

実対称定値一般固有値問題を解くための レゾルベントの多項式型フィルタの設計について

村上 弘^{1,a)}

概要：実対称定値一般固有値問題で固有値が指定した区間にある少数の固有対をフィルタ対角化法で解くものとする。ここで区間は固有値分布の端、あるいは一般的な位置にあるとする。いま固有値問題に対応するレゾルベントを考えて、前者の場合には実数のシフトを、後者の場合には虚数のシフトを採用する。今回はシフトが異なるレゾルベント二つの線形結合を考えて、前者の場合にはその多項式により、後者の場合にはその虚部の多項式により表されるフィルタの簡易な設計法について考察する。

キーワード：フィルタ対角化, 固有値問題, レゾルベント, 多項式

1. はじめに

行列 A と B が実対称で B は正定値の一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ の固有対で固有値が区間 $[a, b]$ にあるものをフィルタ対角化法を用いて解くことにする。固有値が $[a, b]$ にある固有ベクトルは良く伝達するが、固有値が $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く阻止する線形作用素 \mathcal{F} をうまく構成してフィルタとして用いる。 \mathcal{F} をレゾルベントの線形結合やレゾルベントの多項式として構成すると、 (λ, \mathbf{v}) を任意の固有対とすると、 $\mathcal{F}\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}$ が成立する。ここで $f(\lambda)$ はフィルタ \mathcal{F} の伝達関数と呼ばれ、 λ の有理関数である。

求める固有対の固有値の区間 $[a, b]$ が固有値分布の下端の位置にある（区間の左端 a は最小固有値 λ_0 以下）の場合には、区間 $\lambda \in [a, b]$ を標準区間 $t \in [0, 1]$ に対応させる線形変換 $t = (\lambda - a)/(b - a)$ により固有値 λ に対する正規化座標 t を定義する（図 1）。座標 t を使って表した伝達関数を $g(t) \equiv f(\lambda)$ で定義する。伝達関数 $g(t)$ の概念上の形を図 2 に示す。

あるいは求める固有対の固有値の区間 $[a, b]$ が固有値分布の任意の位置にある場合には、区間 $\lambda \in [a, b]$ を標準区間 $t \in [-1, 1]$ に対応させる線形変換 $t = 2(\lambda - a)/(b - a) - 1$ により固有値 λ に対する正規化座標 t を定義する。

1.1 フィルタ対角化法の概要

フィルタ対角化による N 次実対称行列 A と B (B は正定値) の一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ に対する解法の概要は次のようになる [1][2]。まず、固有値が区間 $[a, b]$ にある固有ベクトルは良く通過させるが固有値が区間 $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く阻止する線形作用素をフィルタ \mathcal{F} として用意する。そうしてランダムな N 次ベクトル m 個の組を作成して、それをまず B -正規直交化した X (N 次ベクトルを列として m 個並べた $N \times m$ 行列) を作る ($X^T B X = I$ である)。フィルタを X に適用して $Y \leftarrow \mathcal{F} X$ を作り、濾過されたベクトルの組 Y ($N \times m$ 行

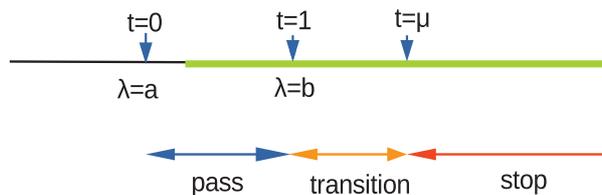


図 1 (下端固有対用) 固有値 λ の区間 $[a, b]$ と正規化座標 t の関係
通過域 $t \in [0, 1]$; 遷移域 $t \in (1, \mu)$; 阻止域 $t \in [\mu, \infty)$

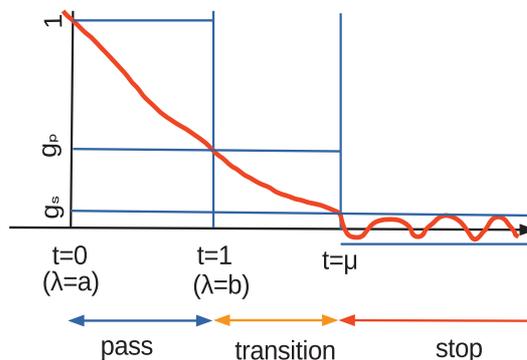


図 2 (下端固有対用) 伝達関数 $g(t)$ の概形

列) を作成する。そうして Y の列ベクトルの線形結合の組から「区間 $[a, b]$ の近傍にある固有値すべてに対応する不変部分空間」を近似する部分空間の基底を構成する（その

¹ 首都大学東京・数理情報科学専攻

^{a)} mrkkmhrsh@tmu.ac.jp

処理には X と Y に加えてフィルタの伝達特性も考慮に含める)。構成した基底に Rayleigh-Ritz 法を適用して得られた Ritz 対を、元の一般固有値問題の近似対とする。

1.2 レゾルベントの多項式によるフィルタ

フィルタ対角化に用いるフィルタとして多数のレゾルベントの線形結合をフィルタとする場合 ([1], [2], [3], [4], [5], [8]) とは異なり、単一のレゾルベントの多項式を採用する場合 ([6], [7], [9], [10], [11], [12], [13]) では、用いるレゾルベントが一つで済むので、レゾルベントの作用を実現するための連立一次方程式を行列分解を用いて解く場合には、多数ではなくて一つの行列についてだけ行列分解を行えば済む利点がある。(連立一次方程式を反復法で解く場合でも、反復法の収束率を向上させる前処理として行列の不完全分解を用いるのであれば、やはり一つの行列だけについて不完全分解を行えば済む。)レゾルベントの n 次多項式の作用をベクトルの組に適用するためには、係数行列がいつも同じである連立一次方程式の組を解く処理を逐次に n 回行う必要があるが、その際に連立一次方程式の組は一度行った行列分解の結果を利用して素早く解くことができる。

フィルタを単一のレゾルベントの「多項式」で構成する場合には、フィルタの特性が通過域と阻止域の双方で折り合いをみながらなるべく良くなるように最小二乗法に類似の方法などを用いて「多項式」をうまく最適化して作る ([6], [7], [9]) が望ましい。しかし、得られる「多項式」は数値的な最適化の結果であり、係数は数値の表としてだけ与えられるものになる。そのような調整を省いて「多項式」として明解な Chebyshev 多項式を採用する「簡易な設計法」([10], [11], [12]) の場合には、それで得られるフィルタは阻止域に於いては非常に良い減衰特性を容易に実現できるが、通過域では伝達率の最大最小比を抑える機能を持たない。通過域におけるフィルタの伝達率の最大最小比が大きい場合には、フィルタ対角化法で得られる近似対の精度の均一性が低下する可能性があり、極端な場合には必要な固有対の一部が得られない可能性もある。それで、単一のレゾルベントの多項式として、簡易設計型の Chebyshev 多項式から次数の異なる Chebyshev 多項式の線形結合に拡張して、通過域での伝達率の変動を抑えるように最小二乗法の定式化で線形結合の係数を決めることを試みた [13]。しかし通過域での変動の抑制は数値相殺により実現されるので、そのようなフィルタは数値の有効精度を失う傾向を持つと思われる。

そこで今回伝達関数の通過域での最大最小比を減らす他の手法として試みたのは、フィルタを単一のレゾルベントの多項式とすることから拡張して少数のレゾルベントの多項式にすることである。いま二つのレゾルベント $\mathcal{R}(\rho_1)$, $\mathcal{R}(\rho_2)$ を用いるのであれば、そのようなフィルタの一般形はある二変数多項式 $P(z_1, z_2)$ を用いて $\mathcal{F} = P(\mathcal{R}(\rho_1), \mathcal{R}(\rho_2))$ であり、その伝達関数は $f(\lambda) = P(1/(\lambda - \rho_1), 1/(\lambda - \rho_2))$ となる。多項式が $P(z_1, z_2) \equiv \sum_{i,j} p_{i,j} z_1^i z_2^j$ であれば、 $f(\lambda) = \sum_{i,j} p_{i,j} / \{(\lambda - \rho_1)^i (\lambda - \rho_2)^j\}$ となり、固有値 λ の区間 $[a, b]$ に対する規格化座標 t で表した伝達関数の形は $g(t) = \sum_{i,j} c_{i,j} / \{(t - s_1)^i (t - s_2)^j\}$ となる。そこでその特性をなるべく理想に近づくように極の位置 s_1, s_2 と係数 $c_{i,j}$ を最小二乗法などを用いて決定すれば良いことになる。しかし、このような伝達関数の一般形は自由度が非常に大きくなり、さらに $P(z_1, z_2)$ が各変数についてそれぞれ n_1 次と n_2 次の密多項式であれば、ベクトルの組にフィルタを適用する際には連立一次方程式の組を $n_1 n_2$ 回も解く必要があるため、たとえレゾルベント二つに対応する二つの行列分解をあらかじめ行ないその分解を利用して解く

としても、行列分解の後の計算の負荷がかなり大きい。

シフトが実数であるレゾルベント二つの多項式であるフィルタの伝達関数は極が実数二つの有理関数であるが、以下ではその形を強く制限した簡易な設計法を考察する。

2. 極が実数二つの伝達関数の簡易設計法

これまで Chebyshev 多項式を用いた簡易設計法では、極が実数一つの伝達関数 $g(t)$ の式は以下の形であるとしてきた (極は n 位で実数 $-\sigma$ である)。

$$g(t) \equiv g_s T_n(y), y \equiv 2x(t) - 1, x(t) \equiv \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma}. \quad (1)$$

この形の式は阻止域での伝達率は (n を増すと) 容易に微小にできるが、通過域での伝達率の最大最小比は (遷移域の幅 $\mu - 1$ を大きくしなければ) 小さくできない。それゆえこの簡易設計の手法を実数の極が一つの場合から二つの場合に拡張し、それで増えた自由度を利用して通過域に於ける伝達率の最大最小比を低下させることを試みる。そこで以下の式で表される無限遠では値が零で、極が負の実数二つの新しい実有理関数 $x(t)$ を採用してみる (ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ であるとする)。

$$x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t + \sigma_2}. \quad (2)$$

いま $\mu > 1$ であり、 $1 < x_L < x_H$ であるとして、通過域 $t \in [0, 1]$ は区間 $x \in [x_L, x_H]$ に、遷移域 $t \in (1, \mu)$ は区間 $x \in (1, x_L)$ に、阻止域 $t \in [\mu, \infty)$ は区間 $x \in (0, 1]$ に、それぞれ対応するものとする。そうして従来と同様の Chebyshev 多項式を用いた簡易設計では、伝達関数は $x(t)$ の多項式として以下の式で表されるとする。

$$g(t) \equiv g_s T_n(y), y \equiv 2x(t) - 1. \quad (3)$$

この伝達関数 $g(t)$ は、阻止域 $[\mu, \infty)$ で大きさが g_s 以下になり、通過域 $[0, 1]$ での最小値が g_p であり、最大値は 1 に規格化されるべきものとする。すると $1 < 2x_L - 1 < 2x_H - 1$ になることと Chebyshev 多項式は引数が 1 以上での狭義単調性から、

$$g_p = g_s T_n(2x_L - 1), 1 = g_s T_n(2x_H - 1) \quad (4)$$

である。実数 z の恒等式 $\cosh^{-1}(2z^2 - 1) = 2 \cosh^{-1}|z|$ も用いて式 (4) を双曲線関数で表せば以下のようにになる。

$$\begin{cases} x_L = \cosh^2 \left(\frac{1}{2n} \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s} \right), \\ x_H = \cosh^2 \left(\frac{1}{2n} \cosh^{-1} \frac{1}{g_s} \right). \end{cases} \quad (5)$$

すると三個のパラメタ n, g_s, g_p の組から (5) の各式の右辺を計算すると、 $x(t)$ の通過域における最小値 x_L と最大値 x_H が求まる。

2.1 方式 1 : 通過域の左端で停留となる伝達関数

いま通過域に於ける伝達率の最大最小比を低下させることを狙って、伝達関数は通過域に於いて左端 $t = 0$ で最大値をとるが、そこで値が停留する (微分値が零になる) という条件を課して構成してみる。

いま四個のパラメタ μ, g_p, g_s, n の組を指定するとき、その組の実現が可能ならば、以下に示す手順により $x(t)$ の式に含まれる四個の値 $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$ を決定できる。

まず $t = \mu$ と $t = 1$ における値の条件 $x(\mu) = 1$ と $x(1) = x_L$, さらに通過域の左端 $t = 0$ における値 $x(0) = x_H$ とそこで停留になる条件 $(d/dt)x(t)|_{t=0} = 0$ を順に式で表わすと以下ようになる.

$$\begin{cases} 1 &= \frac{\alpha_1}{\mu + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\mu + \sigma_2}, \\ x_L &= \frac{\alpha_1}{1 + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{1 + \sigma_2}, \\ x_H &= \frac{\alpha_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2}, \\ 0 &= -\frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2}. \end{cases} \quad (6)$$

上記の (6) の第四番目の式から得られる等式 $\alpha_1/\sigma_1^2 = \alpha_2/\sigma_2^2$ の値は t に依らない定数でそれを C とおくと, 二つの極の係数はそれぞれ $\alpha_1 = C\sigma_1^2$, $\alpha_2 = C\sigma_2^2$ と表される. また (6) の第一番目の式から, 定数 C の値の逆数は,

$$\frac{1}{C} = \frac{\sigma_1^2}{\mu + \sigma_1} - \frac{\sigma_2^2}{\mu + \sigma_2} = (\sigma_1 - \sigma_2) \times \frac{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} \quad (7)$$

と表せる. そうして (6) の第三番目の式は,

$$x_H = C(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \quad (8)$$

となり, また (6) の第二番目の式は,

$$\begin{aligned} x_L &= C \left(\frac{\sigma_1^2}{1 + \sigma_1} - \frac{\sigma_2^2}{1 + \sigma_2} \right) \\ &= \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \times \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \\ &= x_H \times \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \end{aligned} \quad (9)$$

となるので

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \times \frac{t(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(t + \sigma_1)(t + \sigma_2)} \\ &= x_H \times \frac{t(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(t + \sigma_1)(t + \sigma_2)} \end{aligned} \quad (10)$$

である. すると三つの値 μ , x_H , x_L の組から σ_1 と σ_2 の値が以下の手順で求められる. まず (8) と (9) から得られる以下の関係:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_H} = \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2) - \mu^2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} = 1 - \frac{\mu^2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}, \\ \frac{x_L}{x_H} = \frac{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) - 1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \end{cases} \quad (11)$$

を $p \equiv \mu^2(1 - 1/x_H)^{-1}$, $q \equiv (1 - x_L/x_H)^{-1}$ とおいて書き直すと, $(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2) = p$ と $(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) = q$ である. そうして $\sigma_1\sigma_2 + \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = p - \mu^2$ と $\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) = q - 1$ を得るが, これを σ_1 と σ_2 の基本対称式 $S_1 \equiv \sigma_1 + \sigma_2$ と $S_2 \equiv \sigma_1\sigma_2$ について解けば $S_2 = \mu + (\mu q - p)/(\mu - 1)$, $S_1 = (p - q)/(\mu - 1) - (\mu + 1)$ である. すると二次方程式 $w^2 - S_1 w + S_2 = 0$ が相異なる正の実根を二つ持つならば, それらが σ_1 と σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) である. こうして σ_1 と σ_2 が求まればそれから $C \leftarrow x_H/(\sigma_1 - \sigma_2)$ とすると, 極の係数は $\alpha_1 \leftarrow C\sigma_1^2$, $\alpha_2 \leftarrow C\sigma_2^2$ の計算で求まり, 極が実数二つの有理関数 $x(t) = \alpha_1/(t + \sigma_1) - \alpha_2/(t + \sigma_2)$ が決まる.

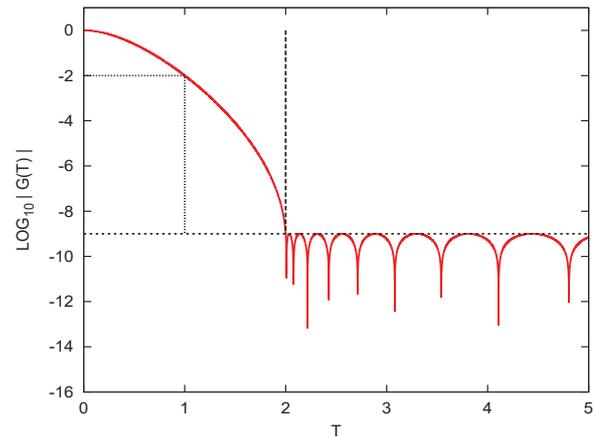


図 3 例 1 の 1 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=10^{-2}$, $g_s=10^{-9}$, $n=25$)

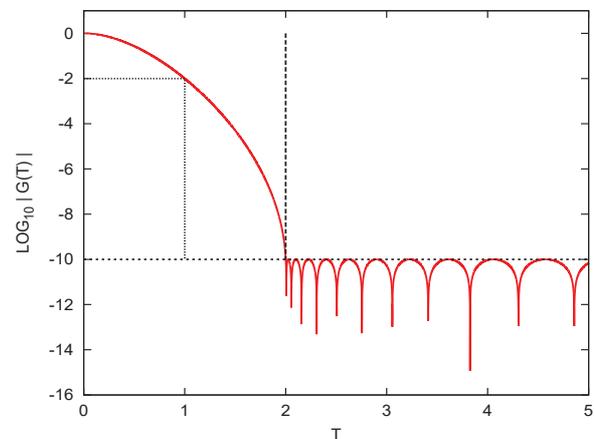


図 4 例 1 の 2 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=10^{-2}$, $g_s=10^{-10}$, $n=35$)

2.1.1 「方式 1」の伝達関数の構成例

「方式 1」の伝達関数 $g(t)$ をパラメタの四つ組 μ , g_p , g_s , n を与えて決定した例を, 以下に六通り示す.

例 1 の 1

四つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 10^{-2}$, $g_s = 10^{-9}$, $n = 25$ と指定して得られた規格化座標 t による $x(t)$ の (符号が逆の) 極とその係数は $\sigma_1 = 4.0906841137858743$, $\sigma_2 = 2.0252807667675265$, $\alpha_1 = 9.6814736896338652$, $\alpha_2 = 2.3731219592319164$ である. 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図 3 に示す.

例 1 の 2

四つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 10^{-2}$, $g_s = 10^{-10}$, $n = 35$ と指定して得られた結果は $\sigma_1 = 5.1965507817658801$, $\sigma_2 = 3.2157696254849468$, $\alpha_1 = 15.259180301853442$, $\alpha_2 = 5.8434685487055111$ である. 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図 4 に示す.

例 1 の 3

四つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 10^{-3}$, $g_s = 10^{-12}$, $n = 25$ と指定して得られた結果は $\sigma_1 = 2.2275526153982921$, $\sigma_2 = 1.5985075775765669$, $\alpha_1 = 10.702086703509278$, $\alpha_2 = 5.5111460688822494$ である. 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図 5 に示す.

例 1 の 4

四つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 10^{-3}$, $g_s = 10^{-13}$, $n = 35$ と指定して得られた結果は $\sigma_1 = 5.0410227290719045$,

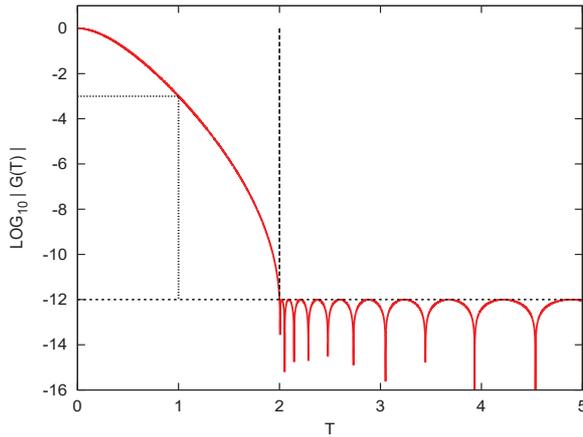


図 5 例 1 の 3 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=10^{-3}$, $g_s=10^{-12}$, $n=25$)

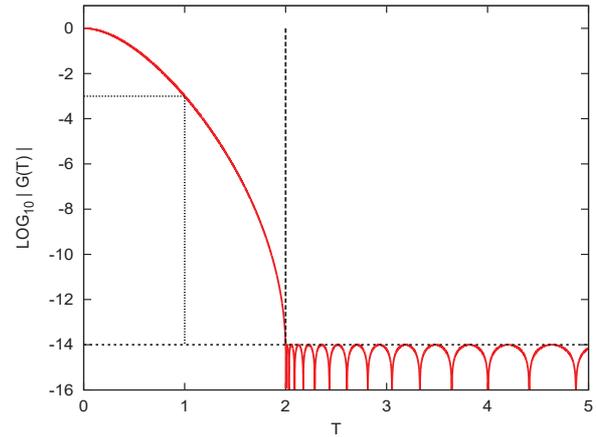


図 7 例 1 の 5 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=10^{-3}$, $g_s=10^{-14}$, $n=40$)

$\sigma_2 = 1.3534574409761458$, $\alpha_1 = 8.2967756289082449$, $\alpha_2 = 0.59808270304200913$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図 6 に示す。

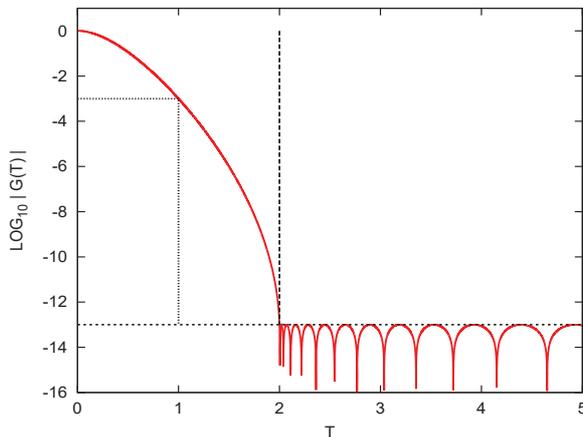


図 6 例 1 の 4 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=10^{-3}$, $g_s=10^{-13}$, $n=35$)

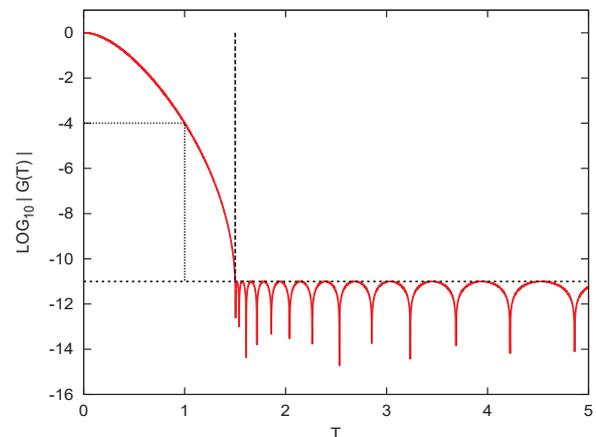


図 8 例 1 の 6 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=1.5$, $g_p=10^{-4}$, $g_s=10^{-11}$, $n=30$)

例 1 の 5

四つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 10^{-3}$, $g_s = 10^{-14}$, $n = 40$ と指定して得られた結果は $\sigma_1 = 3.9913737417644574$, $\sigma_2 = 2.3928928457858401$, $\alpha_1 = 11.752509871904793$, $\alpha_2 = 4.2240819519028347$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図 7 に示す。

例 1 の 6

四つ組を $\mu = 1.5$, $g_p = 10^{-4}$, $g_s = 10^{-11}$, $n = 30$ と指定して得られた結果は $\sigma_1 = 2.6911750089595285$, $\sigma_2 = 1.7186135211281575$, $\alpha_1 = 8.9374560356071617$, $\alpha_2 = 3.6449072765478546$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図 8 に示す。

2.2 方式 2 : 通過域の両端で値の等しい伝達関数

「方式 2」では通過域に於ける伝達関数の最大最小比の低下を容易にする手段として、通過域の両端で伝達関数の値が等しいという条件 $g(0) = g(1) = g_p$ を課すことにする。そうして伝達関数は通過域内の点 $t = T$ ($0 < T < 1$) で最大値 1 をとるものとする。

簡易設計により制限された伝達関数の関数形は「方式 1」の場合と同一の以下のものとする (ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ で

ある)。

$$g(t) \equiv g_s T_n(y), \quad y \equiv 2x(t) - 1, \quad x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t + \sigma_2}. \quad (12)$$

そうして次数 n と形状パラメタ g_s , g_p , μ の全部で四つの値を指定して、(実現が可能ならば) 伝達関数を求める。

まず前と同様に、通過域に於ける $x(t)$ の最小値 x_L と最大値 x_H の値はそれぞれ、三つのパラメタ n , g_s , g_p から式 (5) を計算して求める。

すると $x(t)$ の満たすべき条件は $x(0) = x_L$ と $x(1) = x_L$ と $x(\mu) = 1$, それと最大点での条件 $x(T) = x_H$ と $(d/dt)x(t)|_{t=T} = 0$ であり、それらを表す以下の五つの等式をすべて満たす必要がある

$$\begin{cases} x_L = \frac{\alpha_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma_1}, \\ x_L = \frac{\alpha_1}{1 + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{1 + \sigma_2}, \\ 1 = \frac{\alpha_1}{\mu + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\mu + \sigma_2}, \\ x_H = \frac{\alpha_1}{T + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{T + \sigma_2}, \\ 0 = -\frac{\alpha_1}{(T + \sigma_1)^2} + \frac{\alpha_2}{(T + \sigma_2)^2}. \end{cases} \quad (13)$$

ここからは μ , x_L , x_H を既知の値として、上記の五つの条件式 (13) を連立して解いて五つの未知数 σ_1 , σ_2 , α_1 ,

α_2 , T を求める (多少複雑な) 作業になる.

上記の (13) の第一番目と第二番目の式からは,

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1(1+\sigma_1)} = \frac{\alpha_2}{\sigma_2(1+\sigma_2)} \quad (14)$$

であり, この等式の値を C とおくと極の係数は

$$\begin{cases} \alpha_1 = C\sigma_1(1+\sigma_1), \\ \alpha_2 = C\sigma_2(1+\sigma_2) \end{cases} \quad (15)$$

と表される. それを用いて上記の (13) の第三番目の式から α_1 と α_2 を消去すれば

$$1 = \frac{\alpha_1}{\mu + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\mu + \sigma_2} = C \left\{ \frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{\mu + \sigma_1} - \frac{\sigma_2(1+\sigma_2)}{\mu + \sigma_2} \right\} \quad (16)$$

となるので, C の逆数の値は

$$\frac{1}{C} = \frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{\mu + \sigma_1} - \frac{\sigma_2(1+\sigma_2)}{\mu + \sigma_2} = (\sigma_1 - \sigma_2) \times \frac{\mu(1+\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} \quad (17)$$

と表される. すると x_L の値は

$$x_L = \frac{\alpha_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2} = C(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(1 + \sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \quad (18)$$

と表される (これから $C > 0$ であり, また $\alpha_1 > \alpha_2$ であることもわかる). つぎに極大点の位置 T についての条件は (13) の第五番目の式から

$$0 = \frac{\alpha_1}{(T + \sigma_1)^2} - \frac{\alpha_2}{(T + \sigma_2)^2} = C \left\{ \frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{(T + \sigma_1)^2} - \frac{\sigma_2(1+\sigma_2)}{(T + \sigma_2)^2} \right\} \quad (19)$$

であるが, $T > 0$, $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ を用いて平方根を開くと,

$$\frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{T + \sigma_1} = \frac{\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}{T + \sigma_2} \quad (20)$$

が得られる. この等式の値を Γ とおく. すると $\sigma_1 \neq \sigma_2$ であるから,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} - \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ &= \frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}} \end{aligned} \quad (21)$$

である. そうして,

$$\begin{cases} T + \sigma_1 = \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}/\Gamma, \\ T + \sigma_2 = \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}/\Gamma \end{cases} \quad (22)$$

だから

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\Gamma} \times \frac{\sigma_1\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} - \sigma_2\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ &= \frac{1}{\Gamma} \times \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} + \sigma_2\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}} \end{aligned} \quad (23)$$

となる. よって x_H の値は

$$\begin{aligned} x_H &= \frac{\alpha_1}{T + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{T + \sigma_2} \\ &= \Gamma \left\{ \frac{\alpha_1}{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}} \right\} \\ &= C\Gamma \left\{ \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} - \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} \right\} \\ &= C\Gamma^2(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \Gamma^2 x_L \end{aligned} \quad (24)$$

と表される. すると,

$$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma} = \sqrt{\frac{x_L}{x_H}} = \frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{1 + \sigma_1 + \sigma_2}, \\ \frac{1}{x_L} = \frac{\mu(1 + \sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} = 1 - \frac{\mu(\mu - 1)}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} \end{cases} \quad (25)$$

となるので, これらの式から以下の σ_1 と σ_2 についての連立方程式を得る.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{1 + \sigma_1 + \sigma_2} = \sqrt{\frac{x_L}{x_H}}, \\ (\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2) = \mu(\mu - 1)\left(1 - \frac{1}{x_L}\right)^{-1}. \end{cases} \quad (26)$$

この連立方程式を解いて σ_1 と σ_2 (ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) を求めれば良い. そこで (26) の上側の式に含まれる平方根を外すための変数の置換 $\sigma_1 \equiv z_1^2/(1 - z_1^2)$, $\sigma_2 \equiv z_2^2/(1 - z_2^2)$ (ただし $0 < z_1 < 1$, $0 < z_2 < 1$ とする) を行なうと,

$$\frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{1 + \sigma_1 + \sigma_2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \quad (27)$$

となるから, 関係式 $z_1 + z_2 = \sqrt{x_L/x_H}(1 + z_1 z_2)$ が得られる. (さらに関係式 $T = z_1 z_2 / (1 + z_1 z_2)$ もわかる.) いま z_1 と z_2 の基本対称式を $S_1 \equiv z_1 + z_2$, $S_2 \equiv z_1 z_2$ とおくと, この関係式は $S_1 = \sqrt{x_L/x_H}(1 + S_2)$ と書ける.

さらに (26) の下側の式についても同様に, σ_1 と σ_2 を z_1 と z_2 を用いて置換して, さらに $\kappa \equiv \mu/(\mu - 1)$, $\nu \equiv (1 - 1/x_L)^{-1}$ とおくと, $(z_1^2 - \kappa)(z_2^2 - \kappa) = \nu\kappa(z_1^2 - 1)(z_2^2 - 1)$ となり, これを整理すると $\eta_0(z_1 z_2)^2 + \eta_1(z_1^2 + z_2^2) + \eta_2 = 0$ が得られ, これを z_1 と z_2 の基本対称式で表わすと

$$\eta_0 S_2^2 + \eta_1(S_1^2 - 2S_2) + \eta_2 = 0 \quad (28)$$

となる. ただし各係数は

$$\eta_0 \equiv 1 - \nu\kappa, \quad \eta_1 \equiv (\nu - 1)\kappa, \quad \eta_2 \equiv (\kappa - \nu)\kappa \quad (29)$$

となる. 既に得ている関係式 $S_1 = \sqrt{x_L/x_H}(1 + S_2)$ を用いて式 (28) から S_1 を消去すれば, 以下の S_2 についての二次方程式が得られる.

$$\zeta_0 S_2^2 + \zeta_1 S_2 + \zeta_2 = 0 \quad (30)$$

ただしこの方程式の各係数は

$$\begin{cases} \zeta_0 \equiv \eta_0 + (x_L/x_H)\eta_1, \\ \zeta_1 \equiv 2\{(x_L/x_H) - 1\}\eta_1, \\ \zeta_2 \equiv \eta_2 + (x_L/x_H)\eta_1 \end{cases} \quad (31)$$

である. 簡単な考察から ζ_0 と ζ_1 は共に負であることが判るので, ζ_2 が正であることが S_2 についての二次方程式が正根を持つために必要である. そうして ζ_2 が正であれば, 二次方程式が実根を持つ場合であれば正根は一つである.

いま二次方程式 $\zeta_0 S_2^2 + \zeta_1 S_2 + \zeta_2 = 0$ が区間 $(0, 1)$ に入る実根 S_2 を持つとする (そうでなければ σ_1 と σ_2 には適切な解は無い). そのような S_2 が存在するとき, $S_1 \leftarrow \sqrt{x_L/x_H}(S_2 + 1)$ を作る.

いま二次方程式 $w^2 - S_1 w + S_2 = 0$ の相異なる実根が共に区間 $(0, 1)$ にあるとき, それらを z_1 と z_2 ($1 > z_1 > z_2 > 0$) とする (もしもそのような二根が無ければ, σ_1 と σ_2 には適切な解は無い). そのとき σ_1 と σ_2 の値は z_1 と z_2 の値から $\sigma_1 \leftarrow z_1^2/(1 - z_1^2)$, $\sigma_2 \leftarrow z_2^2/(1 - z_2^2)$ と計算して決まり, 各極の係数も $C \leftarrow x_L/(\sigma_1 - \sigma_2)$ として $\alpha_1 \leftarrow C\sigma_1(1 + \sigma_1)$, $\alpha_2 \leftarrow C\sigma_2(1 + \sigma_2)$ と計算して決まる.

2.2.1 「方式2」の伝達関数の構成例

「方式2」の伝達関数をパラメタの四つ組 μ, g_p, g_s, n を指定して構成した例を、以下に五通り示す。

例2の1

四つ組を $\mu = 2.0, g_p = 10^{-3}, g_s = 10^{-11}, n = 15$ と指定して得られた(符号が逆の)極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 0.72263677001010600, \sigma_2 = 0.31800920611881721, \alpha_1 = 4.5037612744194728, \alpha_2 = 1.5164207888257540$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図9に示す。

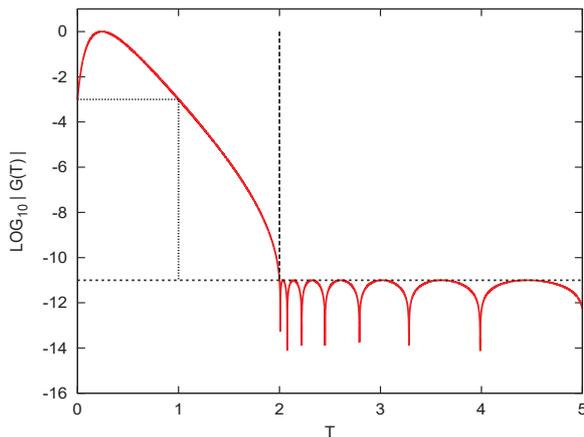


図9 例2の1：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0, g_p=10^{-3}, g_s=10^{-11}, n=15$)

例2の2

四つ組を $\mu = 2.0, g_p = 10^{-2}, g_s = 10^{-13}, n = 30$ と指定したとき、得られた結果は $\sigma_1 = 1.6793335315466211, \sigma_2 = 1.2589893885437431, \alpha_1 = 12.847121836324397, \alpha_2 = 8.1204176097422172$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図10に示す。

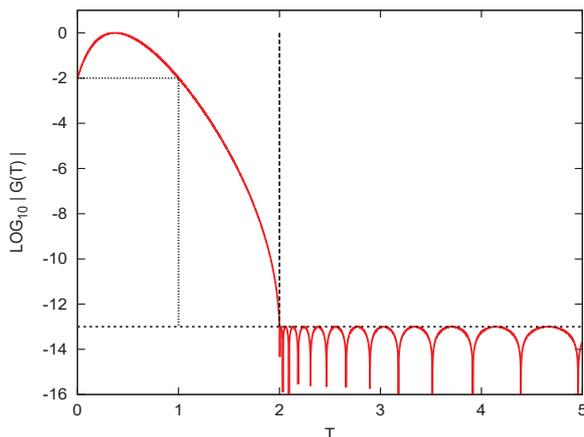


図10 例2の2：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0, g_p=10^{-2}, g_s=10^{-13}, n=30$)

例2の3

四つ組を $\mu = 2.0, g_p = 10^{-2}, g_s = 10^{-14}, n = 40$ と指定したとき、得られた結果は $\sigma_1 = 4.0569980265412148, \sigma_2 = 0.85697256798883792, \alpha_1 = 7.2490897288624033, \alpha_2 = 0.56228733724775249$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図11に示す。

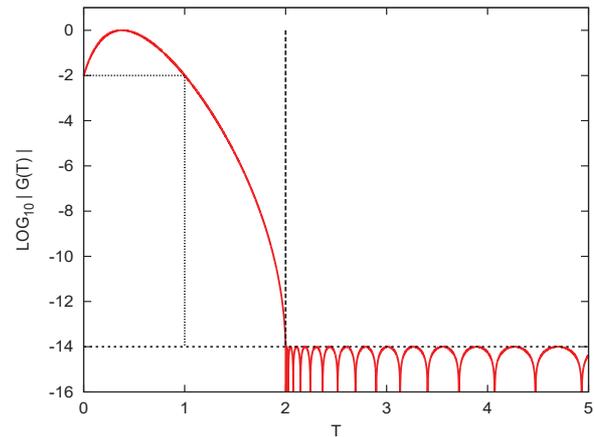


図11 例2の3：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0, g_p=10^{-2}, g_s=10^{-14}, n=40$)

例2の4

四つ組を $\mu = 1.5, g_p = 10^{-4}, g_s = 10^{-12}, n = 24$ と指定したとき、得られた結果は $\sigma_1 = 1.2335616207650996, \sigma_2 = 0.41603301668318244, \alpha_1 = 3.9334542009894634, \alpha_2 = 0.84103968343672315$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図12に示す。

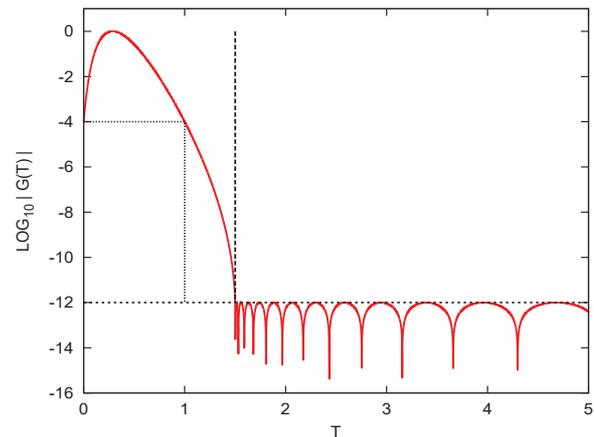


図12 例2の4：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=1.5, g_p=10^{-4}, g_s=10^{-12}, n=24$)

例2の5

四つ組を $\mu = 1.5, g_p = 10^{-4}, g_s = 10^{-13}, n = 30$ と指定したとき、得られた結果は $\sigma_1 = 1.7429433413747974, \sigma_2 = 0.47133322858421765, \alpha_1 = 4.2593319890912780, \alpha_2 = 0.61784635236638549$ である。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を図13に示す。

2.2.2 「方式2」で実現できた設計の範囲

表1は $\mu=2.0$ の場合について、表2は $\mu=1.5$ の場合について、表3は $\mu=1.25$ の場合について、それぞれ通過域での最低伝達率 g_p の値を $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ とした各場合について、フィルタの Chebyshev 多項式の次数 n を15から50まで5刻みで変えたときに、伝達関数を実現可能にする g_s の値であって10の負幂に限定した場合の最小値を示す。

- $\mu=2.0$ の場合(表1)は、(たとえば倍精度程度の計算用に)阻止域での伝達率 g_s が 10^{-14} 以下となることを要求すると、フィルタの構成は、
 - g_p が 10^{-1} の場合は次数 n が表の範囲では不可能

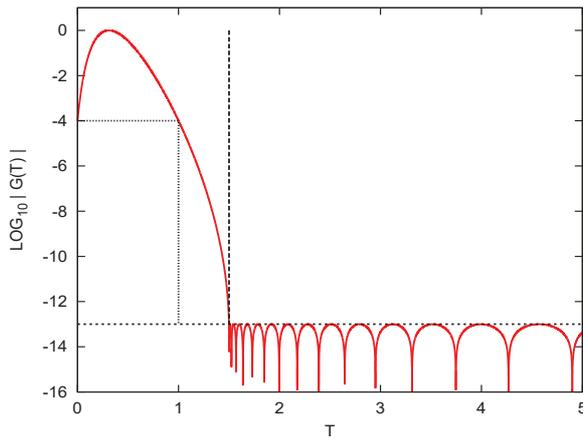


図 13 例 2 の 5 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=1.5, g_p=10^{-4}, g_s=10^{-13}, n=30$)

- g_p が 10^{-2} の場合は $n \geq 35$ で可能
- g_p が 10^{-3} の場合は $n \geq 25$ で可能
- g_p が 10^{-4} の場合は $n \geq 20$ で可能であることがわかる。
- $\mu=1.5$ の場合 (表 2) に g_s が 10^{-14} 以下を要求すると、
 - g_p が $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ の場合はどれも表の範囲では不可能
 - g_p が 10^{-4} の場合は $n \geq 35$ で可能であることがわかる。
- もしも g_s が 10^{-12} 以下で良ければ、
 - g_p が $10^{-1}, 10^{-2}$ の場合はいずれも表の範囲では不可能
 - g_p が 10^{-3} の場合は $n \geq 40$ で可能
 - g_p が 10^{-4} の場合は $n \geq 25$ で可能であることがわかる。
- $\mu=1.25$ の場合 (表 3) には、 g_s を 10^{-12} 以下にすることは表中のどの場合にも不可能であることがわかる。

表 1 「方式 2」により実現できた伝達関数の例 ($\mu=2.0$ の場合)

	$g_p=10^{-1}$	$g_p=10^{-2}$	$g_p=10^{-3}$	$g_p=10^{-4}$
n	g_s	g_s	g_s	g_s
15	10^{-6}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-12}
20	10^{-7}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-14}
25	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-16}
30	10^{-8}	10^{-13}	10^{-16}	-
35	10^{-9}	10^{-14}	10^{-17}	-
40	10^{-9}	10^{-14}	-	-
45	10^{-10}	10^{-15}	-	-
50	10^{-10}	-	-	-

表 2 「方式 2」により実現できた伝達関数の例 ($\mu=1.5$ の場合)

	$g_p=10^{-1}$	$g_p=10^{-2}$	$g_p=10^{-3}$	$g_p=10^{-4}$
n	g_s	g_s	g_s	g_s
15	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
20	10^{-4}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}
25	10^{-4}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-12}
30	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-13}
35	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}
40	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-14}
45	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
50	10^{-5}	10^{-9}	10^{-13}	10^{-16}

表 3 「方式 2」により実現できた伝達関数の例 ($\mu=1.25$ の場合)

	$g_p=10^{-1}$	$g_p=10^{-2}$	$g_p=10^{-3}$	$g_p=10^{-4}$
n	g_s	g_s	g_s	g_s
15	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}
20	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-8}
25	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}
30	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}
35	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
40	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
45	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
50	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-11}

2.3 伝達関数からのフィルタの構成

極が実数二つの伝達関数の式に対応するフィルタは、シフトが実数のレゾルベント二つで構成できる。(実対称定値一般固有値問題 $Av = \lambda Bx$ に対するシフト ρ のレゾルベント $\mathcal{R}(\rho)$ は $\mathcal{R}(\rho) \equiv (A - \rho B)^{-1} B$ である.)

いま採用している簡易設計では、伝達関数 $g(t)$ は以下の式で与えられている。

$$g(t) \equiv g_s T_n(y), \quad y \equiv 2x(t) - 1, \quad x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t + \sigma_2}. \quad (32)$$

いま下端付近の固有値を扱うとして、 $\lambda \in [a, b]$ と $t \in [0, 1]$ の線形対応関係 $t = (\lambda - a)/(b - a)$ を用いて y を λ の関数として表すと、以下ようになる。

$$y = \frac{2\ell_1}{\lambda - \rho_1} - \frac{2\ell_2}{\lambda - \rho_2} - 1. \quad (33)$$

ここで係数 ℓ_k とシフト ρ_k ($k = 1, 2$) は

$$\ell_k \equiv (b - a) \alpha_k, \quad \rho_k \equiv a - (b - a) \sigma_k \quad (34)$$

となる ($\rho_1 < \rho_2 < a$, $\ell_1 > \ell_2$ である)。

すると y に対応する線形作用素 \mathcal{Y} は、 $1/(\lambda - \rho_k)$ にレゾルベント $\mathcal{R}(\rho_k)$ を対応させ、定数 1 には恒等作用素 I を対応させたもので、 $\mathcal{Y} \equiv 2\ell_1 \mathcal{R}(\rho_1) - 2\ell_2 \mathcal{R}(\rho_2) - I$ となる。そして伝達関数 $f(\lambda)$ に対応する作用素であるフィルタ \mathcal{F} は、作用素 \mathcal{Y} の多項式として $\mathcal{F} = g_s T_n(\mathcal{Y})$ となる。

この式の形のフィルタ \mathcal{F} をベクトルの組 V に作用させる計算には、Chebyshev 多項式のもつ三項漸化式 $T_0(z) = I$, $T_1(z) = z$, $T_m(z) = 2zT_{m-1}(z) - T_{m-2}(z)$ ($m \geq 2$) を利用する。具体的には、 \mathcal{Y} の m 次チェビシェフ多項式 $T_m(\mathcal{Y})$ を V に作用させて得られるベクトルの組 $V^{(m)} \equiv T_m(\mathcal{Y})V$ を以下の漸化式を用いて計算する。

$$\begin{cases} V^{(0)} = V, \\ V^{(1)} = \mathcal{Y}V, \\ V^{(m)} = 2\mathcal{Y}V^{(m-1)} - V^{(m-2)} \quad (m \geq 2). \end{cases} \quad (35)$$

すると V から $V^{(n)}$ をこの漸化式 (35) を用いて計算すると、フィルタ \mathcal{F} を V に作用させた結果のベクトルの組は $\mathcal{F}V = g_s T_n(\mathcal{Y})V = g_s V^{(n)}$ となる。

3. 複素シフトのレゾルベント二つによるフィルタ

これまでの研究では、中間固有対を求めるためのフィルタとして伝達関数 $g(t)$ の極が互いに共役な複素数一対のものを扱ってきた。そのようなフィルタはシフトが互いに共役な複素数であるレゾルベント一対を用いて構成できるが、複素共役対称性を利用すれば、一対のレゾルベントのうちの片方 (たとえばシフトの虚部が正のもの一つ) だけを用いて構成をすることができる。

ここではその拡張として、伝達関数の極が互いに共役

な複素数二対のものを扱うことを試みる。そのようなフィルタはシフトが互いに共役な複素数であるレゾルベントの二対を用いて構成できるが、この場合も複素共役対称性を利用すれば、二対のレゾルベントのうちの各対から片方ずつ（たとえばシフトの虚部が正のもの二個）だけを用いて構成をすることができる。

レゾルベントの線形結合 \mathcal{X} の多項式であるフィルタの式の一般形は $\mathcal{F} = P(\mathcal{X})$ である。以下では Chebyshev 多項式を用いた簡易構成の場合としてフィルタの式が $\mathcal{F} = g_s T_n(2\mathcal{X} - I)$ で表されるとし、それに対応する伝達関数を $g(t) = g_s T_n(2x(t) - 1)$ とする。ここで $x(t)$ は実有理関数で極は互いに共役な複素数二対である。

いま $x(t)$ を偶関数であるとし、しかも三つのパラメータ α, β, C を持つ以下の形の式に限定する。

$$x(t) = C \left\{ \frac{1}{(t-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{(t+\alpha)^2 + \beta^2} \right\}. \quad (36)$$

ここで C, α, β はすべて正の実数として良い。極は互いに共役な複素数の二対 $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ と $-\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ である。

上記の式 (36) の $x(t)$ は偶関数なので原点 $t = 0$ は必ず極値点であるが、極値条件 $(d/dt)x(t) = 0$ を満たす実数 t は $\sqrt{3}\alpha \leq \beta$ の場合には $t = 0$ だけで原点は最大点になる。その逆の $\sqrt{3}\alpha > \beta$ の場合には、

$$t_* \equiv \sqrt{2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - (\alpha^2 + \beta^2)} \quad (37)$$

とおくと原点以外のすべての極値点は $t = \pm t_*$ であり、原点は極小点で、二点 $t = \pm t_*$ はどちらも最大点である。

3.1 $x(t)$ が原点で最大になると仮定する場合

いま $x(t)$ は偶関数であるので原点 $t = 0$ は必ず極値点である。そこでまず原点が最大点であると仮定して議論する。通過域での $x(t)$ の最小値を x_L とし最大値を x_H とする ($1 < x_L < x_H$ である) そうして設定する条件を原点で $x(0) = x_H$ 、通過域の端で $x(1) = x_L$ 、阻止域の端で $x(\mu) = 1$ とする。これらの条件を $x(t)$ が含む三つのパラメータを用いて順に明示的に表すと以下ようになる。

$$\begin{cases} \frac{x_H}{C} = \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \frac{x_L}{C} = \frac{1}{(1-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^2 + \beta^2}, \\ \frac{1}{C} = \frac{1}{(\mu-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{(\mu+\alpha)^2 + \beta^2}. \end{cases} \quad (38)$$

以前と同様に式 (5) を用いて、三つのパラメータ n, g_s, g_p の組から x_L と x_H の値を計算する。そうして μ と x_L と x_H の値を与えて、上記の三つの式 (38) を連立して解き、 α, β, C の値を求めて式 (36) の形の $x(t)$ を決める。

それにはまず (38) の第三番目の式を第一番目の式で割り、および第二番目の式を第一番目の式で割ると、 C が消去された α と β だけの関係式が得られて、

$$\begin{cases} \frac{1}{(\mu-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{(\mu+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{x_H} \times \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \frac{1}{(1-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{x_L}{x_H} \times \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \quad (39)$$

となる。それぞれ分母を払いまとめると以下ようになる。

$$\begin{cases} (\mu^2 + \alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{x_H} \{(\mu^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\mu^2\alpha^2\}, \\ (1 + \alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{x_L}{x_H} \{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\}. \end{cases} \quad (40)$$

これらの式を $\alpha^2 + \beta^2 \equiv R$ とおいて変形すれば、

$$\begin{cases} x_H(\mu^2 + R)R = (\mu^2 + R)^2 - 4\mu^2\alpha^2, \\ \frac{x_H}{x_L}(1 + R)R = (1 + R)^2 - 4\alpha^2 \end{cases} \quad (41)$$

となる。この (41) の第一番目の式から第二番目の式の μ^2 倍を引いて α^2 を消去すれば、 R について以下の二次方程式が得られる。

$$p_2 R^2 + p_1 R + p_0 = 0. \quad (42)$$

ここで係数 p_2, p_1, p_0 はそれぞれ以下の式で与えられる：

$$\begin{cases} p_2 \equiv -(x_H - 1) + \left(\frac{x_H}{x_L} - 1\right)\mu^2, \\ p_1 \equiv -\frac{x_H}{x_L}(x_L - 1)\mu^2, \\ p_0 \equiv \mu^2(\mu^2 - 1). \end{cases} \quad (43)$$

この二次方程式を解いて正の実根 R が得られたら、(41) の第二番目の式から得られる関係 $\alpha^2 = (1 + R)\{1 + R(1 - x_H/x_L)\}/4$ の右辺を計算すると α^2 が求まり、また R の定義から関係 $\beta^2 = R - \alpha^2$ の右辺を計算すると β^2 も求まる。ただし α^2 と β^2 は共に正の数になる必要がある。また C は (38) の第一番目の式から得られる関係 $C = x_H R/2$ の右辺を計算すると求まる。以上の手順により正の実数 α, β, C が求まったら $x(t)$ が定まる。

3.1.1 原点で最大になる仮定が満たされなかった場合

上記では式 (36) の形の $x(t)$ が原点 $t = 0$ で最大になると仮定して最大値 x_H をとるとして、三つの条件 $x(0) = x_H, x(1) = x_L, x(\mu) = 1$ を課して $x(t)$ を決定した。そのようにして得られた $x(t)$ が実際に原点で最大になっていれば矛盾はない。しかしもしも解いて得られた $x(t)$ のパラメータが $\sqrt{3}\alpha > \beta$ ならば、 $x(t)$ は原点で極小であって最大ではない。そのような場合には、 $t = t_*$ での $x(t)$ の最大値は x_H より大きく、 $g(t)$ の最大値も 1 より大きい。そのような場合には「とりあえずの対処法」として、再規格化を用いて $g(t)$ の最大値を 1 に修正することができる。それにはまず、式 (37) により t_* を求めて、 $g(t)$ の最大値 $g_{\max} = g(t_*)$ を求めて、それにより $\tilde{g}(t) \leftarrow (1/g_{\max})g(t)$ と修正し、それに対応して伝達関数の値に関する形状パラメータ (μ の値は変更せずに) $\tilde{g}_s \leftarrow g_s/g_{\max}, \tilde{g}_p \leftarrow g_p/g_{\max}$ と修正する必要がある。そのような修正を行った場合の伝達関数の形状パラメータ \tilde{g}_s と \tilde{g}_p はもはや最初に指定した値ではなくなるので、設計法としては不完全であるが、修正後の形状パラメータがフィルタを適用する上で満足な範囲にあるならば、そのような伝達関数を一応受け入れることができる。

3.2 伝達関数の値が $t = 0$ と $t = 1$ で等しい場合の設計法

もしも「後で再規格化による修正を加える」ことを前提にできるのならば、 $x(t)$ が原点でとる極小値を、最初から通過域での $x(t)$ の最小値 x_L に設定する方が良い。それには $x(t)$ に対する条件として原点で値 x_L をとり、 $t = 1$ でも値 x_L をとり、 $t = \mu$ では値 1 をとることを指定する (このような値の指定の場合、原点は最大点の可能性はない。) ここで課している三つの条件 $x(0) = x_L, x(1) = x_L, x(\mu) = 1$ は、以前に原点が最大点と仮定した場合に課していた三つの条件 $x(0) = x_H, x(1) = x_L, x(\mu) = 1$ と比べるとその違いは x_H を x_L で置き換えただけのものになる。すると $R \equiv \alpha^2 + \beta^2$ を求めるための二次方程式 $p_2 R^2 + p_1 R + p_0 = 0$ の係数は、以前の (43) に於いて値 x_H を値 x_L で置き換えて得られる以下のものになる。

$$\begin{cases} p_2 \equiv -(x_L - 1), \\ p_1 \equiv -(x_L - 1)\mu^2, \\ p_0 \equiv \mu^2(\mu^2 - 1). \end{cases} \quad (44)$$

そうしてこの R の二次方程式を解いて正の実根 R が得られたならば、 $\alpha^2 \leftarrow (R+1)/4$, $\beta^2 \leftarrow R - \alpha^2 = (3R-1)/4$, $C \leftarrow x_L R/2$ と計算をして、 α^2 , β^2 が正であれば $x(t)$ の三つの正実数のパラメタ α , β , C が決まる (この場合 $3\alpha^2 - \beta^2 = 1$ となるから $3\alpha > \beta$ であり、たしかに原点が $x(t)$ の最大点ではなくて極小点であること再確認できる).

さて一般的にはこのようにして得られた $x(t)$ の最大値は x_H とは等しくないの、 $g(t)$ の最大値も 1 ではない。そこで事後に再規格化を行って修正する。まず式 (37) で α と β から最大点 t_* を計算し、 $g(t)$ の最大値 $g_{\max} = g(t_*)$ を式 $g(t) = g_s T_n(2x(t) - 1)$ を用いて計算し、それにより $g(t)$ の最大値を 1 に修正する再規格化 $\tilde{g}(t) \leftarrow (1/g_{\max})g(t)$, およびそれに伴う形状パラメタの修正 $\tilde{g}_s \leftarrow g_s/g_{\max}$, $\tilde{g}_p \leftarrow g_p/g_{\max}$ を行なう。

関数 $x(t)$ が通過域である範囲の値 $[x_L, x_H]$ をとる場合に、原点が最大点である単峰の関数よりも、原点が極小点である双峰の関数の方が、通過域の外部での $x(t)$ の減少が早くできて、実現可能な μ の値を小さくできるであろう。

3.3 伝達関数に対応するフィルタの構成

正規化座標 t で表された伝達関数 $g(t)$ を得たら、それに対応する線形作用素としてフィルタ \mathcal{F} を構成する。

複素数の虚部を与える演算 Im を用いると、式 (36) の $x(t)$ は以下のようにも表せる。

$$\begin{aligned} x(t) &= C \left\{ \frac{1}{(t-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{(t+\alpha)^2 + \beta^2} \right\} \\ &= \frac{C}{\beta} \left(\text{Im} \frac{1}{t - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \text{Im} \frac{1}{t + \alpha - \beta\sqrt{-1}} \right). \end{aligned}$$

まず $x(t)$ の正規化座標 t に対応する固有値の座標 λ を用いて書き直したものを作る。一般の位置にある固有値の区間 $\lambda \in [a, b]$ を標準区間 $t \in [-1, 1]$ に対応させる一次変換は $t = 2(\lambda - a)/(b - a) - 1$ で与えられるから、

$$\frac{C}{\beta} \text{Im} \frac{1}{t - (\pm\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \ell \text{Im} \frac{1}{\lambda - \rho_{\pm}}.$$

である (複号同順)。ただし λ についての極は虚部が正の二つの複素数 $\rho_{\pm} = (a+b)/2 + (\pm\alpha + \beta\sqrt{-1}) \times (b-a)/2$ (複合同順) であり、各極の係数は共通の実数 $\ell = C(b-a)/(2\beta)$ である。すると $y = 2x(t) - 1$ に対応する作用素は I を恒等作用素として

$$\mathcal{Y} = 2\ell \text{Im} \mathcal{R}(\rho_+) + 2\ell \text{Im} \mathcal{R}(\rho_-) - I$$

となる。そうして今の簡易構成の場合のフィルタは、

$$\mathcal{F} = g_s T_n(\mathcal{Y})$$

となる。この形のフィルタをベクトルの組に作用させる計算には、Chebyshev 多項式の三項漸化式 (35) を利用する。

3.4 伝達関数の構成例

以下の四通りの構成例は、 $g(t)$ の値が $t = 0$ と $t = 1$ で等しい条件を課した場合 (第 3.2 節) に対する方法で導いたものである。伝達関数は偶関数であるから、グラフは引数が非負の範囲だけを描いている。

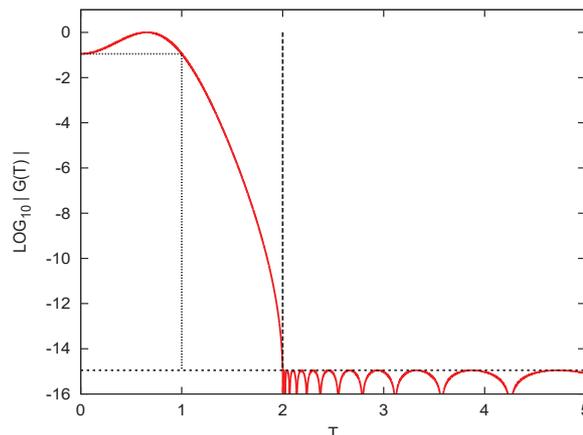


図 14 例 3 の 1 : 規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ ($\mu=2.0$, $\tilde{g}_p=1.12 \times 10^{-1}$, $\tilde{g}_s=1.12 \times 10^{-15}$, $n=15$)

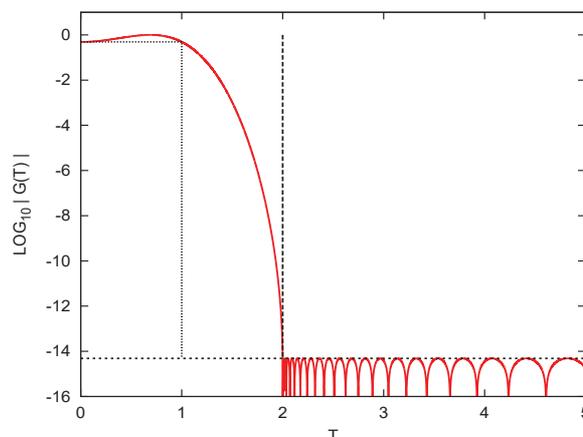


図 15 例 3 の 2 : 規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ ($\mu=2.0$, $\tilde{g}_p=4.88 \times 10^{-1}$, $\tilde{g}_s=4.88 \times 10^{-15}$, $n=30$)

例 3 の 1

伝達関数の三つの形状と Chebyshev 多項式の次数の合計四つの値を $\mu=2.0$, $g_p=10^{-1}$, $g_s=10^{-15}$, $n=15$ と指定したときに得られた $x(t)$ のパラメタは $\alpha = 0.75518409917452513$, $\beta = 0.84315423911530980$, $C = 1.7767088760637071$ である。再規格化前の $g(t)$ の最大値は $g_{\max} = 0.89279979263530846$ である。再規格化後の形状パラメタは $\tilde{g}_p = 1.1200719447394415 \times 10^{-1}$, $\tilde{g}_s = 1.1200719447394415 \times 10^{-15}$ である。再規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ を図 14 に示す。

例 3 の 2

形状と次数の四つ組の値を $\mu = 2.0$, $g_p = 10^{-1}$, $g_s = 10^{-15}$, $n = 30$ と指定して得られた $x(t)$ のパラメタは $\alpha = 1.1543470387882706$, $\beta = 1.7313437722987736$, $C = 2.8853163775788038$ である。再規格化前の最大値は $g_{\max} = 2.0494836211459149 \times 10^{-1}$ である。再規格化後の形状パラメタは $\tilde{g}_p = 4.8792778321442563 \times 10^{-1}$ で、 $\tilde{g}_s = 4.8792778321442563 \times 10^{-15}$ である。再規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ を図 15 に示す。

例 3 の 3

形状と次数の四つ組の値を $\mu = 1.5$, $g_p = 10^{-2}$, $g_s = 10^{-15}$, $n = 20$ と指定して得られた $x(t)$ のパラメタは $\alpha = 0.73502642695984047$, $\beta = 0.78790325864794411$, $C = 0.99279013096421829$ である。再規格化前の最大値は $g_{\max} = 6.8406763363163630 \times 10^{-1}$ である。再規格化後の形状パラメタは $\tilde{g}_p = 1.4618437575991063 \times 10^{-2}$,

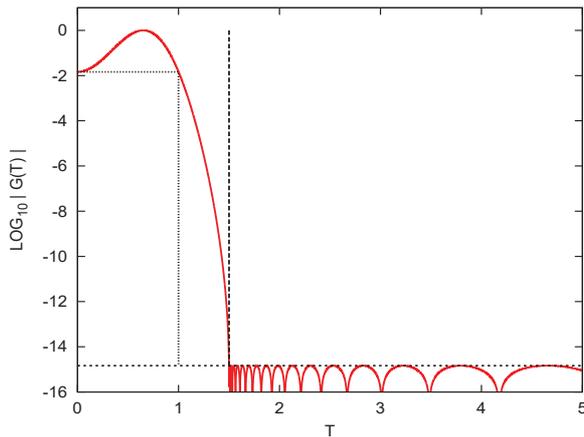


図 16 例 3 の 3 : 規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ ($\mu=1.5$, $\tilde{g}_p=1.46 \times 10^{-2}$, $\tilde{g}_s=1.46 \times 10^{-15}$, $n=20$)

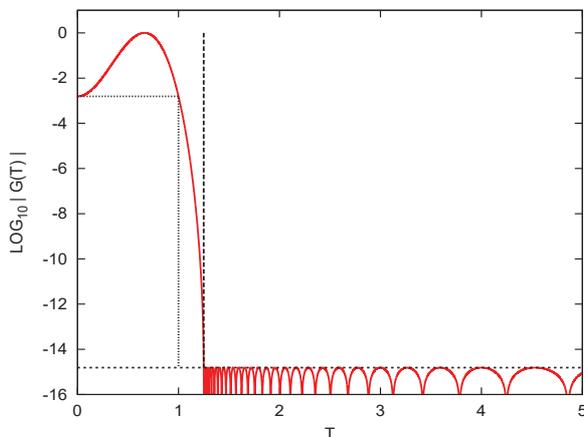


図 17 例 3 の 4 : 規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ ($\mu=1.25$, $\tilde{g}_p=1.55 \times 10^{-3}$, $\tilde{g}_s=1.55 \times 10^{-15}$, $n=35$)

$\tilde{g}_s = 1.4618437575991063 \times 10^{-15}$ である。再規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ を図 16 に示す。

例 3 の 4

形状と次数の四つ組の値を $\mu = 1.25$, $g_p = 10^{-3}$, $g_s = 10^{-15}$, $n=35$ と指定して得られた $x(t)$ のパラメータは $\alpha = 0.80702298489686350$, $\beta = 0.97665669221867799$, $C = 0.94130403313031775$ である。再規格化前の最大値は $g_{\max} = 6.4310664427547048 \times 10^{-1}$ である。再規格化後の形状パラメータは $\tilde{g}_p = 1.5549520579539474 \times 10^{-3}$, $\tilde{g}_s = 1.5549520579539474 \times 10^{-15}$ である。再規格化後の伝達関数の大きさ $|\tilde{g}(t)|$ を図 17 に示す。

3.5 伝達関数の値が $t = 0$ と $t = 1$ で等しい場合の完全な設計法

以下のように伝達関数を設計すれば、阻止域では伝達関数の大きさが g_s 以下で、通過域では伝達関数の値が中央 $t = 0$ と端 $t = 1$ で g_p に等しくて最大値が 1 となるようにできる。そうして伝達関数を求めた後の再規格化や形状パラメータの修正が不要になる。

いま有理関数 $x(t)$ は偶関数で、無限遠で値が零であり、互いに共役な複素数二対を極として持つとする。その一般的な式はパラメータを四つ含む以下のものになる。

$$x(t) = \frac{C - C't}{(t - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{C + C't}{(t + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (45)$$

まず以前と同様に、式 (5) を計算して通過域での $x(t)$ の最小

値 x_L と最大値 x_H の値 ($1 < x_L < x_H$) を三つのパラメータの値 n , g_s , g_p から求める。そうして μ , x_L , x_H の三つの値を指定して、式 (45) の形で与えられる $x(t)$ が、原点で値 x_L をとり、通過域内の正側のある点 $t = T$ ($0 < T < 1$) で最大値 x_H をとり、通過域の端 $t = 1$ で値 x_L をとり、阻止域の端 $t = \mu$ で値 1 をとるようにする。これらの $x(t)$ の振る舞いに関する条件 $x(0) = x_L$, $x(T) = x_H$, $(d/dt)x(t)|_{t=T} = 0$, $x(1) = x_L$, $x(\mu) = 1$ を $x(t)$ に含まれる α , β , C , C' で表わした五つの等式を連立して解いて、五つの実数値 α , β , C , C' , T を求めれば $x(t)$ が決まる。この (より複雑な) 方程式系の解法や、それを解いて構成される伝達関数 $g(t)$ の例については今後の課題とする。

参考文献

- [1] 村上弘: 固有値が指定された区間内にある固有対を解くための対称固有値問題用のフィルタの設計, 情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS31), Vol.3, No.3 (2010), pp.1-21.
- [2] Id.: 対称一般固有値問題のフィルタ作用素を用いた不変部分空間の近似構成, 情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS35), Vol.4, No.4 (2011), pp.1-14.
- [3] Id.: レゾルベントを用いたフィルタによる固有値問題の解法について, 情報処理学会研究報告, Vol.2012-HPC-133, No.22 (2012), pp.1-8.
- [4] Id.: 実対称定値一般固有値問題の最小側固有値を持つ固有対に対する実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる解法, 先進的計算基盤システムシンポジウム論文集 2012 (2012), pp.81-82.
- [5] Id.: レゾルベントの線形結合をフィルタに用いたエルミート定値一般固有値問題のフィルタ対角化法, 情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS45), Vol.7, No.1 (2014), pp.57-72.
- [6] Id.: レゾルベントの多項式をフィルタとして用いる対角化法について, 情報処理学会研究報告, Vol.2014-HPC-146, No.13 (2014), pp.1-4.
- [7] Id.: 実対称定値一般固有値問題に対するレゾルベントの多項式によるフィルタの構成法の検討, 情報処理学会研究報告, Vol.2014-HPC-147, No.2 (2014), pp.1-10.
- [8] Id.: 実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法, HPCS2015 シンポジウム論文集, Vol.2015 (2015), pp.38-51.
- [9] Id.: 一つのレゾルベントから構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題に対するフィルタ対角化法の実験, 情報処理学会研究報告, Vol.2015-HPC-149, No.7 (2015), pp.1-16.
- [10] Id.: 実数シフトのレゾルベントの多項式をフィルタに用いた実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法, 日本応用数理学会 2015 年度年会予稿集 (統合版) (2015), pp.442-443.
- [11] Id.: レゾルベントの多項式によるフィルタの伝達特性の調整, RIMS 共同研究「数式処理とその周辺分野の研究」, 於京都大学益川ホール (2015 年 12 月) に対する RIMS 講記録原稿, 14 頁分, (発行予定).
- [12] Id.: 実対称定値一般固有値問題の最小側固有対を解くための実数シフトのレゾルベントの多項式によるフィルタの簡易な設計法, 情報処理学会研究報告集, Vol.2016-HPC-155, No.44 (2016), pp.1-27.
- [13] Id.: レゾルベントの多項式によるフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法, 情報処理学会研究報告集, Vol.2016-HPC-157, No.4 (2016), pp.1-15.