# 遺伝的アルゴリズムに基づく疎行列解法のパラメタに関する オンライン自動チューニング

山本 堅太郎1 松本 正晴1 須田 礼仁1

概要:遺伝的アルゴリズム (GA) によって GMRES の初期値を生成して性能を改善する手法が直野・佐 川らによって提案されている.本論文では同様の GA を BiCG に適用し, GA に関するオプションをオン ライン自動チューニングで探索する手法を提案する.提案手法は須田らによるワンステップ近似に基づい ているが,反復法は収束しないことがあり,コストが無限大になるという問題があった.それに対して本 研究では反復法が収束する確率をモデル化してワンステップ近似を拡張した.またラテン格子を用いた初 期実験で効率的に性能を推定した.その結果,提案手法は単純な自動チューニングに比べ最大で約2倍の 性能を達成した.

# Online Autotuning of Parameters of Genetic Algorithm-based Sparse Linear Solver

YAMAMOTO KENTARO<sup>1</sup> MATSUMOTO MASAHARU<sup>1</sup> SUDA REIJI<sup>1</sup>

# 1. はじめに

連立一次方程式の求解,特に偏微分方程式を解く際に頻 繁に表れる大規模疎行列を係数とする連立一次方程式の求 解は科学技術計算の根本要素であり,高速・高並列・高安 定なアルゴリズムの探求が行われ続けている.近年は前処 理付き Krylov 部分空間法やマルチグリッド法など収束性 のよい解法がよく研究されている.

その中で直野ら [1], 佐川 [2] による GA-GMRES は, 遺 伝的アルゴリズム (GA) を Krylov 部分空間法の 1 つであ る GMRES に適用した特徴的な研究である. GA-GMRES では, GMRES の初期ベクトルを GA で決める. 複数の 初期ベクトルから比較的少ない回数の GMRES 反復を行 い,(比較的精度の低い)近似解を複数得る. これに交差や 突然変異などの GA 的操作を施し,次の複数の初期ベクト ルを作成する. これを繰り返すと,急速に解に収束する初 期値が得られるというものである.

© 2017 Information Processing Society of Japan

我々は GA-GMRES に興味を持ち,同様の手法を BiCG に適用してみた.これを GA-BiCG と呼ぶことにする.し かし思うような結果はなかなか得られなかった.GA-BiCG にはアルゴリズムの挙動に影響を与えるいくつものパラ メタがある.例えば,GA における個体数,上述の GA-GMRES で説明した「比較的少ない回数の GMRES 反復」 の反復数(以下,1世代あたりの反復回数という),交差 や突然変異などの GA 的操作などである.従来研究でもこ れらのパラメタが収束に与える影響が議論されているが, 我々の予備実験でもこれらのパラメタの影響は明確であ り,また行列によっても影響が異なる様子であった.そし て,行列ごとに GA-BiCG のための最適パラメタを人手で 決定するのは容易ではない.

そこで、本研究では、自動チューニングの手法を GA-BiCG に適用し、行列ごとにチューニングパラメタを自動 的に最適化することを目指した.ここでは、チューニング パラメタとして、GA における個体数 nc,1世代あたりの 反復回数 ITE,交差の方法 co を選んだ.また,我々が以 前から取り組んでいる Bayes 統計に基づく近似最適逐次実 験計画法であるワンステップ近似 [3] をベースにして、反

東京大学情報理工学系研究科 Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo, 7–3–1 Hongo, Bunkyo, Tokyo 113– 8656, Japan

IPSJ SIG Technical Report

復回数を目的関数とするオンライン自動チューニングの手 法を開発した.

本研究で自動チューニングとしては新たな課題が1つ生 じた.ワンステップ近似は一般の分布に単純に拡張できる が,正規分布は特によい性質を示すことが知られている[4]. 今回は BiCG の反復回数をコストとしているが,一般に 反復法は行列や初期値によっては(設定された上限反復回 数までに)収束しない場合もある.収束しない場合に反復 数を「上限反復回数」とすると,実際よりも下に見積もり すぎになるのに加えて,上限反復回数に値が集中してしま い,正規分布から大きくはずれてしまう.残差が増加して ゆくような場合には反復回数は「無限大」とするのが適切 と思われるが,そのように扱うと平均も分散も発散して正 規分布は完全に使えなくなってしまう.

そこで我々はコストである反復回数だけではなく、「収 束するかしないか」を表すもう1つのコスト関数を定義 し、これらの組み合わせで最適化することとした. 行列と GA のパラメタを固定しても、右辺が変わると、収束した りしなかったりする. 我々は右辺は確率的に定まると想定 して、「収束する場合の反復回数」と「収束確率」を別々に 推定することにした.提案手法では,反復回数が上限に達 した時には、そこまでの結果を破棄して、パラメタを最も 収束しやすいと推定されるものに変更して求解を最初から やり直す.それでも収束しない場合には、どのようなパラ メタでも収束しない恐れがあると考えて、求解そのものを 諦めることとした.すなわち最悪の場合には上限反復回数 の2倍の反復が行われることになる.このような整理のも とで反復回数の Bayes モデルを構築することができる. さ らにワンステップ近似を適切に拡張することで、オンライ ン自動チューニングを実現することができた.

本研究ではさらなる高性能化として,パラメタごとに性 能に与える影響を推定するモデルを構築し,これを利用す る.このモデルはワンステップ近似によるオンライン自動 チューニングに入る前に,ラテン格子を用いた初期実験を 行うことで初期化される.これにより少数の初期実験で性 能の大体の傾向をつかむことができ,自動チューニングを 効率化することができた.

以下,本論文は次のような構成となっている.次の2節 では自動チューニングの対象である GA-BiCG を説明す る.3節では自動チューニング手法を説明し,4節で結果 について述べる.5節は本論文のまとめである.

# 2. GA-BiCG

図1に GA-BiCG のアルゴリズムを示す.各世代での反 復回数の上限 *ITE*,交差アルゴリズム *co*,個体数 *nc* は与 えられるものとする.返り値は計算に要した反復回数であ る.全世代を通算した総反復回数の上限 β も行列サイズを 参照して設定されているものとする.また本論文では収束 条件として相対残差が 10<sup>-8</sup> となったところで反復を打ち 切るものとした.

ベクトル  $x[k]_i^l$  は第 l 世代の k 番目の染色体による BiCG の 第 i 反復における近似解, ベクトル  $x^*[k]_i^l$  は対応するシャドーベクトルである.まず,右辺  $b^*$  および  $(x[k]_0^1, x^*[k]_0^1)$  は乱数で生成する.次に l ループが GA の 世代に関する反復である.そこではまず, nc 個ある染色体 をそれぞれ初期値として BiCG を ITE 回まで反復する. そうして得られた近似解の中で残差が 10<sup>-8</sup> より小さいも のが 1 つでもあれば,解が得られたとして終了する.また  $l \times ITE$  が  $\beta$  より大きくなれば,収束しなかったものとし てやはり計算を終了する.それ以外の場合は,最後の近似 解の集合に交差を施して新たな初期値を生成する.

交差のアルゴリズムは4つある.これらは佐川 [2] と同 じものを採用した.

- 0 Simple average: 2つのベクトルの和を2で割る.
- Single point crossover:新たなベクトルの最初の半分の要素は1つのベクトルから、残りの半分の要素はもう1つのベクトルから取る.
- Mutated simple average: Simple average の結果に小 さな乱数を加える. 乱数の大きさは残差ノルムの 1/10 とする.
- 3 Weighted average:新たなベクトルの残差が最小とな るように、2つのベクトルの重み付き平均を取る.

ただし weighted average は具体的には次のようにした. 反復最後の  $(x[k]_{ITE}^{l}, x[k+1]_{ITE}^{l})$  から

$$\begin{aligned} x[k]_{0}^{l+1} &= x[k]_{ITE}^{l} + t\Delta x, \\ x^{*}[k]_{0}^{l+1} &= x[k]_{ITE}^{l} + t\Delta x^{*}, \\ \Delta x &= x[k+1]_{ITE}^{l} - x[k]_{ITE}^{l}, \\ \Delta x^{*} &= x^{*}[k+1]_{ITE}^{l} - x[k]_{ITE}^{l}, \\ t &= \operatorname{argmin} \|b - Ax[k]_{0}^{l+1}\|_{2} \\ &= \left(b - Ax[k]_{ITE}^{l}, A \cdot \Delta x\right) / \left(A \cdot \Delta x, A \cdot \Delta x\right). \end{aligned}$$

のようにして  $(x[k]_0^{l+1}, x^*[k]_0^{l+1})$  を計算する.

# 3. GA-BiCG の自動チューニング手法の提案

#### 3.1 自動チューニングの概要

図2にGA-BiCGの自動チューニングの概要を示す.こ れはオンライン自動チューニングの問題設定であり,係数 行列が同じAで右辺bが異なるN個の連立一次方程式を 逐次に解く.各求解(以下ステップという)で下記のオプ ションを設定しながら,Nステップの合計の反復回数をで きるだけ小さくしたい.

各回の計算でオプションと呼ぶ (*ITE*, *co*, *nc*)の組を選 ぶ.本研究では、反復回数 *ITE* は 50, 100, 150, 200 のう ちから 1 つ、交差 *co* のアルゴリズムは 0, 1, 2, 3 のうちか ら 1 つ、個体数 *nc* は 1, 4, 8, 12 のうちから 1 つを選ぶこ

Vol.2017-HPC-159 No.2 2017/4/17

Set initial guess pairs of vectors  $(x[k]_0^1, x^*[k]_0^1)$  with random numbers Set the constant vector  $b^*$  with random numbers

For l = 1, 2, ..., Do

For k = 1, 2, ...nc, Do Solve Ax = b with initial guess  $(x[k]_0^l, x^*[k]_0^l)$  using BiCG until *ITE* steps EndDo If any relative residual norm is smaller than  $10^{-8}$ Return  $l \times ITE$ EndIf If  $l \times ITE$  is bigger than  $\beta$ Return  $\beta$ 

Cross  $\left(x[k]_{ITE}^{l}, x^{*}[k]_{ITE}^{l}\right)$  (k = 1, 2, ..., nc) to obtain  $\left(x[k]_{0}^{l+1}, x^{*}[k]_{0}^{l+1}\right)$  with crossover algorithm co

EndDo

図1 GA\_BiCG(ITE, co, nc) のアルゴリズム

For i = 1, ..., N Do

EndIf

Choose option o = (ITE, co, nc)Solve  $Ax_i = b_i$  using GA\_BiCG(ITE, co, nc) If the algorithm fails Choose another option o' = (ITE', co', nc')Solve  $Ax_i = b_i$  using GA\_BiCG(ITE', co', nc') EndIf

Update option o and o'

EndDo

図2 GA-BiCG の自動チューニングの概要

とにした.これらの組み合わせにより,合計 64 通りのオ プションがある.

#### 3.2 収束確率の推定

ワンステップ近似では,正規分布を仮定した Bayes 統計 を用いてきた.ところが第1節で詳述したように,反復が 収束しない場合があるため,正規分布の仮定が明らかに適 切でない.

そこで本研究では、反復回数のモデルに加えて、収束す る「確率」をモデル化することとした.すなわち、反復が 収束する場合としない場合が確率的に発生すると仮定して 「収束する確率」(以下「収束確率」という)を推定するモ デルを作る.また反復が収束する場合に限り、その反復回 数を推定するモデルを作る.これら2つのモデルを自動 チューニングの進行に従って更新しつつ、よいオプション を探る.

反復回数は従来研究 [3] と同様に正規分布で推定する. 事前分布については後述する.以下では収束確率のモデル について説明する.

オプション A の収束確率を  $\theta_A$  とする.本研究では  $\theta_A$ はベータ分布に従うものと仮定し、事前分布を Be(a,b) と する.ここで a, b は非負実数である.自動チューニングの 実行の中でオプション A が n 回選ばれて、そのうち k 回 が収束したとする.このとき  $\theta_A$  の事後分布の確率密度関 数は

$$p(\theta_A) = \frac{\theta^{k+a-1} (1-\theta)^{n-k+b-1}}{B(k+a, n-k+b)}$$

となる. これは Be(k+a, n-k+b) というベータ分布で あり, 収束確率の期待値は  $p = \frac{k+a}{n+a+b}$  である.

3.3 ワンステップ近似の拡張

次に, 収束確率の推定モデルを利用してワンステップ近 似を拡張する.

我々は,オプション Aのコスト  $c_A$ を以下のように定義 する.

$$c_A = \theta_A \mu_A + (1 - \theta_A) \, 2\beta$$

ここで $\theta_A$  は収束確率のモデル, $\mu_A$  はモデルにより推定 された反復回数の期待値である.コスト $c_A$  が意味すると ころは,確率 $\theta_A$  で収束し,収束したら反復回数 $\mu_A$  がか かり,収束しなければ反復回数  $2\beta$  がかかるということで ある.収束しなかった場合は,1回は $\beta$ の反復がかかる が,もう1回代替のオプションを用いて再度解こうとする ため,それが収束すれば $\beta$ より少ない反復回数となる.し かし,我々はそもそもオプション A で1回解けなかった 問題はオプションを変えても解けない可能性が高いと考え た.そのため,最悪値である  $2\beta$  でモデル化することはあ る程度妥当であると考えた.

ここで,まず第 N - 1 ステップ(最後から 2 ステップ 目)の実行におけるオプションの選択について議論する. 第 N - 1 ステップにオプション A が実行されて,収束し た場合には反復回数が  $x_A$  となると仮定する. この  $x_A$  は 第 N - 1 ステップの実行の前の事前分布により推定され る.その確率密度関数を  $q_A(x_A)$  とする.

このとき,最後の第 N ステップの反復にかかるコストの期待値は以下のように推定される.

**IPSJ SIG Technical Report** 

$$\begin{split} \hat{x}_{AN} &= \int_{0}^{1} \left(1-\theta\right) c'p\left(\theta\right) d\theta + \int_{0}^{1} \theta c''p\left(\theta\right) d\theta \\ c' &= \begin{cases} \bar{c}_{A} & \text{if } \bar{c}_{A} < \bar{c}_{min} \\ \bar{c}_{min} & \text{otherwise} \end{cases} \\ c'' &= \int_{-\infty}^{\xi_{A}} c_{A}q_{A}\left(x_{A}\right) dx_{A} \\ &+ \int_{\xi_{A}}^{\infty} \bar{c}_{min}q_{A}\left(x_{A}\right) dx_{A} \\ \bar{c}_{A} &= \int_{0}^{1} c_{A}p\left(\theta\right) d\theta \\ &= \frac{k+a}{n+a+b+1} \mu_{A} + \left(1-\frac{k+a}{n+a+b+1}\right) 2\beta \\ \bar{c}_{min} &= \min_{i \neq A} c_{i} \end{split}$$

右辺第1項は第N-1ステップにオプション A で反復 が収束しなかった場合に対応する.このとき、収束確率の モデルは更新されるが、反復回数のモデルは更新されない. この更新の結果オプション A のコストの期待値が  $\bar{c}_A$  とな る.最終回には、コストが最小のオプションを選ぶべきで あるが、そのコストが c' である.

右辺第2項は第N-1ステップにオプション A で反復 が収束した場合に対応する.このとき,反復回数のモデル は更新されるが,収束確率のモデルは更新されない.この 更新の結果は反復回数  $x_A$  による.式中に現れる  $\xi_A$  は,  $x_A \leq \xi_A$  であれば,オプション A のコストの期待値が, 全オプションの中で最小になるような値である.すなわち  $x_A \leq \xi_A$  であれば最終回にはオプション A が選ばれ,そ うでなければ A 以外のオプションでコストの期待値が最 小となるオプションが選ばれる.その結果,最終回のコス トの期待値が c'' となる.

我々は  $p(\theta)$  の扱いについていくつかの方法を試した. その結果,もっとも単純でありながらもっとも有効だった 手法は,  $\int \theta p(\theta) d\theta$  のかわりに  $\theta$  の期待値  $p_A$  を用いるも のであった.このときコストの期待値は

 $c_A = p_A \mu_A + (1 - p_A) 2\beta$ 

となる. オプション A が n 回実行されて k 回収束したと き,  $p_A = \frac{k+a}{n+a+b}$  となる. このとき最終回のコストの期待 値  $\hat{x}_{AN}$  は

$$\begin{aligned} \hat{x}_{AN} &= E_1 + E_2 \\ E_1 &= (1-p) \min \left\{ (p'\mu_A + (1-p') 2\beta), \bar{c}_{min} \right\} \\ E_2 &= p \int_{-\infty}^{\xi_A} (p''\mu_A + (1-p'') 2\beta) q(x_A) dx_A \\ &+ p \int_{\xi_A}^{\infty} \bar{c}_{min} q_A(x_A) dx_A \end{aligned}$$

のようになる. ここで確率  $p' \ge p''$  はそれぞれ  $\frac{k+a}{n+a+b+1}$  と  $\frac{k+a+1}{n+a+b+1}$  となる. これらをまとめると

For i=1,...,N , Do Choose option  $o_i = (ITE_i, co_i, nc_i)$ Solve  $Ax_i = b_i$  using GA\_BiCG( $ITE_i, co_i, nc_i$ ) If the algorithm fails Choose another option  $o_{i'}$  s.t.  $o_{i'} = \operatorname{argmax} p_j$ Solve  $Ax_i = b_i$  using GA\_BiCG( $ITE_{i'}, co_{i'}, nc_{i'}$ ) If the algorithm fails update  $p_i$ update  $p_{i'}$ Else update  $p_i$ update  $p_{i'}, \mu_{i'}, \tau_{i'}^2$ EndIf Else update  $p_i, \mu_i, \tau_i^2$ EndIf

EndDo

図3 自動チューニングにおける推定値の更新

$$E_{1} = \left(1 - \frac{k+a}{n+a+b}\right) \min \{D, c_{min}\}$$

$$E_{2} = A + 2\beta B + C$$

$$A = \frac{(k+a)(k+a+1)}{(n+a+b)(n+a+b+1)} \int_{-\infty}^{\xi_{A}} \mu_{A}(x_{A}) q_{A} dx_{A}$$

$$B = \frac{(k+a)(n-k+b)}{(n+a+b)(n+a+b+1)} \int_{-\infty}^{\xi_{A}} q_{A}(x_{A}) dx_{A}$$

$$C = \frac{k+a}{n+a+b} \bar{c}_{min} \int_{\xi_{A}}^{\infty} q_{A}(x_{A}) dx_{A}$$

$$D = \frac{k+a}{n+a+b+1} \mu_{A} + \left(1 - \frac{k+a}{n+a+b+1}\right) 2\beta$$

となる.

#### **3.4** 収束確率の更新

自動チューニングにおいてどのような情報更新が行われ るかを図3に示す.提案手法では,選んだオプションで反 復が収束しなかった場合,収束確率が最も高いと推定され るオプションで解きなおす.

本研究では,解きなおしの際に収束したか否かの情報を, 解きなおしに選ばれたオプションの収束確率に反映させて いる.最初のオプションで収束しなかったということは, そもそも解きにくい問題である可能性があるので,解きな おしのオプションの収束確率に反映させるのが適切かどう かは議論の余地がある.しかし本研究では,より詳細な情 報を収集することに重きを置いて,情報を更新することと した.

#### 3.5 初期実験

何ら事前情報がない場合,自動チューニングにできることはランダムにオプションを選ぶことぐらいになってしまう.本研究では,少数の初期実験によりオプションの効果

を推定することとした.具体的には,全部で N ステップ 解かれる連立一次方程式の最初の数ステップを決まったオ プションで解く「初期実験」に当て,残りのステップでワ ンステップ近似を用いたオンライン自動チューニングを実 行する.すなわち,全体の実行ステップ数は変わらず,計 算の最初の部分が初期実験にあてられる.

本研究では初期実験のための実験計画にラテン格子の一 種である Symmetric Latin Hypercube Design (SLHD) [5] を用いた.これを GA-BiCG に用いると,例えば以下のよ うな標本点が得られる.

$$\begin{array}{c} (50,2,8)\\ (50,0,1)\\ (100,0,4)\\ (100,1,12)\\ (150,2,1)\\ (150,2,1)\\ (150,3,8)\\ (200,3,12)\\ (200,1,4) \end{array}$$

#### 3.6 初期実験を用いた性能の推定

前節で導入された初期実験  $o_i = (ITE_i, co_i, nc_i)$  (i = 1, ..., 8) から性能を以下のように推定する.以下ではオプ ション  $o_i$  による反復回数を  $x_i$  とし、またオプション  $o_i$ による反復が収束したとき  $s_i = 1$ ,収束しなかったとき  $s_i = -1$  とする.

まず,実験的に,オプションのうち co が性能に与える 影響は ITE と nc よりも小さいことを観測した.そこで, 我々は ITE と nc のみを性能推定に用いることとした. モデルには線形モデル

$$x = w_1 \cdot ITE + w_2 \cdot nc + w_3$$
$$s = u_1 \cdot ITE + u_2 \cdot nc + u_3$$

を用いた.係数  $(w_1, w_2, w_3)$  および  $(u_1, u_2, u_3)$  は線形最 小二乗法により推定した.ここから事前分布のパラメタ  $\mu_{i,0}$  と  $p_{i,0}$  を

$$\begin{split} \mu_{i,0} &= w_1 \cdot ITE_i + w_2 \cdot nc_i + w_3 \\ p_{i,0} &= \begin{cases} 1 & \text{if } u_1 \cdot ITE_i + u_2 \cdot nc_i + u_3 > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases} \end{split}$$

のように設定した. ここで  $p_{i,0}$  は  $\frac{1}{2}$  または 1 の値を取る. これに 2 回の事前実験に相当する重みを与えた. すなわ ち, 2 回の事前実験のうち 1 回は収束したものとし, もう 1 回は  $s_j > 0$  なら収束で, そうでなければ収束しなかった ものとみなす.

また,  $\tau^2 \geq \sigma^2$  は以下のようにして定めた. 初期実験に おける反復回数の標本分散が Set  $n_i = 0$ 

Set  $M_i = 0$ 

Set  $S_i = 0$ 

For each  $x_i^j$  observed at j th execution with option in  $O_i$ , Do If  $\frac{x_i^j - M_i}{\sqrt{2}} < \gamma$ 

$$\begin{split} & \sqrt{\sigma_{i,j-1}} \\ & n_i = n_i + 1 \\ & M_{old} = M_i \\ & M_i = M_i + (x_i^j - M_i)/n_i \\ & S_i = S_i + (x_i^j - M_i)(x - M_{old}) \\ & \sigma_{i,j}^2 = S_i/(n_i - 1) + (ITE_i)^2 / 12 \\ & \text{EndIf} \end{split}$$

EndDo

図 4 
$$\sigma_{i,j}^2$$
 の推定方法

$$au_{ini} = rac{1}{|S| - 1} \sum_{j \in S} (x_j - \bar{x})^2$$
 $ar{x} = rac{1}{|S|} \sum_{j \in S} x_j$ 
 $S = \{j \mid オプション o_j が収束 \}$ 

と計算される.この  $\sigma_{ini}$ の期待値は  $\tau^2 + \sigma^2$  となる.そ こでこの値を  $\tau^2$  と  $\sigma^2$  に均等に割り振ったものとして,

$$\tau^{2} = \sigma^{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|S| - 1} \sum_{j \in S} (x_{j} - \bar{x})^{2} \right)$$

とした.

以上,本節では初期実験からの性能の推定方法を説明したが、これらの情報は、観測がひとつもない場合にのみ適用される.ひとつでも観測されたのちには、観測値のみを用いて性能を推定する.すなわち、オプション $o_i$ でn回実行して反復回数 $x_i^1, ..., x_i^n$ が得られたとして、

$$\mu_{i,n} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^n x_i^j$$
  
$$\tau_{i,n}^2 = \frac{\sigma_i^2}{n}$$

を事後分布に用いた.

#### 3.7 分散の推定

分散  $\sigma_i^2$  の推定は易しくない問題である. 我々は実験的 に *ITE* と nc が共通のオプションに対しては分散が似たよ うな値を取ることを見出した. そこで *ITE* と nc が共通 のオプションを  $o_{i1}$ ,  $o_{i2}$ ,  $o_{i3}$ ,  $o_{i4}$  としてこれらのオプショ ンをからなるグループ  $O_i$  (i = 1, ..., 16) を

$$O_i = \{o_{i1}, o_{i2}, o_{i3}, o_{i4}\},\$$

と定義する.また, $\sigma_{i,j}^2$ を *j* 個の観測から推定された  $\sigma_i^2$ の値として,これらを Welford algorithm [6] で推定することとした.図4にそのアルゴリズムを示す.

反復回数 x<sup>j</sup><sub>i</sub>の分布は右の裾が長く,左の裾が短い.そ

こで本研究では外れ値を検出してそれを含まないように推 定することにした.この処理は図4の5行目にあり, $\gamma = 3$ とした.

また,今回の手法では反復回数が *ITE* の倍数に制限される.これが見かけの分散を抑える効果を持っており,観 測値としては分散が0(常に同じ反復回数だったとき)となる.これはワンステップ近似のアルゴリズムで問題を引き 起こす.本研究では反復回数が *ITE* の倍数になってしま うことを考慮して図4の10行目にあるように,*ITE*<sup>2</sup>/12 を人工的に加えてある.この加えた項は,*ITE*<sub>i</sub>の幅の中 で一様分布をしたときに得られる分散である.

#### 3.8 収束確率の事前分布の更新

収束確率  $p_i$  の事前分布の期待値  $p_{i,0}$  は,何の情報もな ければ 1/2 とすることが多い.しかし何度か観測をした後 には,事前分布を更新することが有効である.以下では j個の観測後のオプション i の収束確率の事前分布を  $p_{i,0,j}$ とする.そしてグループ  $O_i$  の収束確率  $P_i$  を

$$P_{i} = \frac{K_{i}}{N_{i}}$$

$$K_{i} = k_{i1} + k_{i2} + k_{i3} + k_{i4}$$

$$N_{i} = n_{i1} + n_{i2} + n_{i3} + n_{i4}$$

と定義する. そして線形モデル

 $P = v_1 \cdot ITE + v_2 \cdot nc + v_3$ 

を仮定して,重み付き最小二乗法で  $(v_1, v_2, v_3)$  を推定する. オプショングループ  $O_i$  に対する重みは  $N_i$  とした.

そのうえで、オプション  $o_i = (ITE_i, co_i, nc_i)$  の収束確 率の事前分布の期待値を

$$p_{i,0,N_i} = v_1 \cdot ITE_i + v_2 \cdot nc_i + v_3.$$

とした.これが2回分の観測に値するとすることにより,

$$p_{i,n_i} = \frac{2p_{i,0,N_i} + k_i}{2 + n_i}$$

がオプション i の事後分布の期待値となる.

## 4. 結果

実験には Intel Core i7 2630QM 2.00GHz を用いた.係 数行列には Florida Sparse Matrix Collection から収束性 の異なる 8 つの行列を選んだ. これらの行列を表 1 に示 す.表には 100 回の実行の平均値によりもっともよいオプ ションともっとも悪いオプションでの収束確率 p, 平均反 復回数  $\mu$ , 反復当たりのコストの平均値 c も示してある. これに見るように, 行列によって最適なオプションは異な り,よいオプションと悪いオプションで性能が大きく異な ることも確認できる.

実験は以下のように行った. 右辺 b は各要素が 10<sup>-1</sup> か

ら 10<sup>1</sup> までの一様乱数で生成し,シャドウ b\* は b と同じ とした.初期値  $(x_0, x_0^*)$  も同じ分布の乱数で生成した.反 復回数の上限  $\beta$  は行列サイズの 1.3 倍とした.全体の実 行ステップ数 N は 50, 100, 200 の 3 通りを試した.性能 の指標として,次に示す ave と stddev を用いる.

- ave:総実行コストを N で割ったもの5つの平均値
- *stddev*:総実行コストを N で割ったもの5つの標準 偏差

また、以下で定義される regret と loss を計算した.

- regret: 最適なオプションの平均コストと ave との差
- loss: 最適なオプションの平均コストと, 自動チューニ

ングで最適と推定されたオプションの平均コストの差 オンライン自動チューニングの目的関数は regret の最小化 である. loss が最小と regret が最小とは異なる. loss を小 さくするには性能が不明確なオプションを多く試すべきで あるが,そうすると実験のコストがかさみ regret としては 劣化する.

またチューニング履歴として各ステップで選ばれたオプ ションを図示する.これらの図では縦軸はオプションの番 号,横軸はステップ数を示す.各ステップでは最大2回の 実行が行われる.最初の実行で収束した場合には赤の〇, 収束しなかった場合には緑の×で示す.また2度目の実行 で収束した場合には青の〇,収束しなかった場合にはピン クの×で示す.

表2および表3に実験結果を示す.表中 Pre-Ex は提案 手法で測定後も初期実験で得られた事前分布を用いるも の,NIPD は提案手法で測定後は測定値のみから事後分布 を決めるものである.また naive は比較のための単純な自 動チューニングであり,最初に64のオプションを1回ずつ 実行し,その後最適とみられるオプションを選び続ける.

行列 msc01440, rail\_1357, mhd3200\_b, orgseg\_1 に対し ては提案手法の 2 つの変種 Pre-Ex と NIPD で regret に大 きな差はなかったが, 一部では stddev が改善した. また ex29, watt\_2, lung1 では Pre-Ex よりも NIPD の regret が小さくなった. これらの行列の自動チューニング履歴を 図 5 に示す. 行列 ex29 と watt\_2 では, Pre-Ex では一度 収束しなかったオプションが他のオプションがすべて試さ れるまで使われなかったところ, NIPD では改善している. また lung1 では収束確率が低く初期実験だけでは情報が不 十分なところ, NIPD では改善している. またいずれの行 列でも単純な自動チューニングである naive よりも提案手 法である NIPD が小さい regret を示した. 特に N = 50のときには ave は 20% から 55% 減少した.

### 5. まとめ

本研究では直野・佐川らにより提案された GA-GMRES を BiCG に適用する試みから, GA に関するオプションの 最適化問題を導き,そのオンライン自動チューニング手法

name	size	nonzeros	kind	option		p	$\mu$	с
msc01440	1440	44998	structural	optimal	(50,1,12)	1.00	127	127
				pessimal	(200, 2, 1)	0.73	915	1679
rail_1357	1357	8895	model reduction	optimal	(50,3,4)	1.00	50	50
				pessimal	(100,2,1)	0.95	103	274
mhd3200b	3200	18316	electromagnetics	optimal	(50,3,12)	1.00	50.5	50.5
				pessimal	(200,2,1)	0.92	609	1226
ex29	2870	23754	fluid dynamics	optimal	(50,2,12)	0.92	169	729
				pessimal	(150,2,1)	0.21	855	6064
lung1	1650	7419	fluid dynamics	optimal	(50,0,12)	0.61	729	2125
				pessimal	(200,3,8)	0.02	2000	4245
wang2	2903	19093	semiconductor	optimal	(200,3,12)	1.00	698	704
				pessimal	(50,2,1)	0.77	1790	3114
orsreg_1	2205	14133	fluid dynamics	optimal	(200,3,4)	1.00	600	600
				pessimal	(50,1,1)	0.78	1408	2360
watt_2	1856	11550	fluid dynamics	optimal	(200,3,12)	0.87	1882	2257
				pessimal	(100,3,12)	0.02	2400	4778

# 表1 実験に用いた行列







#### 表 2 性能の比較(1)

50Pre-Ex NIPO9.9.67.02.4.4NIPO1009.1.16335.3.1navie4241.9.14.3.17.3.1NIPO16.21.9.16.3.12.9.1NIPO16.71.4.44.02.9.1NIPO16.61.4.44.02.9.1NIPO16.61.4.44.02.9.1NIPO16.61.1.44.02.9.1NIPO16.61.1.44.03.0NIPO16.21.8.82.5.13.1.1NIPO16.01.8.12.5.13.1.1NIPO16.71.9.11.1.12.4NIPO16.71.1.11.1.12.4NIPO16.71.1.11.1.12.4NIPO17.81.1.11.1.11.1.1NIPO17.81.1.11.1.11.1.1NIPO17.81.1.11.1.11.1.1NIPO17.81.1.11.1.11.1.1NIPO17.81.1.11.1.11.1.1NIPO17.81.1.11.1.11.1.1NIPO17.91.1.11.1.11.1.1NIPO17.91.1.11.1.11.1.1NIPO17.91.1.11.1.11.1.1NIPO17.91.1.11.1.11.1.1NIPO17.91.1.11.1.11.1.1NIPO17.01.1.11.1.11.1.1NIPO17.01.1.11.	matrix	N	Version	ave	stddev	regret	loss
NIPD1909.1635.3naive42419297731naive1696.2422.2NIPD1671.4402.9naive3661323947200Pre-Ex1522.5253.6NIPD1521.8251.9naive2671914055NIPD676.11724naive2671914055NIPD676.11724naive1083.758150100Pre-Ex715.72194naive1083.758150100Pre-Ex593.59.173200Pre-Ex593.59.173131naive1033.253134140Pre-Ex733.59.1135150Pre-Ex799.82.20.72100Pre-Ex737.5220.72100Pre-Ex737.52.00.72101Sito15110616351102Pre-Ex737.52.20.72103NIPD686.6185.7104Pre-Ex737.52.20.72105NIPD686.6185.7104NIPD151106		50	Pre-Ex	197	9.6	70	2.4
msc01440100Pre-Ex1696.24207.31msc01440100Pre-Ex1696.2422.2NIPD1671.4402.9naive3661.323947200Pre-Ex1522.5253.6NIPD1521.8251.9naive2671914055NIPD676.11724naive1083.758150100Pre-Ex687.11894111naive1083.758150100Pre-Ex715.72194111naive1189.868139200Pre-Ex593.59.173111naive1033.253134111naive1033.253134111naive1033.253134111naive19130140215111NIPD721.6220.7211110110185141341571111011018514134157111101101851413415711 <t< td=""><td></td><td></td><td>NIPD</td><td>190</td><td>9.1</td><td><u>63</u></td><td>5.3</td></t<>			NIPD	190	9.1	<u>63</u>	5.3
msc01440100Pre-Ex1696.2422.2NIPD1671.4402.9naive3661323947200Pre-Ex1522.5253.6NIPD1521.8251.9naive267191405550Pre-Ex687.118108NIPD676.11724naive1083.758150100Pre-Ex715.72194101Pre-Ex715.72194102Pre-Ex593.59.113200Pre-Ex593.59.173100Pre-Ex593.59.173111naive1033.253134120Pre-Ex881.17.713naive19130140215100Pre-Ex799.8282.0100Pre-Ex737.5220.72100Pre-Ex737.5220.72100Pre-Ex132140141155100Pre-Ex1321401641103111151510678670311811115151067867031181111515166185011181111515106786			naive	424	19	297	731
NIPD1671.4402.9naive3661323947200Pre-Ex1522.5253.6NIPD1521.8251.9naive2671914055NIPD676.11724naive1083.758150100Pre-Ex715.72194101Pre-Ex715.72194102Pre-Ex715.72194103NIPD676.42111104Pre-Ex715.72194105MIPD676.42111106Pre-Ex593.59.173200Pre-Ex593.59.173101NIPD581.17.713102Pre-Ex8817372.1114NIPD8915385.7115NIPD8915385.7116Pre-Ex799.8282.0117NIPD721.6221.6118NIPD737.5220.72119NIPD185144134157120Pre-Ex737.5220.72130NIPD1686.6185.014016110115106786	msc01440	100	Pre-Ex	169	6.2	42	2.2
Image			NIPD	167	1.4	<u>40</u>	2.9
200Pre-Ex1522.5.253.6NIPD1521.8.251.9naive2671.91405550Pre-Ex687.1.18108100Pre-Ex715.7.2194100Pre-Ex715.7.2194101Pre-Ex715.7.2191102Pre-Ex1189.8.6.8139203Pre-Ex593.5.9.1.73204Pre-Ex1033.2.5.3.134205Pre-Ex881.1.7.7.13206Pre-Ex8817.37.2.1.207Pre-Ex799.8.2.6.1.1.208Pre-Ex799.8.2.1.1.1.209Pre-Ex799.8.2.1.1.1.201Pre-Ex711.1.1.1.1.1.202Pre-Ex737.5.2.2.0.72203Pre-Ex731.1.1.1.1.1.204Pre-Ex7.51.1.1.1.1.1.205Pre-Ex1.1.1.1.1.1.1.1.206Pre-Ex1.1.1.1.1.1.1.1.207Pre-Ex1.1.1.1.1.1.1.1.208Pre-Ex1.1.1.1.1.1.1.1.209Pre-Ex1.1.1.1.1.1.1.1.204			naive	366	13	239	47
NIPD1521.8251.9naive2671914055naive2671914055NIPD676.11724naive1083.758150100Pre-Ex715.72194naive1189.868139200Pre-Ex593.59.173200Pre-Ex593.59.173201Pre-Ex593.59.173202Pre-Ex581.17.713naive1033.253134200Pre-Ex8817372.1NIPD581.17.713naive19130140215100Pre-Ex799.8282.0mhd3200-bPre-Ex799.8282.0100Pre-Ex799.8282.0101Pre-Ex737.5220.72201NIPD18514134157202NIPD15151061865.0103NIPD1515106786703104Pre-Ex17161809871118105NIPD1515106786703106Pre-Ex1716180987111810713012412001095108 <t< td=""><td></td><td>200</td><td>Pre-Ex</td><td>152</td><td>2.5</td><td><u>25</u></td><td>3.6</td></t<>		200	Pre-Ex	152	2.5	<u>25</u>	3.6
naive267191405550Pre-Ex687.118108NIPD676.11724naive1083.758150100Pre-Ex715.72194naive1189.868139200Pre-Ex593.59.173200Pre-Ex593.59.173201Pre-Ex593.59.173202Pre-Ex881.17.7131033.253134134104Pre-Ex8817372.1105Pre-Ex799.8285.7106Pre-Ex799.8282.0107Pre-Ex799.8282.0108Pre-Ex737.5220.72109Pre-Ex737.5220.72100Pre-Ex737.5220.72101Pre-Ex737.5220.72102Pre-Ex185144134157203Pre-Ex182013410901083104Pre-Ex11610010185105Pre-Ex182013410901083104Pre-Ex1161809871118105Pre-Ex1161809871118105Pre-Ex <td< td=""><td></td><td></td><td>NIPD</td><td>152</td><td>1.8</td><td>25</td><td>1.9</td></td<>			NIPD	152	1.8	25	1.9
			naive	267	19	140	55
NIPD676.11724naive1083.758150100Pre-Ex715.72194NIPD676.42111naive1189.868139200Pre-Ex593.59.173200Pre-Ex593.59.173101naive1033.253134102Pre-Ex881.17.7131033.253134141151104Pre-Ex8817372.1105Pre-Ex8817372.1106Pre-Ex799.8282.0107Pre-Ex799.8282.0108NIPD721.6221.6109Pre-Ex737.5220.72100Pre-Ex737.5220.72118NIPD686.6185.0109Pre-Ex182013410901083118NIPD1515106786703118NIPD15151067867031191019119202690597118NIPD1419202690597118NIPD1329595996891191329595996891100Pre-Ex168645 <td></td> <td>50</td> <td>Pre-Ex</td> <td>68</td> <td>7.1</td> <td>18</td> <td>108</td>		50	Pre-Ex	68	7.1	18	108
naive1083.758150100Pre-Ex715.7 <b>21</b> 94NIPD676.4 <b>21</b> 11naive1189.868139200Pre-Ex593.59.173200Pre-Ex593.59.173naive1033.25313450Pre-Ex8817 <b>37</b> 2.1NIPD8915385.7naive19130140215100Pre-Ex799.8282.0NIPD721.6 <b>22</b> 1.6naive18514134157200Pre-Ex737.5220.72NIPD686.6 <b>18</b> 5.0100Pre-Ex18013410901018514010185202Pre-Ex1820134109010312410901083104Pre-Ex1716180987118NIPD1419202 <b>690</b> 59713419101419202690597135106T86455956551136NIPD1329595996891371301027122612051226			NIPD	67	6.1	<u>17</u>	24
100Pre-Ex715.72194rail_1357NIPD676.42111naive1189.868139200Pre-Ex593.59.173200Pre-Ex593.59.173201NIPD581.17.713naive1033.25313410198153385.7102Pre-Ex8817372.1103140215385.7104Pre-Ex799.8282.0105Pre-Ex799.8282.0106Pre-Ex799.8282.0107Pre-Ex737.5220.72108NIPD721.66185.0109Pre-Ex737.5220.72100Pre-Ex182013410901083100Pre-Ex182013410901083100Pre-Ex17161809871118100Pre-Ex17161809871118100Pre-Ex168645956551101NIPD1419202690597101NIPD132959599689101NIPD132959599689101NIPD132959599689			naive	108	3.7	58	150
rail_1357NIPD676.42111naive1189.8668139200Pre-Ex593.59.173NIPD581.17.713naive1033.2531340Pre-Ex8817372.1NIPD8915385.7naive19130140215100Pre-Ex799.8282.0100Pre-Ex799.8282.0100Pre-Ex799.8282.0100Pre-Ex737.5220.72200Pre-Ex737.5220.72101NIPD686.6185.0102Pre-Ex182013410901083103Pre-Ex182013410901083104Pre-Ex18161641038703105Pre-Ex17161809871118106Pre-Ex17161809871118107NIPD1419202690597108NIPD1419202690597109NIPD1419202690597109NIPD1419202690597109NIPD132959599689100Pre-Ex166645956551109NIPD		100	Pre-Ex	71	5.7	21	94
Image	$rail_1357$		NIPD	67	6.4	21	11
200         Pre-Ex         59         3.5         9.1         73           NIPD         58         1.1         7.7         13           naive         103         3.2         53         134           naive         103         3.2         53         134           NIPD         88         17         37         2.1           NIPD         89         15         38         5.7           naive         191         30         140         215           100         Pre-Ex         79         9.8         28         2.0           100         Pre-Ex         79         9.8         28         2.0           1010         Pre-Ex         79         9.8         28         2.0           1010         Pre-Ex         73         1.6         22         1.6           200         Pre-Ex         73         7.5         22         0.72           200         Pre-Ex         134         104         103         303           101         I01         85         114         134         103           1020         Pre-Ex         1820         134         100         1			naive	118	9.8	68	139
NIPD         58         1.1         7.7         13           naive         103         3.2         53         134           naive         103         3.2         53         134           Naive         103         3.2         53         134           NIPD         88         17         37         2.1           NIPD         89         15         38         5.7           naive         191         30         140         215           100         Pre-Ex         79         9.8         28         2.0           100         Pre-Ex         73         7.5         22         0.72           200         Pre-Ex         73         7.5         22         0.72           111         101         101         85           111         111         101         103         103           1111         1111         1111		200	Pre-Ex	59	3.5	9.1	73
naive         103         3.2         53         134           50         Pre-Ex         88         17 <b>37</b> 2.1           NIPD         89         15         38         5.7           naive         191         300         140         215           100         Pre-Ex         79         9.8         28         2.0           100         Pre-Ex         73         7.5         22         0.72           200         Pre-Ex         73         7.5         22         0.72           110         I01         85         14         134         157           200         Pre-Ex         132         100         101         85           1110         I01         101         85         103         103         103           1111         Inaive         1515         106 <b>786</b> 703           1111         <			NIPD	58	1.1	7.7	13
50Pre-Ex $88$ $17$ $37$ $2.1$ NIPD $89$ $15$ $38$ $5.7$ naive $191$ $30$ $140$ $215$ $100$ Pre-Ex $79$ $9.8$ $28$ $2.0$ $100$ Pre-Ex $79$ $9.8$ $28$ $2.0$ $100$ Pre-Ex $79$ $9.8$ $28$ $2.0$ $100$ Pre-Ex $73$ $7.5$ $22$ $1.6$ $200$ Pre-Ex $73$ $7.5$ $22$ $0.72$ $110$ Pre-Ex $73$ $7.5$ $22$ $0.72$ $110$ Pre-Ex $73$ $7.5$ $22$ $0.72$ $111$ $101$ $85$ $14$ $134$ $157$ $200$ Pre-Ex $1820$ $134$ $1090$ $1083$ $110$ Pre-Ex $1716$ $180$ $987$ $1118$ $100$ Pre-Ex $1716$ $180$ $987$ $1118$ $100$ Pre-Ex $1686$ $45$ $956$ $551$ $100$ $122$ $599$ $599$ $689$ $101$ $1229$ $59$ $599$ $689$			naive	103	3.2	53	134
NIPD8915385.7naive19130140215100Pre-Ex799.8282.0NIPD721.6221.6naive18514134157200Pre-Ex737.5220.72NIPD686.6185.0naive15110010185200Pre-Ex18201341090108385.0naive1515106786703991115106164110381039Pre-Ex171618098711189NIPD14192026905979100Pre-Ex1666459565511011329595996896899naive175730110271226		50	Pre-Ex	88	17	<u>37</u>	2.1
$ \begin{array}{ c c c c c c c } & naive & 191 & 30 & 140 & 215 \\ \hline naive & 79 & 9.8 & 28 & 2.0 \\ \hline NIPD & 72 & 1.6 & 22 & 1.6 \\ naive & 185 & 14 & 134 & 157 \\ \hline 200 & Pre-Ex & 73 & 7.5 & 22 & 0.72 \\ \hline 200 & Pre-Ex & 73 & 7.5 & 22 & 0.72 \\ \hline NIPD & 68 & 6.6 & 18 & 5.0 \\ naive & 151 & 10 & 101 & 85 \\ \hline naive & 151 & 10 & 101 & 85 \\ \hline naive & 151 & 100 & 101 & 85 \\ \hline NIPD & 1515 & 106 & 786 & 703 \\ \hline naive & 2371 & 140 & 1641 & 1038 \\ \hline naive & 2371 & 140 & 1641 & 1038 \\ \hline NIPD & 1419 & 202 & 690 & 597 \\ \hline naive & 1930 & 124 & 1200 & 1095 \\ \hline 200 & Pre-Ex & 1686 & 455 & 956 & 551 \\ \hline NIPD & 1329 & 59 & 599 & 689 \\ \hline naive & 1757 & 301 & 1027 & 1226 \\ \hline \end{array} $			NIPD	89	15	38	5.7
100Pre-Ex799.8282.0mhd3200.bNIPD721.6 $22$ 1.6naive18514134157200Pre-Ex737.5220.72200Pre-Ex737.5220.72200Pre-Ex7310010185200NIPD686.6 $18$ 5.0200Pre-Ex1820134109010834NIPD1515106 $786$ 7034naive23711400164110389Pre-Ex1716180098711189NIPD1419202 $690$ 5979naive193012412001095200Pre-Ex16864559565519NIPD1329599 $599$ 6899naive175730110271226			naive	191	30	140	215
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $		100	Pre-Ex	79	9.8	28	2.0
$ \begin{array}{ c c c c c c c c } & naive & 185 & 14 & 134 & 157 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 73 & 7.5 & 22 & 0.72 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 73 & 7.5 & 22 & 0.72 \\ \hline 100 & NIPD & 68 & 6.6 & 18 & 5.0 \\ \hline 100 & naive & 151 & 100 & 101 & 85 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 1820 & 134 & 1090 & 1083 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 1715 & 106 & 786 & 703 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 1716 & 180 & 987 & 1118 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 1716 & 180 & 987 & 1118 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 1716 & 180 & 987 & 1118 \\ \hline 100 & Pre-Ex & 1930 & 124 & 1200 & 1095 \\ \hline 200 & Pre-Ex & 1686 & 45 & 956 & 551 \\ \hline NIPD & 1329 & 59 & 599 & 689 \\ \hline 100 & naive & 1757 & 301 & 1027 & 1226 \\ \hline \end{array} $	$\rm mhd3200\_b$		NIPD	72	1.6	22	1.6
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			naive	185	14	134	157
$ \begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $		200	Pre-Ex	73	7.5	22	0.72
naive         151         100         101         85           50         Pre-Ex         1820         134         1090         1083           NIPD         1515         106 <b>786</b> 703           naive         2371         140         1641         1038           100         Pre-Ex         1716         180         987         1118           ex29         Pre-Ex         1716         1202 <b>690</b> 597           naive         1930         124         1200         1095           200         Pre-Ex         1686         45         956         551           NIPD         1329         599 <b>599</b> 689           naive         1757         301         1027         1226			NIPD	68	6.6	<u>18</u>	5.0
50         Pre-Ex         1820         134         1090         1083           NIPD         1515         106 <b>786</b> 703           naive         2371         140         1641         1038           100         Pre-Ex         1716         180         987         1118           100         Pre-Ex         1716         180         987         109           101         Pre-Ex         1930         124         1200         1095           200         Pre-Ex         1686         45         956         551           NIPD         1329         599         599         689           naive         1757         301         1027         1226			naive	151	10	101	85
$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$		50	Pre-Ex	1820	134	1090	1083
$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$			NIPD	1515	106	786	703
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $			naive	2371	140	1641	1038
ex29         NIPD         1419         202         690         597           naive         1930         124         1200         1095           200         Pre-Ex         1686         45         956         551           NIPD         1329         599         599         689           naive         1757         301         1027         1226		100	Pre-Ex	1716	180	987	1118
naive         1930         124         1200         1095           200         Pre-Ex         1686         45         956         551           NIPD         1329         59 <b>599</b> 689           naive         1757         301         1027         1226	ex29		NIPD	1419	202	<u>690</u>	597
200         Pre-Ex         1686         45         956         551           NIPD         1329         59 <b>599</b> 689           naive         1757         301         1027         1226			naive	1930	124	1200	1095
NIPD         1329         59         599         689           naive         1757         301         1027         1226		200	Pre-Ex	1686	45	956	551
naive 1757 301 1027 1226			NIPD	1329	59	599	689
			naive	1757	301	1027	1226

を提案した.従来のオンライン自動チューニング手法であ るワンステップ近似は正規分布を仮定していたため,反復 法が収束しない場合に現れるコストが無限大という状況が 適切に表現できなかったところ,収束確率の概念を導入し てワンステップ近似を拡張することにより解決した.また SLHDに基づく少数の初期実験から効率よく性能を推定す る手法を提案した.また分散および収束確率の推定方法を 改善する手法を示した.これらの手法により効率的に性能 のよいオプションを選ぶことができ,単純な自動チューニ ングに比べて最大約2倍の性能を達成した.

今後の課題としては,チューニング開始直後の挙動のさ らなる安定化や,今回外れ値検出で補正した正規分布から の逸脱のより適切な処理が挙げられる.

謝辞 本研究の一部は,科研費 15H02708 と 15K12033 および JST CREST「進化的アプローチによる超並列複合 システム向け開発環境の創出」の補助により実施された.

#### 表3 性能の比較(2)

mothin	N	Vancian		atddan	normat	laga
matrix	TN	Dre Est	ave DCAF	statev	regret	1088
	50	Pre-Ex	2045	04	520	408
		NIPD	2326	69	201	411
		naive	3082	70	956	468
lungl	100	Pre-Ex	2648	69	522	387
		NIPD	2334	73	<u>208</u>	362
		naive	2779	122	654	566
	200	Pre-Ex	2485	62	360	306
		NIPD	2321	119	196	336
		naive	2601	107	476	577
	50	Pre-Ex	793	14	95	18
		NIPD	790	28	<u>92</u>	17
		naive	1256	56	558	23
	100	Pre-Ex	750	11	52	13
wang2		NIPD	760	12	62	12
		naive	1067	25	369	99
	200	Pre-Ex	734	6.3	<u>36</u>	12
		NIPD	741	1.1	43	11
		naive	903	16	205	76
	50	Pre-Ex	627	9.0	27	0.33
		NIPD	635	10	35	12
		naive	792	5.2	192	1.2
	100	Pre-Ex	616	3.6	<u>16</u>	1.0
$orsreg_1$		NIPD	618	4.0	18	3.6
		naive	717	8.5	117	61
	200	Pre-Ex	610	3.0	10	0.14
		NIPD	609	1.0	<u>9.0</u>	3.0
		naive	691	15	91	59
	50	Pre-Ex	2972	108	715	301
		NIPD	2731	53	474	195
		naive	3722	48	1456	757
	100	Pre-Ex	2728	50	473	168
watt_2		NIPD	2557	50	300	152
		naive	3383	151	1126	906
	200	Pre-Ex	2680	76	423	151
		NIPD	2570	63	313	234
		naive	3084	231	827	700
		1		1	I	L

# 参考文献

- Naono, K., Zakaria, N., Sakurai, T., Pal, A. and Sagawa, N.: Evaluation of Genetic Algorithm on Initial Vector Settings for GMRES, 2013 SIAM Conference on Computational Science and Engineering, Boston, Massachusetts (2013).
- [2] 佐川暢俊: A Study on Effective Generation and Solution of Matrices in the Process of Numerical Simulation, 大 阪大学 情報科学研究科 博士論文 (2015).
- [3] Suda, R.: A Bayesian Method of Online Automatic Tuning, Software Automatic Tuning: From Concepts to the State-of-the-Art Results (Naono, K., Teranishi, K., Cavazos, J. and Suda, R., eds.), Springer, chapter 13, pp. 275– 294 (2010).
- [4] 須田礼仁:頑健で効率的なオンライン自動チューニングのための統計モデル,情報処理学会研究報告, Vol. 2008-HPC-116, pp. 109–114 (2008).
- [5] Park, J.-S.: Optimal latin hypercube designs for computer experiments, *Journal of Statistical Planning and Infer*ence, Vol. 39, pp. 95–111 (1994).
- [6] Welford, B. P.: Note on a method for calculating corrected sums of squares and products, *Technometrics*, Vol. 4(3), pp. 419–420 (1962).