狭めた伝達関数  $g'(t)$  が得られる様子を示す.

ここで  $k$  が奇数の場合は  $h(t) \equiv (1 + T_k(2t - 1))/2$  として,  $\mu' = \cosh^2\{(1/k)\sinh^{-1}\sqrt{\mu - 1}\}$  であり, また  $k$  が偶数の場合は  $h(t) \equiv (1 + T_k(t))/2$  として,  $\mu' = \cosh\{(2/k)\sinh^{-1}\sqrt{\mu - 1}\}$  である.

一般には  $n$  次多項式  $P$  をうまく選んで伝達関数を  $g(t) = P(x(t))$  とするが, ここでは例として前と同様に元の伝達関数として  $n$  次 Chebyshev 多項式を用いた簡易構成のもの

$$g(t) = g_s T_n(2x(t) - 1), x(t) = \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma} \quad (16)$$

を採用し, それに対して  $k$  次多項式  $h(t)$  によるチェビシェフ型拡張を行なった伝達関数

$$g'(t) = g_s T_n(2x'(t) - 1), x'(t) = \frac{\mu + \sigma}{h(t) + \sigma} \quad (17)$$

を作り比較する ( $g'(t)$  は  $k=1$  の場合には元の伝達関数  $g(t)$  と同じであり,  $k=2$  の場合にはバターワース型拡張の場合の  $k=2$  のものと一致する).

$k$  が奇数のときは  $g'(t)$  の通過域は  $t \in [0, 1]$ , 遷移域は  $t \in (1, \mu')$ , 阻止域は  $t \in [\mu', \infty)$  であるが,  $k$  が偶数のときには  $h(t)$  が偶関数であるので  $g'(t)$  も偶関数になり,  $g'(t)$  の定義域は実軸全体に自然に拡張することができて, 定義域を拡張した場合の通過域は  $t \in [-1, 1]$ , 遷移域は  $|t| \in (1, \mu')$ , 阻止域は  $|t| \in [\mu', \infty)$  となる.

#### 例 C-1

三つ組のパラメタを  $\mu=4.0, \sigma=4.0, n=20$  と設定すると, 元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=1.17486 \times 10^{-3}, g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる. 表 4 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す. 図 4 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す.

#### 例 C-2

三つ組のパラメタを  $\mu=9.0, \sigma=9.0, n=20$  と設定すると, 元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=4.65986 \times 10^{-2}, g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる. 表 5 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す. 図 5 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す.

#### 例 C-3

三つ組のパラメタを  $\mu=16.0, \sigma=16.0, n=20$  と設定すると, 元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=1.75152 \times 10^{-1}, g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる. 表 6 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す. 図 6 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す.

表 4 例 C-1: 形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	4.0000	2	2.0000
3	1.2054	4	1.2247
5	1.0710	6	1.0979
7	1.0358	8	1.0547

表 5 例 C-2: 形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	9.0000	2	3.0000
3	1.3869	4	1.4142
5	1.1295	6	1.1777
7	1.0648	8	1.0987

表 6 例 C-3: 形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	16.000	2	4.0000
3	1.5526	4	1.5811
5	1.1802	6	1.2460
7	1.0894	8	1.1360

### 3.3 逆チェビシエフ型拡張

伝達関数の特性が遷移域に於いては急減少で、通過域に於いては原点付近で高い平坦性を持たせる (バターワース特性) ことを狙い、逆チェビシエフ型の拡張を試みる。

いま  $k$  次の有理関数を

$$h(t) \equiv \frac{1 + T_k(\mu')}{1 + T_k(\mu'/t)} \quad (18)$$

と定義する。ただし  $\mu' > 1$  であるとする。この関数  $h(t)$  は  $t \in [0, \mu']$  では単調増加で、 $k$  が偶数のときには偶関数になる。また  $h(0) = 0$ ,  $h(1) = 1$  である。そうして  $\mu'$  の値は  $\mu = h(\mu')$  を満たすように、つまり  $\mu = (1 + T_k(\mu'))/2$  を解いて

$$\mu' = \cosh \left\{ \frac{1}{k} \cosh^{-1}(2\mu - 1) \right\} = \cosh \left( \frac{2}{k} \sinh^{-1} \sqrt{\mu - 1} \right) \quad (19)$$

とする。 $k$  が偶数の場合にはこの  $\mu'$  の値はチェビシエフ型拡張の場合の値と一致する。そうして原点付近で  $h(t) = O(t^k)$  であることによる平坦性を持つ。また  $\mu = (1 + T_k(\mu'))/2$  であることより、 $h(t) = 2\mu/(1 + T_k(\mu'/t))$  とも表せる。

この逆チェビシエフ型拡張の場合は、バターワース型やチェビシエフ型の拡張の場合とは異なり、 $k = 1$  のときの有理関数  $h(t)$  は  $t$  に等しくなく、しかも  $k = 1$  のときは  $\mu' = 2\mu - 1$  は  $\mu$  よりも値が大きいので、拡張前よりも性質が悪い。

#### 3.3.1 実有理関数 $x'(t)$ の極と部分分数分解

さて上記の式 (18) のように決めた  $h(t)$  を用いて

$$x'(t) = \frac{\mu + \sigma}{h(t) + \sigma} \quad (20)$$

とすると、これは  $k$  次の有理関数で複素数の範囲で  $k$  個の極を持つ。極は  $h(t) + \sigma = 0$  の解  $t$  であるから  $T_k(\mu'/t) = -1 - 2\mu/\sigma$  である。そこでいま  $w \equiv 1 + 2\mu/\sigma$ ,  $\mu'/t = z$  とおくと、 $w > 1$  であり、解くべき  $z$  の方程式は

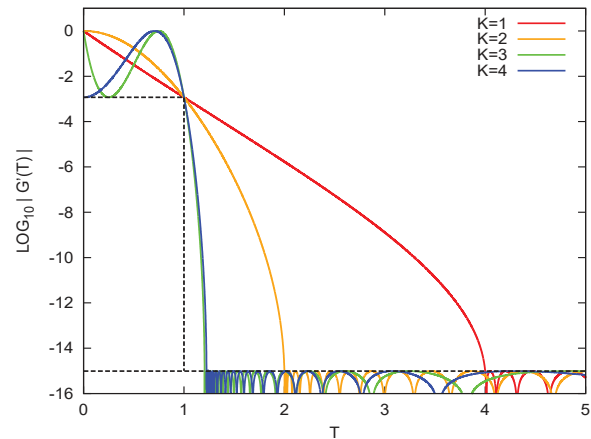


図 4 例 C-1: チェビシエフ型の拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=4.0$ ,  $g_p=1.17 \times 10^{-3}$ ,  $g_s=9.77 \times 10^{-16}$ ,  $n=20$ )

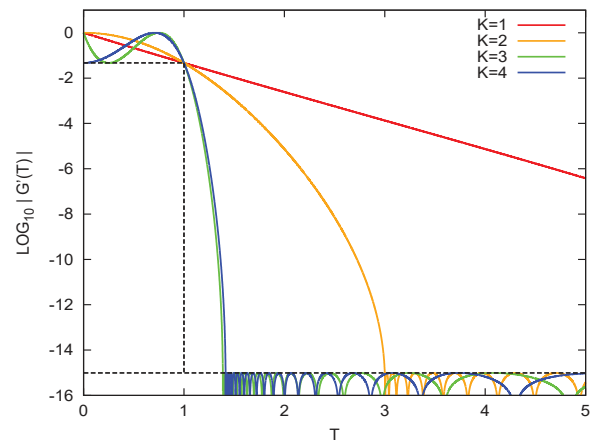


図 5 例 C-2: チェビシエフ型の拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=9.0$ ,  $g_p=4.66 \times 10^{-2}$ ,  $g_s=9.77 \times 10^{-16}$ ,  $n=20$ )

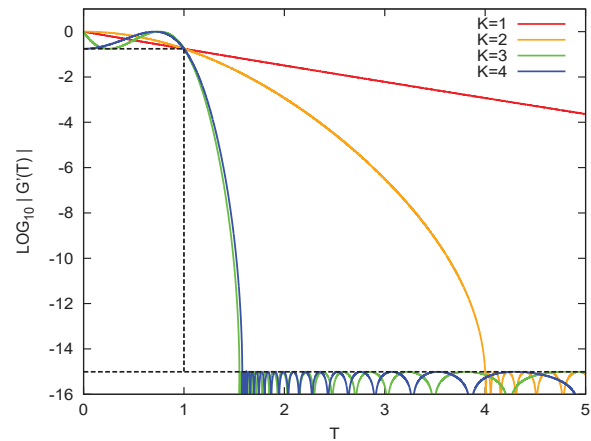


図 6 例 C-3: チェビシエフ型の拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=16.0$ ,  $g_p=1.75 \times 10^{-1}$ ,  $g_s=9.77 \times 10^{-16}$ ,  $n=20$ )

$T_k(z) = -w$  である。すると、チェビシエフ型拡張の場合の極の計算と同様にしてまず  $\alpha = (w + \sqrt{w^2 - 1})^{1/k}$  とすると、(今度は  $z_\ell$  の虚部の符号を逆に) 以下の式 (21)

$$\begin{cases} z_\ell = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} \cos \frac{(2\ell-1)\pi}{k} - \sqrt{-1} \cdot \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2} \sin \frac{(2\ell-1)\pi}{k}, \\ t_\ell = \frac{\mu'}{z_\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (21)$$

により、複素数の範囲での  $x'(t)$  のすべての極  $t_\ell$ ,  $\ell=1,2,\dots,k$  が求まる。虚部が正である極の添字は  $\ell=1,2,\dots,[k/2]$  である。  $k$  が偶数のときには実数の極は無いが、  $k$  が奇数のときには添字  $\ell = (k+1)/2$  のものが唯一の実数の極で、その値は式 (22) により与えられる。

$$t_R = -\mu' / \cosh \left\{ \frac{1}{k} \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{1+T_k(\mu')}{\sigma} \right) \right\}. \quad (22)$$

そうして  $x'(t)$  の部分分数分解  $x'(t) = \sum_{\ell} c_\ell / (t - t_\ell)$  の各極  $t_\ell$  の係数  $c_\ell$  は以下の式で与えられることが示せる。

$$c_\ell = \frac{2\mu(\sigma + \mu)t_\ell^2}{\mu'\sigma^2 k U_{k-1}(\mu'/t_\ell)}. \quad (23)$$

### 3.3.2 簡易構成の伝達関数の逆チェビシエフ型拡張

元の伝達関数  $g(t)$  の伝達率の閾値  $g_p, g_s$  を保ったまま  $k$  次の有理関数  $h(t)$  による逆チェビシエフ型拡張により、元の遷移域の幅  $\mu - 1$  が  $k \geq 2$  では縮小して  $\mu' - 1$  である伝達関数  $g'(t)$  が得られる様子を示す。

一般にはうまく選ばれた  $n$  次多項式  $P$  を用いて伝達関数を  $g(t) = P(x(t))$  とするが、例として再び前と同様に  $n$  次 Chebyshev 多項式を用いた簡易構成の伝達関数

$$g(t) = g_s T_n(2x(t) - 1), \quad x(t) = \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma} \quad (24)$$

を採用して、それに対する  $k$  次有理関数  $h(t)$  の合成による逆チェビシエフ型の拡張

$$g'(t) = g_s T_n(2x'(t) - 1), \quad x'(t) = \frac{\mu + \sigma}{h(t) + \sigma} \quad (25)$$

を作って比較する。

$k$  が奇数のときには  $g'(t)$  の通過域、遷移域、阻止域はそれぞれ  $[0, 1], (1, \mu'), [\mu', \infty)$  であるが、  $k$  が偶数のときには  $g'(t)$  は偶関数になるので定義域を実軸全体に拡張するとそれにより  $g'(t)$  の通過域、遷移域、阻止域はそれぞれ  $t \in [-1, 1], |t| \in (1, \mu'), |t| \in [\mu', \infty)$  にとれる。

#### 例 I-1

三つ組のパラメタを  $n=20, \mu=4.0, \sigma=4.0$  と設定すると、元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=1.17486 \times 10^{-3}, g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる。表 7 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す。図 7 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す。

#### 例 I-2

三つ組のパラメタを  $n=20, \mu=9.0, \sigma=9.0$  と設定すると、元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有する閾値はそれぞれ  $g_p=4.65986 \times 10^{-2}, g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる。表 8 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す。図 8 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す。

#### 例 I-3

三つ組のパラメタを  $n=20, \mu=16.0, \sigma=16.0$  と設定すると、元の伝達関数  $g(t)$  と拡張後の伝達関数  $g'(t)$  が共有す

表 7 例 I-1: 形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	7.0000	2	2.0000
3	1.4108	4	1.2247
5	1.1420	6	1.0979
7	1.0716	8	1.0547

表 8 例 I-2: 形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	17.000	2	3.0000
3	1.7737	4	1.4142
5	1.2591	6	1.1777
7	1.1295	8	1.0987

表 9 例 I-3: 形状パラメタ  $\mu'$  の値

$k$	$\mu'$	$k$	$\mu'$
1	31.000	2	4.0000
3	2.1051	4	1.5811
5	1.3604	6	1.2460
7	1.1789	8	1.1360

る閾値はそれぞれ  $g_p=1.75152 \times 10^{-1}, g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  となる。表 9 に  $k$  が 1 から 8 までに対する  $g'(t)$  の遷移域の幅に対する形状パラメタ  $\mu'$  を示す。図 9 に  $k$  が 1 から 4 までについて  $g'(t)$  のグラフを  $t \in [0, 5]$  の範囲で示す。

### 3.4 各種拡張による遷移域の幅のパラメタの比較

#### 例 1

伝達関数  $g(t)$  は簡易構成で、パラメタの三つ組の値を  $n=20, \mu=4.0, \sigma=4.0$  と設定した。すると  $g(t)$  と  $g'(t)$  の両方で共通する閾値の値はそれぞれ  $g_p=1.17486 \times 10^{-3}$  と  $g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  である。元の伝達関数  $g(t)$  からバターワース型拡張 (B-拡張), チェビシエフ型拡張 (C-拡張), 逆チェビシエフ型拡張 (I-拡張) により拡張用の有理関数の次数  $k$  を 1 から 8 まで変えて得られる伝達関数  $g'(t)$  のパラメタ  $\mu'$  の値を表 10 に示す。

#### 例 2

伝達関数  $g(t)$  は簡易構成で、パラメタの三つ組の値を  $n=20, \mu=9.0, \sigma=9.0$  と設定した。すると  $g(t)$  と  $g'(t)$  の両方で共通する閾値の値はそれぞれ  $g_p=4.65986 \times 10^{-2}$  と  $g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  である。元の伝達関数  $g(t)$  から B-拡張, C-拡張, I-拡張により拡張用の有理関数の次数  $k$  を 1 から 8 まで変えて得られる伝達関数  $g'(t)$  のパラメタ  $\mu'$  の値を表 11 に示す。

#### 例 3

伝達関数  $g(t)$  は簡易構成で、パラメタの三つ組の値を  $n=20, \mu=16.0, \sigma=16.0$  と設定した。すると  $g(t)$  と  $g'(t)$  の両方で共通する閾値の値はそれぞれ  $g_p=1.75152 \times 10^{-1}$  と  $g_s=9.77243 \times 10^{-16}$  である。元の伝達関数  $g(t)$  から B-拡張, C-拡張, I-拡張により拡張用の有理関数の次数  $k$  を 1 から 8 まで変えて得られる伝達関数  $g'(t)$  のパラメタ  $\mu'$  の値を表 12 に示す。



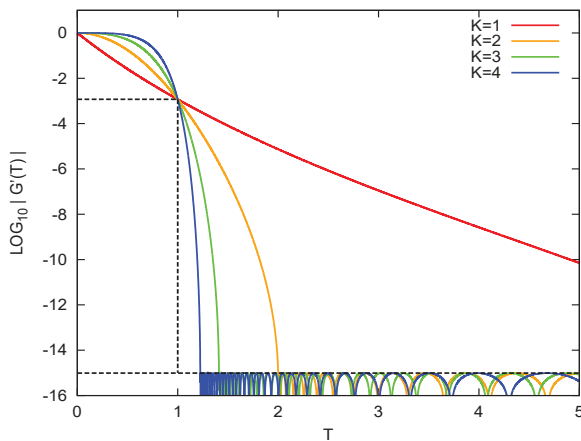


図 7 例 I-1: 逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=4.0, g_p=1.17 \times 10^{-3}, g_s=9.77 \times 10^{-16}, n=20$ )

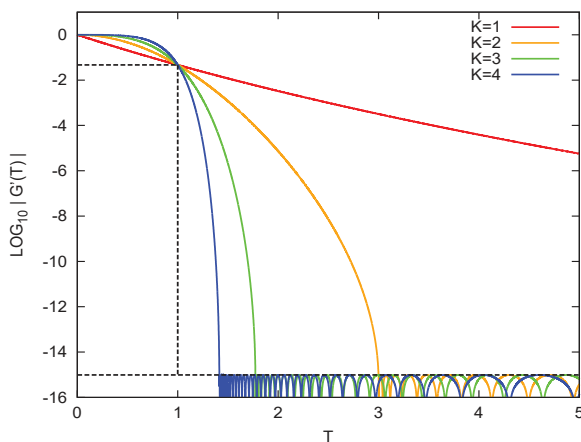


図 8 例 I-2: 逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=9.0, g_p=4.66 \times 10^{-2}, g_s=9.77 \times 10^{-16}, n=20$ )

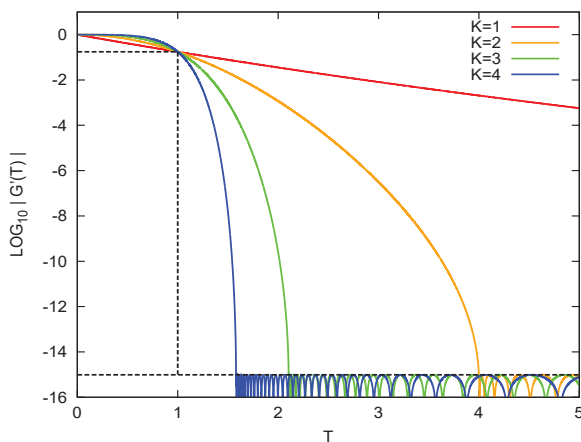


図 9 例 I-3: 逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の大きさ  $|g'(t)|$  ( $\mu=16.0, g_p=1.75 \times 10^{-1}, g_s=9.77 \times 10^{-16}, n=20$ )

#### 4. おわりに

レゾルベントの多項式型のフィルタで、多項式として Chebyshev 多項式を用いる「簡易構成」のフィルタでは、Chebyshev 多項式の次数  $n$  を上げれば阻止域に於ける伝達率の大きさの上限  $g_s$  を容易に小さくできるが、その反

表 10 (例 1) 各拡張に対する  $\mu'$  の値

$k$	B-拡張	C-拡張	I-拡張
1	4.0000	左に同じ	7.0000
2	2.0000	左に同じ	左に同じ
3	1.5874	1.2054	1.4108
4	1.4142	1.2247	左に同じ
5	1.3195	1.0710	1.1420
6	1.2599	1.0979	左に同じ
7	1.2190	1.0358	1.0716
8	1.1892	1.0547	左に同じ

表 11 (例 2) 各拡張に対する  $\mu'$  の値

$k$	B-拡張	C-拡張	I-拡張
1	9.0000	左に同じ	17.000
2	3.0000	左に同じ	左に同じ
3	2.0801	1.3869	1.7737
4	1.7321	1.4142	左に同じ
5	1.5518	1.1295	1.2591
6	1.4422	1.1777	左に同じ
7	1.3687	1.0648	1.1295
8	1.3161	1.0987	左に同じ

表 12 (例 3) 各拡張に対する  $\mu'$  の値

$k$	B-拡張	C-拡張	I-拡張
1	16.000	左に同じ	31.000
2	4.0000	左に同じ	左に同じ
3	2.5198	1.5526	2.1051
4	2.0000	1.5811	左に同じ
5	1.7411	1.1802	1.3604
6	1.5874	1.2460	左に同じ
7	1.4860	1.0894	1.1789
8	1.4142	1.1360	左に同じ

面として通過域に於ける伝達率の最大最小比  $1/g_p$  が増大する。この最大最小比が大きいと（たとえば 4 桁～6 桁）、フィルタによる濾過の計算を精度を固定して行なう場合には近似解の精度にそれだけ不均一が生じる可能性があるのが好ましくない。伝達関数に簡易構成のものを用いる場合は、伝達率の阻止域に於ける大きさ  $g_s$  を上げずに通過域に於ける最大最小比  $1/g_p$  を減少させるには、遷移域の幅を決めるパラメタ  $\mu$  の値を大きくする必要がある。しかし遷移域の幅  $\mu - 1$  が大きくなれば一般にはそれに伴って固有値が遷移域に含まれる不要な固有対の数が増える。フィルタで濾過して得られるベクトルの組に必要な不変部分空間の基底を満足に張るためには、通過域と遷移域に含まれる固有値の数よりも多くのベクトルをフィルタで濾過する必要があるため、 $\mu$  が大きければそれだけ多くのベクトルを濾過する必要が生じて、計算の手間が増えるので実用性が低下する。たとえば今回の例で関数合成による拡張を行う前のパラメタ  $\mu = 4.0$  や  $\mu = 9.0$  や  $\mu = 16.0$  などは大きな値であり、そのような緩やかな遮断特性を持つフィルタを用いて濾過作業を行なうとあまりにも無駄が多い。しかし、今回の関数合成による拡張の手法を用いると、遷移域の幅をうまく縮小できるので有望であると考えられる。た

だしフィルタの構成に用いるレゾルベントの数が増える。今回取り上げたバターワース型あるいは特にチェビシェフ型や逆チェビシェフ型の拡張では、たとえば  $k = 4$  の場合には複素シフトのレゾルベントを二つ用いるが、それらの線形結合の実部の多項式の形で構成されたフィルタは、遷移域の幅をかなり狭めて良い特性を実現できている。複素シフトのレゾルベントを三つ使う  $k = 6$  の場合には特性をさらに向上できる。そうして  $k$  が偶数の場合はフィルタは中間対用であり、固有値を求める区間は任意位置にできる。ただし連立一次方程式を解くための演算量は  $k$  に比例して増える。それでも 8~16 個程度の複素シフトのレゾルベントを用いてそれらの線形結合によりフィルタを構成する場合に比べると、用いる複素シフトのレゾルベントの数が 2 個~3 個と少なく済むので、計算資源（例えば行列分解のための演算量）に制約のある状況では有利となる場合があると考えられる。

今回示した三種類の拡張法で得られるフィルタは、レゾルベントが複数の場合にはシフトが複素数のものを必ず含む。するとレゾルベントの作用を実現する連立一次方程式として係数が複素対称行列のものを解く必要がある。もしも固有値が固有値分布の端にある固有対だけを求める場合に、シフトをすべて実数にできるならば、解くべき連立一次方程式の係数はすべて実対称定値行列になるから、今後はそれを可能とするような別系統の拡張法の定式化も追加することが望まれる。

## 参考文献

- [1] 村上弘: 固有値が指定された区間内にある固有対を解くための対称固有値問題用のフィルタの設計, **情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS31)**, Vol.3, No.3 (2010), pp.1-21.
- [2] Id.: 対称一般固有値問題のフィルタ作用素を用いた不変部分空間の近似構成, **情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS35)**, Vol.4, No.4 (2011), pp.1-14.
- [3] Id.: レゾルベントを用いたフィルタによる固有値問題の解法について, **情報処理学会研究報告**, Vol.2012-HPC-133, No.22 (2012), pp.1-8.
- [4] Id.: 実対称定値一般固有値問題の最小側固有値を持つ固有対に対する実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる解法, 先進的計算基盤システムシンポジウム論文集 2012 (2012), pp.81-82.
- [5] Id.: レゾルベントの線形結合をフィルタに用いたエルミート定値一般固有値問題のフィルタ対角化法, **情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS45)**, Vol.7, No.1 (2014), pp.57-72.
- [6] Id.: レゾルベントの多項式をフィルタとして用いる対角化法について, **情報処理学会研究報告**, Vol.2014-HPC-146, No.13 (2014), pp.1-4.
- [7] Id.: 実対称定値一般固有値問題に対するレゾルベントの多項式によるフィルタの構成法の検討, **情報処理学会研究報告**, Vol.2014-HPC-147, No.2 (2014), pp.1-10.
- [8] Id.: 実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法, **HPCS2015 シンポジウム論文集**, Vol.2015 (2015), pp.38-51.
- [9] Id.: 一つのレゾルベントから構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題に対するフィルタ対角化法の実験, **情報処理学会研究報告**, Vol.2015-HPC-149, No.7 (2015), pp.1-16.
- [10] Id.: 実数シフトのレゾルベントの多項式をフィルタに用いた実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法, **日本応用数理学会 2015 年度年会予稿集 (統合版)** (2015), pp.442-443.
- [11] Id.: レゾルベントの多項式によるフィルタの伝達特性の調整, RIMS 共同研究「数式処理とその周辺分野の研究」, 於京都大学益川ホール (2015 年 12 月) に対する **RIMS 講究録原稿**, 14 頁分, (発行予定).
- [12] Id.: 実対称定値一般固有値問題の最小側固有対を解くための実数シフトのレゾルベントの多項式によるフィルタの簡易な設計法, **情報処理学会研究報告集**, Vol.2016-HPC-155, No.44 (2016), pp.1-27.
- [13] Id.: レゾルベントの多項式によるフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法, **情報処理学会研究報告集**, Vol.2016-HPC-157, No.4 (2016), pp.1-15.
- [14] Id.: 実対称定値一般固有値問題を解くためのレゾルベントの多項式型フィルタの設計について, **情報処理学会研究報告集**, Vol.2016-HPC-158, No.7 (2017), pp.1-10.
- [15] Anthony P. Austin and Lloyd N. Trefethen: “Computing Eigenvalues of Real Symmetric Matrices with Rational Filters in Real Arithmetic”, **SIAM J. Sci. Comput.**, vol.37, no.3 (2015), pp.A1365-A1387.
- [16] Martin Galgon, Lukas Krämer and Brunno Lang: “The FEAST Algorithm for Large Eigenvalue Problems”, **PAMM Proc. Appl. Math. Mech.**, vol.11 (2011), pp.747-748.
- [17] Stefan Güttel, Eric Polizzi, Ping Tak Peter Tang and Gautier Viaud: “Zolotarev Quadrature Rules and Load Balancing for the FEAST Eigensolver”, **SIAM J. Sci. Comput.**, vol.37, no.4 (2015), pp.A2100-A2122.
- [18] Tsutomu Ikegami, Tetsuya Sakurai and Umpei Nagashima: “A Filter Diagonalization for Generalized Eigenvalue Problems Based on the Sakurai-Sugiura Projection Method”, **J. Comput. Appl. Math.**, vol.233, no.8(2010), pp.1927-1936.
- [19] Hiroshi Murakami: “Filter Diagonalization Method for Real Symmetric Definite Generalized Eigenproblem Whose Filter is a Polynomial of a Resolvent”, in book of **Abstracts of EPASA 2015 at Tsukuba**, (Sep.,2015), p.28 (single page poster abstract).
- [20] Eric Polizzi: “A Density Matrix-based Algorithm for Solving Eigenvalue Problems”, **Phys. Rev. B**, vol.79, no.1(2009), pp.115112(6pages).
- [21] Tetsuya Sakurai and Hiroshi Sugiura: “A Projection Method for Generalized Eigenvalue Problems Using Numerical Integration”, **J. Comput. Appl. Math.**, vol.159 (2003), pp.119-128.
- [22] Tetsuya Sakurai and Hiroto Tadano: “CIRR: a Rayleigh-Ritz Type Method with Contour Integral for Generalized Eigenvalue Problems”, **Hokkaido Math. J.**, vol.36, no.4 (2007), pp.745-757.
- [23] Sivan Toledo and Eran Rabani: “Very Large Electronic Structure Calculations Using an Out-of-Core Filter-Diagonalization Method”, **J. Comput. Phys.**, vol.180, no.1 (2002), pp.256-269.

## 付 録

### A.1 拡張による伝達関数の極の分布の例

#### バターワース型拡張の伝達関数の極の分布例

バターワース型拡張で拡張に用いる多項式  $h(t)$  の次数  $k$  を 2 から 6 までとした場合の有理関数  $x'(t)$  の極の複素平面上に於ける分布を示す。それは  $P$  をある多項式として  $g'(t) = P(x'(t))$  のときには伝達関数  $g'(t)$  の極でもある、バターワース型拡張では、極の分布は  $\sigma$  と  $k$  だけから決まり、極は  $k$  個ある。  $k = 1$  の場合は極は負数  $-\sigma$  であるが、図からは省略した。 黒い横線は、通過域の範囲を示している。フィルタは実または虚部が正の極と対応するシフトを持つレゾルベントだけから構成できる。

- 例 B-1 の場合は  $\sigma=4.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-1 に、  $k$  が奇数の場合について図 A-2 に、それぞれ示す。
- 例 B-2 の場合は  $\sigma=9.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-3 に、  $k$  が奇数の場合について図 A-4 に、それぞれ示す。
- 例 B-3 の場合は  $\sigma=16.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-5 に、  $k$  が奇数の場合について図 A-6 に、それぞれ示す。

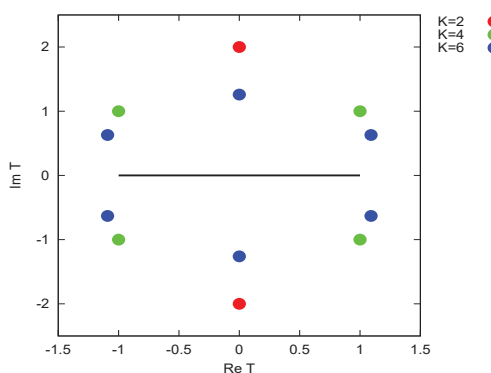


図 A-1 例 B-1：バターワース型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\sigma=4.0$ )

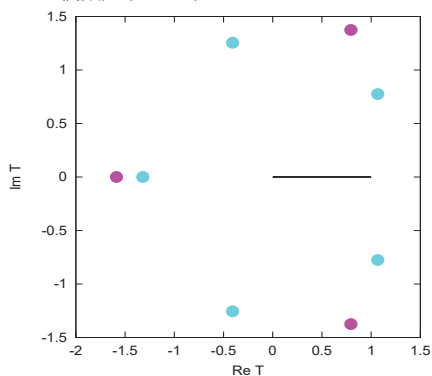


図 A-2 例 B-1：バターワース型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\sigma=4.0$ )

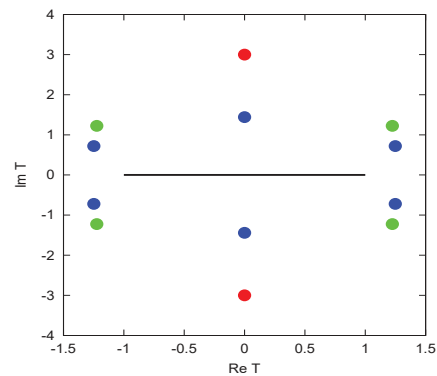


図 A-3 例 B-2：バターワース型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\sigma=9.0$ )

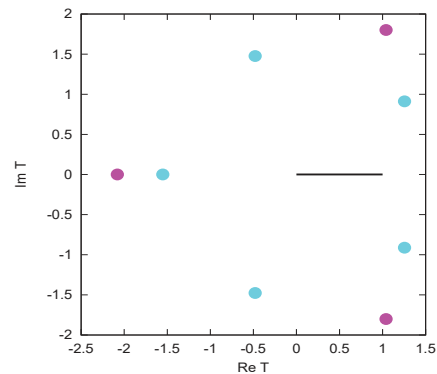


図 A-4 例 B-2：バターワース型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\sigma=9.0$ )

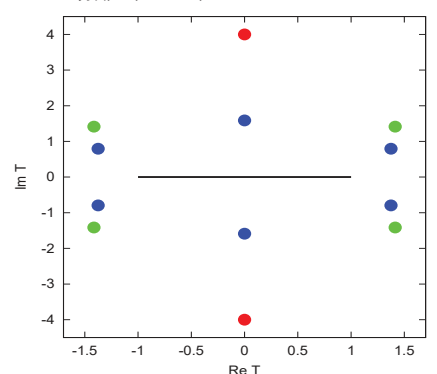


図 A-5 例 B-3：バターワース型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\sigma=16.0$ )

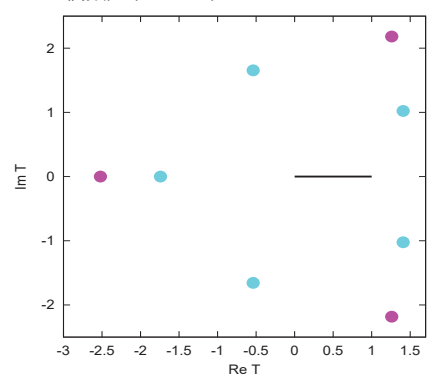


図 A-6 例 B-3：バターワース型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\sigma=16.0$ )

チェビシェフ型拡張の伝達関数の極の分布例

チェビシェフ型拡張で拡張に用いる多項式  $h(t)$  の次数  $k$  を 2 から 6 までとした場合の、有理関数  $x'(t)$  の極の複素平面上に於ける分布を示す。それはまた  $P$  をある多項式として  $g'(t) = P(x'(t))$  のときには伝達関数  $g'(t)$  の極の分布でもある。チェビシェフ型拡張では、極の分布は  $\sigma$  と  $k$  だけから決まり、極は  $k$  個ある。 $k = 1$  の場合は極は負数  $-\sigma$  であるが、図からは省略した。黒い横線は、通過域の範囲を示している。フィルタは実または虚部が正の極と対応するシフトを持つレゾルベントだけから構成できる。

- 例 C-1 の場合は  $\sigma=4.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-7 に、 $k$  が奇数の場合について図 A-8 に、それぞれ示す。
- 例 C-2 の場合は  $\sigma=9.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-9 に、 $k$  が奇数の場合について図 A-10 に、それぞれ示す。
- 例 C-3 の場合は  $\sigma=16.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-11 に、 $k$  が奇数の場合について図 A-12 に、それぞれ示す。

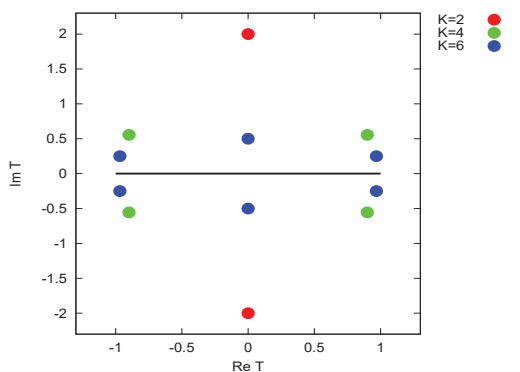


図 A-7 例 C-1：チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\sigma=4.0$ )

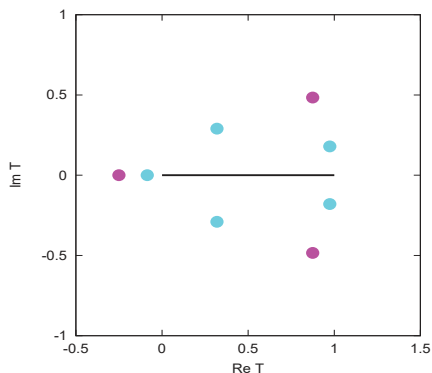


図 A-8 例 C-1：チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\sigma=4.0$ )

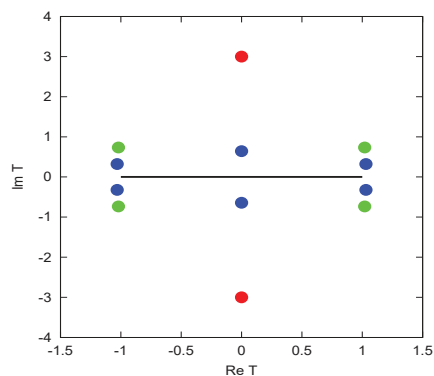


図 A-9 例 C-2：チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\sigma=9.0$ )

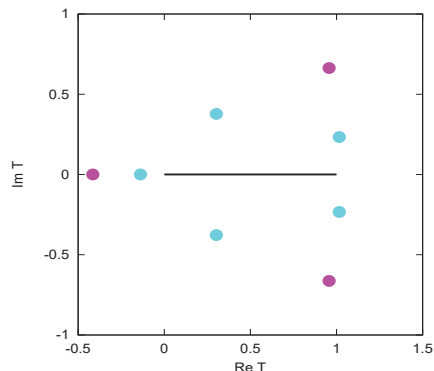


図 A-10 例 C-2：チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\sigma=9.0$ )

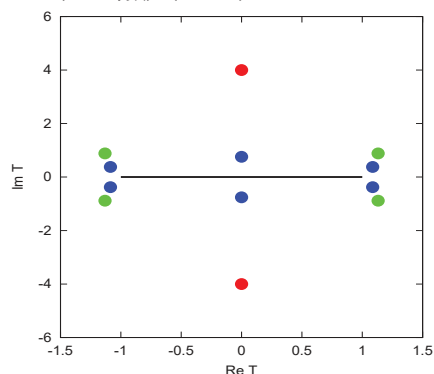


図 A-11 例 C-3：チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\sigma=16.0$ )

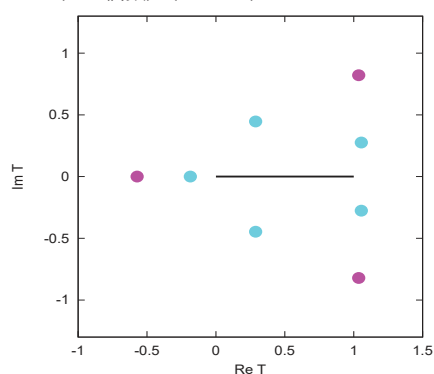


図 A-12 例 C-3：チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\sigma=16.0$ )

逆チェビシェフ型拡張の伝達関数の極の分布例

逆チェビシェフ型拡張で拡張に用いる有理関数  $h(t)$  の次数  $k$  を 2 から 6 までとした場合の有理関数  $x'(t)$  の極の複素平面上に於ける分布を示す。それは  $P$  をある多項式として  $g'(t) = P(x'(t))$  のときには伝達関数  $g'(t)$  の極でもある。逆チェビシェフ型拡張では、極の分布は  $\mu$  と  $\sigma$  と  $k$  から決まり、極は  $k$  個ある。  $k = 1$  の場合の極の位置は図からは省略した。黒い横線は、通過域の範囲を示している。フィルタは実または虚部が正の極と対応するシフトを持つレゾルベントだけから構成できる。

- 例 I-1 の場合は  $\mu=4.0$ ,  $\sigma=4.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-13 に、  $k$  が奇数の場合について図 A-14 に、それぞれ示す。
- 例 I-2 の場合は  $\mu=9.0$ ,  $\sigma=9.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-15 に、  $k$  が奇数の場合について図 A-16 に、それぞれ示す。
- 例 I-3 の場合は  $\mu=16.0$ ,  $\sigma=16.0$  である。極の分布を  $k$  が偶数の場合について図 A-17 に、  $k$  が奇数の場合について図 A-18 に、それぞれ示す。

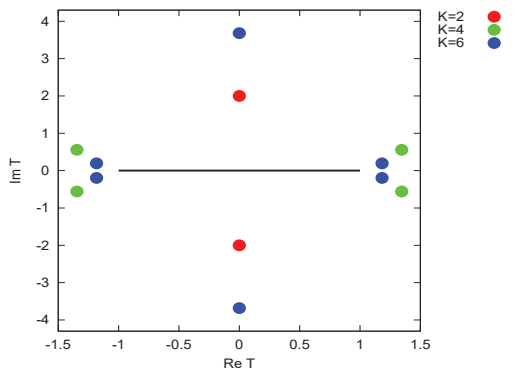


図 A-13 例 I-1：逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\mu=4.0$ ,  $\sigma=4.0$ )

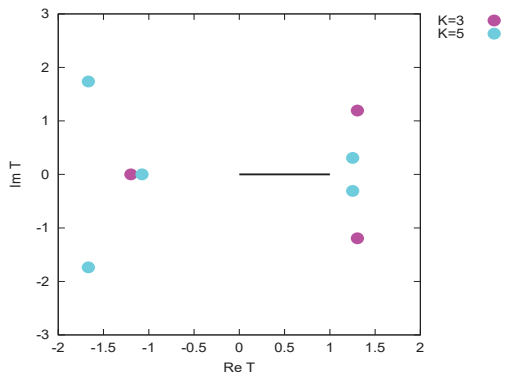


図 A-14 例 I-1：逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\mu=4.0$ ,  $\sigma=4.0$ )

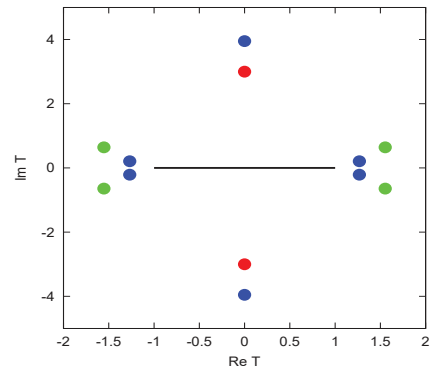


図 A-15 例 I-2：逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\mu=9.0$ ,  $\sigma=9.0$ )

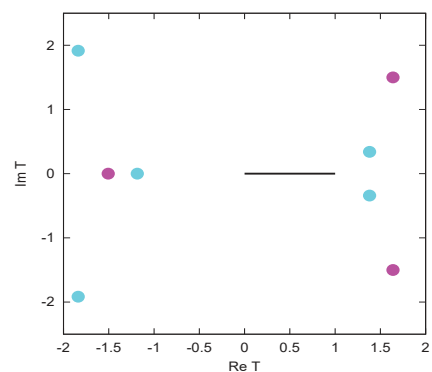


図 A-16 例 I-2：逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\mu=9.0$ ,  $\sigma=9.0$ )

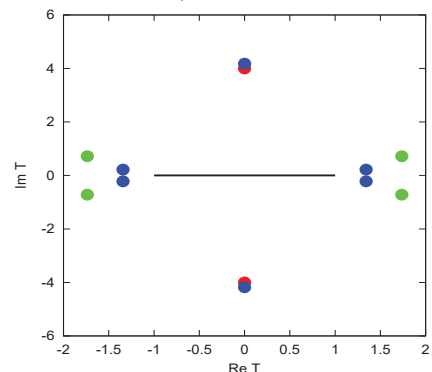


図 A-17 例 I-3：逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が偶数) ( $\mu=16.0$ ,  $\sigma=16.0$ )

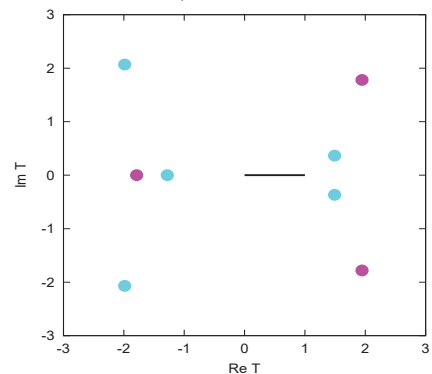


図 A-18 例 I-3：逆チェビシェフ型拡張による伝達関数の極の分布 ( $k$  が奇数) ( $\mu=16.0$ ,  $\sigma=16.0$ )