

三次元空間中における キラリティのないロボット群による平面形成問題

富田 祐作^{1,a)} 山内 由紀子^{2,b)} 来嶋 秀治^{2,c)} 山下 雅史^{2,d)}

概要: 本稿では3次元空間中を自律的に移動するロボット群を同一平面上に移動させ停止させる平面形成問題を考える。各ロボットは大域座標系を知らず、各自の持つ右手系もしくは左手系の局所直交座標系を用いて他のロボットの位置を観測しながら自律的に移動する。このようなロボット群が平面形成問題を解くための必要十分条件は、ロボットの記憶(メモリ)の有無に関わらず、**対称性の群**と呼ばれる回転操作、鏡映操作等から成る群を用いて、ロボット群の配置が持つ対称性から記述できる。本稿では必要性の証明とともに、十分性を示すために各ロボットに与える平面形成アルゴリズムを示す。

キーワード: 分散アルゴリズム, 自律分散ロボット群, 平面形成問題, キラリティ, 対称性の群。

1. はじめに

自律分散ロボット群とは、集中的な管理がされておらず、自律的に観測、計算、移動を行う多数のロボットから成る分散システムである。このようなロボット群を用いたアプリケーションとしては、地面を移動するロボット群による被災地等の探索や監視、ドローン群による自動配達や消火剤の散布などが考えられる。空間の探索、監視、被覆、行進などの複雑な協調動作を実現するには、より基礎的な問題であるロボット群の集合、整列といった**形成問題**が不可避である。さらに、状況の把握できない被災地や、人間が進出出来ない火災現場などでは、ロボット群が自律的に協調動作を実現することや、一部のロボットの故障などにも耐えられる頑健性を持つことが期待される。自律適応性、頑健性を保証するロボットの形成問題については、2次元空間中を移動するロボット群に対して、1点集合問題 [4]、円形成問題 [5]、指定された形状を形成するパターン形成問題等が研究されている [7, 8]。

本稿では、3次元空間中を移動する自律分散ロボット群を考える。個々のロボットを匿名(識別不能)な点と見なし、3次元空間中に置かれたロボット群が同一平面上に存在するように移動させる**平面形成問題**を考える。ロボット

群が平面形成問題を解くことが出来れば、3次元空間中でも2次元空間中での既存結果を利用することが可能となるため、平面形成問題は重要な問題の1つと言える。

本稿で想定するロボットの動作単位は、他のロボットの位置を観測し、観測結果をもとに次の移動先を計算し、計算された移動先に移動する、という3つのフェイズから成る**観測-計算-移動サイクル**であり、各ロボットはサイクルを同期的に繰り返し実行する。

各ロボットが移動先を計算する際に用いるアルゴリズムは共通であるとする。各ロボットは大域座標系を知らず、自身が持つ**局所座標系**をもとに観測を行う。全てのロボットの局所座標系が右手系(左手系)に統一されている場合を**キラリティがある**と言い、右手系と左手系が混在している場合を**キラリティがない**と言う。各ロボットのメモリに関しては、現在のサイクルより以前のサイクルについて、観測結果や計算結果などをロボットが記憶できるモデルを**有記憶モデル**といい、サイクルごとにメモリを初期化するモデルを**無記憶モデル**と呼ぶ。

形成問題については、キラリティのあるロボット群において、ロボット群の配置が持つ対称性が形成問題の可解性を決定づけることが示されている [7, 8, 10]。ロボット群の配置の対称性とは、その配置に作用する**回転群**で測ることができる。ここで回転群とは回転操作が成す群である。2次元空間中を例に説明する。キラリティのあるロボット群の初期配置が回転対称性を持つ場合、図1のように各ロボットの局所座標系も回転対称である場合がある。このとき、全ロボットの観測結果は等しくなるため、全ロボット

¹ 九州大学大学院 システム情報科学府

² 九州大学大学院 システム情報科学研究院

a) tomita@tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp

b) yamauchi@inf.kyushu-u.ac.jp

c) kijima@inf.kyushu-u.ac.jp

d) mak@inf.kyushu-u.ac.jp

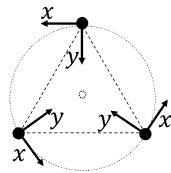


図 1 回転対称な配置と局所座標系の例

の計算結果も等しくなる。よって移動後のロボット群の配置も初期配置の回転対称性を持つ。同様に 3 次元空間中でもロボット群の配置が回転対称性を持つと、その対称性が保たれる場合が存在する。このように、配置の対称性をもとに局所座標系の対称性を考慮するものとして対称度が提案されている [7, 8, 10]。ロボット群の配置の対称度とは、そのロボット群が持ちうる局所座標系に作用する回転群であり、最悪時にロボット群が解消することができない回転群を表す。

キラリティのないロボット群による平面形成問題においても同様に、ロボット群の配置の対称度が重要である。この場合、右手系と左手系の局所座標系が鏡映対称であることを考慮しなければならないため、回転操作から成る回転群だけではなく、回転操作と鏡映操作等から成る群である対称性の群が考えるべき対称性となる。本稿では対称性の群を用いてロボット群の対称度を記述し、キラリティのないロボット群においてもロボットの初期配置の対称性が平面形成問題の可解性を決定づけることを示す。

1.1 既存研究

2 次元空間中の自律分散ロボット群については、集合やパターン形成などの協調動作に関して様々な結果が報告されている。集合問題とは、全ロボットが 1 点に集合する問題であり、パターン形成問題とはロボット群が与えられたパターンを形成する問題である。例えば 2 台のロボットを 1 点に集合させるランデブー問題は、全ロボットが観測-計算-移動サイクルを同期して動作する完全同期モデルでは解くことができるが、一部のロボットのみが同期的にサイクルを実行する準同期モデルでは解けないことが示されている [4]。パターン形成問題については、ロボットの初期配置が持つ対称度が、与えられた目的パターンの形成可能性を決定することが知られている。ここで、点集合 P の対称度 $\rho(P)$ は P を回転して P 自身を得る回転角 θ の個数である。つまり $\rho(P)$ は基本的には P に作用する巡回群の位数である。ただし、 P の最小包含円の中心が P に含まれる場合は $\rho(P) = 1$ とする。ランデブー問題を除けば、 $\rho(P)$ が目的パターン F の対称度 $\rho(F)$ を割り切るとき、かつそのときに限り、ロボット群は動作の同期性、記憶の有無に関わらず初期配置 P から目的パターンを形成可能であることが知られている [7, 8]。

3 次元空間中のロボット群については、パターン形成問

題の 1 つとして、全てのロボットを重複なく同一平面上に並べる平面形成問題が提案され *1、ロボット群の初期配置の対称性が平面形成問題の可解性を決定することが示された [9]。ここで、ロボットの配置の対称性とは、その配置に作用する回転群である。回転群は 3 次元空間中における回転操作が成す群であり、回転軸の種類、本数、配置から、巡回群 C_k 、二面体群 D_ℓ 、正四面体群 T 、正八面体群 O 、正十二面体群 I の 5 種類に分類することができる。点集合 P に作用する回転群を $\gamma(P)$ と表す。この $\gamma(P)$ の群作用による P の分割を $\gamma(P)$ -分割と呼び、 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ と表記する。文献 [9] では、 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ の各要素のサイズが 12, 24, 60 のいずれかであり、かつ $\gamma(P)$ が正四面体群 T を部分群として含むならば、 P は初期配置の対称性を崩すことが出来ず、平面形成不可能であることを示した。さらに、3 次元空間中のパターン形成問題についても、回転群を用いた対称度を定義することで、ロボットの初期配置の対称度が与えられたパターンの形成可能性を決定することが示された [10]。この場合における対称度とは回転群を要素とする集合であり、局所座標系が回転対称となるような回転操作が成す回転群がその要素となる。

以上はキラリティのあるロボット群に対しての結果である。キラリティのないロボット群では、右手系と左手系の局所座標系が鏡映対称であることから、回転対称だけでなく鏡映対称も考慮せねばならず、キラリティがある場合と比べ対称性の種類が増える。2 次元空間中でのキラリティのないロボット群のパターン形成について次のことが示されている。2 次元空間中の $n (> 4)$ 台の無記憶ロボット群が正 n 角形を形成することで同一円周上に存在することを目的とする円形成問題に対して、キラリティの有無と、ロボット群の動作の同期性に関わらず、この問題を解くことができることが示されている [5]。各ロボットに大域座標系での方角と向き、すなわち全ロボットが合意できる方向が与えられる場合に、2 次元空間中の無記憶非同期ロボット群は、各ロボットが北のような一方向を合意し、ロボットの台数が奇数であれば、与えられた任意のパターンを形成可能であることが示されている [6]。

本稿はキラリティのない完全同期ロボット群による平面形成問題を解く必要十分条件を示す。特に、キラリティのあるロボット群が平面形成可能な初期配置であっても、キラリティのないロボット群では多重点を形成してしまい平面形成を行えない配置が存在することを示す。上記の理由から既存の平面形成アルゴリズム [9] をそのまま用いることはできない。本稿では新たに平面形成アルゴリズムを提案する。この結果は、キラリティのあるロボット群とキラリティのないロボット群の能力に差があることを示している。

*1 このため、一点集合問題は平面形成問題の解ではない。

2. 諸定義

2.1 ロボットのモデル

ロボットの集合を $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ ($n \geq 4$) と表記する。各ロボットは匿名な 3 次元空間中の点であり、 r_i は便宜上用いる。各ロボットは、観測フェイズ、計算フェイズ、移動フェイズから成るサイクルを繰り返し実行する。

観測フェイズでは、ロボットは他のロボットの位置を観測する。各ロボットに視界の制限は存在せず、全ての他のロボットの位置を観測可能である。ロボット r_i は大域座標系 Z_0 を知らず、自身の局所座標系 Z_i によって観測を行う*2。 Z_i の原点は r_i 自身の位置であり、 Z_i の軸の向きや、単位距離は任意である。各ロボットの局所座標系が右手系もしくは左手系の直交座標系であるロボット群(キラリティのないロボット群)を考える。

計算フェイズでは、ロボットは観測結果をもとに与えられた共通のアルゴリズム ψ を用いて移動先を計算する。各ロボットが現在のサイクル以前のサイクルでの観測結果や、計算した移動先を記憶することができないモデルを無記憶モデルと呼ぶ。計算フェイズでのアルゴリズムへの入力は現サイクルの観測結果のみである。過去のサイクルの観測結果等を記憶できるモデルを有記憶モデルと呼ぶ。

移動フェイズでは、ロボットは計算した移動先に移動を行う。その際各ロボットは移動途中に停止せず、必ず移動先に到達する。

本稿では離散的な時刻 $0, 1, 2, \dots$ を考え、各時刻で全ロボットが 1 つのサイクルを実行し、かつ全てのロボットが各フェイズも同期して実行する完全同期モデルを想定する。ロボット r_i の時刻 t での大域座標系 Z_0 での位置を $p_i(t)$ と表記する。時刻 t でのロボット群全体の Z_0 での配置を点集合 $P(t) = \{p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)\}$ と表記する。また時刻 t での r_i の局所座標系 Z_i 上での r_j の位置を $Z_i(p_j(t))$ と表記する。 r_j の観測結果を $Z_i(P(t)) = \{Z_i(p_1(t)), Z_i(p_2(t)), \dots, Z_i(p_n(t))\}$ と表記する。各 r_i は時刻 t に実行するサイクルで得る観測結果 $Z_i(P(t))$ をもとに、共通の決定性アルゴリズム ψ を用いて移動先の計算を行う。本稿では、初期配置 $P(0)$ は多重点を持たないものとする。

アルゴリズム ψ によって、ロボット群の配置が $P(0), P(1), P(2), \dots$ と遷移するとき、この配置の列を $P(0)$ から始まるアルゴリズム ψ の実行と呼ぶ。無記憶完全同期モデルでは、アルゴリズム ψ , $P(0)$ と $P(0)$ における局所座標系(さらに、有記憶モデルでは初期配置での各ロボットのメモリの内容)が定まれば実行は一意に決まる。

点集合 P の最小包含球を $B(P)$, $B(P)$ の中心を $b(P)$ と記述する。

*2 Z_i ではなく $Z_i(t)$ と表記するのが正確であるが、簡便さのために本稿では Z_i を用いる。

2.2 平面形成問題

平面形成問題とは 3 次元空間中のロボットを同一平面上に並べる問題である。ロボット群の初期配置 $P(0)$ が与えられたとき、ロボットの局所座標系の種類、軸の方向、単位距離(さらに、有記憶モデルでは初期配置での各ロボットのメモリの内容)に関わらず、 $P(0)$ から始まるアルゴリズム ψ の任意の実行において、時刻 t で $P(t)$ が同一平面上にあり、多重点を含まず、かつ、 t 以降の時刻ではロボット群が停止しているような $t(\geq 0)$ が存在するとき、アルゴリズム ψ は平面形成問題を解くと言う。またそのような ψ が存在するとき、平面形成問題が解けると言う。

2.3 対称性の群

対称性の群とは、与えられた対象に作用させたときに、対象自身を得る回転操作、鏡映操作、回映操作、点対称操作が成す群である。本稿では、点集合や局所座標系の集合に対する操作を考える。回転操作は、ある直線を中心に点集合 P を回転し P 自身を得る操作である。この直線を回転軸と呼ぶ。鏡映操作は、ある平面を基準に P を反転させ P 自身を得る操作である。この平面を鏡面と呼ぶ。回映操作は、回転操作と鏡映操作を同時に P に行う操作である。図 2 は正六角中に回映操作を行った際にある 1 点がどこに移動するのかわを示した図である。このとき回転操作の中心となった軸を回映軸と呼び、鏡映操作の中心となった面を回映面と呼ぶ。点対称操作は、ある点を中心に P を反転させ、 P 自身を得る操作である。

対称性の群は表 1 に示すように 17 種の群から成る [3] [1]。対称性の群は回映操作から成る群である回映群 S_u 、鏡面のみが存在する群 C_s 、原点对称操作が成す群 C_i を除き、回転操作のみが成す群である回転群を表す記号と添え字で表記される。巡回群 C_k ($k = 1, 2, \dots$)、二面体群 D_ℓ ($\ell = 2, 3, \dots$)、正四面体群 T 、正八面体群 O 、正十二面体群 I 、と添え字 $\{v, h\}$ である。添え字 v は回転数が最大である軸(主軸)に対して平行方向に鏡面があることを示し、 h は主軸に直交する鏡面(直交鏡映面)があることを示す。添え字 v, h が無い場合、鏡面は持たない。

対称性の群全ての集合を S^* と表記する。対称性の群のうち、 $C_1, C_i, C_s, C_k, C_{kv}, C_{kh}, D_{\ell v}, D_{\ell h}, S_u$ ($k = 1, 2, \dots, \ell = 2, 3, \dots, u$ は偶数) を 2 次元対称性の群と呼び、 $\{T, T_d, T_h, O, O_h, I, I_h\}$ を 3 次元対称性の群と呼ぶ。2 次元対称性の群は、回転軸を持つならば主軸が一意に決まる。また、2 次元対称性の群のうち $C_{kh}, D_{\ell h}$ ($k = 2, 3, \dots, \ell = 2, 3, \dots$) (図 2 は D_{6h} の例である) を直交鏡映面を持つ対称性の群であると呼ぶ。本稿では群 G の位数を $|G|$ と表記する。

定義 1. 点集合 P の対称性の群 $\gamma(P)$ は、 P に作用する S^* の要素のうち $\gamma(P)$ を真部分群とするものが存在しない要素である。

表 1 対称性の群を持つ回転軸と鏡映面 [3] [1]

S^*	2 回回転軸	3 回回転軸	4 回回転軸	5 回回転軸	主軸	直交鏡映面	位数
C_1	0	0	0	0	×	×	1
C_s	0	0	0	0	×	×	2
C_i	0	0	0	0	×	×	2
C_k	0	0	0	0	k 回回転軸	×	k
C_{kv}	0	0	0	0	k 回回転軸	×	$2k$
C_{kh}	0	0	0	0	k 回回転軸	○	$2k$
D_ℓ	n	0	0	0	ℓ 回回転軸	×	2ℓ
$D_{\ell v}$	n	0	0	0	ℓ 回回転軸	×	4ℓ
$D_{\ell h}$	n	0	0	0	ℓ 回回転軸	○	4ℓ
S_u	0	0	0	0	u 回映軸	×	u
T	3	4	0	0	3 回回転軸	×	12
T_d	3	4	0	0	3 回回転軸	×	24
T_h	3	4	0	0	3 回回転軸	○	24
O	6	4	3	0	4 回回転軸	×	24
O_h	6	4	3	0	4 回回転軸	○	48
I	15	10	0	6	5 回回転軸	×	60
I_h	15	10	0	6	5 回回転軸	○	120

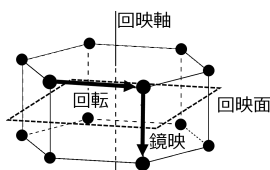


図 2 回映操作による点の移動先

$\gamma(P)$ は一意に決まることは明らかである [3]. $\gamma(P)$ は, P に対して回転軸と鏡面がどこに存在するかを示している.

また, 点集合 P と, 対称性の群 G に関して以下が成り立つとき, P は G について頂点推移性をもつと言う: P の 1 つの要素である s について, $P = Orb(s) = \{g*s \mid g \in G\}$ である. ここで $g*s$ は s に g を作用させることを表す. つまり $Orb(s)$ は G に関する s の軌道である.

2.4 $\gamma(P)$ -分割

補題 2.1. P を任意の点集合とする. このとき P は $\gamma(P)$ に関して頂点推移性を持つ部分集合 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ に分割できる.

証明. 定義から $p \in P$ の $\gamma(P)$ に対する軌道 $Orb(p)$ は $\gamma(P)$ に関して頂点推移性を持つ. $\{Orb(p) : p \in P\} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ を軌道空間とする. このとき明らかに $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ は補題 2.1 を満たしている. また定義から $P_i \cap P_j = \emptyset$ ($i \neq j$) である. もし共通部分があるとすると, その共通部分にある要素に $\gamma(P)$ の要素を作用させた際の軌道空間は $P_i \cup P_j$ となり定義に反する. \square

P に対するこの分割 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ を P の $\gamma(P)$ -分割と呼ぶ. また P に作用する群 G (G は $\gamma(P)$ の部分群) についても $\gamma(P)$ -分割と同様に P に対する分割を定義できる. P に対する G による分割 $\{G_1, G_2, \dots, G_{m'}\}$ を P の G -分割と呼ぶ.

2.5 対称度

点集合 P の対称度 $\rho(P)$ とは対称性の群から成る集合で

あり, ロボット群が解消することができない可能性のある対称性を示す.

定義 2. P を 3 次元空間中の点集合とする. P の対称度 $\rho(P)$ とは P に作用する群 $G \in S^*$ で, G が $\gamma(P)$ の部分群であり, かつ P の G -分割の各要素のサイズが全て $|G|$ であるような G の集合である.

例えば, 正四面体の頂点集合の対称度は $\{D_2, S_4\}$ であり, 立方体の頂点集合の対称度は $\{D_4, D_{2h}, C_{4h}, S_4\}$ である.

2.6 ローカルビュー

ローカルビューとは文献 [9] で提案された各ロボットの観測結果を各ロボットの局所座標系の軸の方向, 単位長に依存しないように読みかえる方法である.

定義 3. まず経度, 緯度, 高度を考える. 点集合 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ の要素 p_i を大域座標系でのロボット r_i の位置とする. P は平面に含まれておらず, 最小包含球の中心 $b(P)$ について $b(P) \notin P$ と仮定する *3. $L(P)$ は中心が $b(P)$ であり, 内側に P の点を含まず, 少なくとも P の 1 つの点を表面に含む球とする. r_i は $L(P)$ を地球として捉え, 直線 $p_i b(P)$ を地軸として捉える. 線分 $\overline{p_i b(P)}$ と $L(P)$ の交点を北極 NP_i とする. このときロボット r_i は地軸上に無いロボットを子午線ロボット r_{m_i} として選ぶ. r_{m_i} の選び方は後述する. 線分 $\overline{p_{m_i} b(P)}$ と $L(P)$ との交点を MP_i とする. $L(P)$ 上の NP_i から始まり, MP_i を含む大きな半円を本初子午線とする. r_i の局所観察をこの地球を中心とした経度, 緯度, 高度を用いて変換する. ロボット $r_j \in P$ の位置を高度 h_j (範囲 $[0, 1]$), 経度 θ_j (範囲 $[0, 2\pi)$), 緯度 ϕ_j (範囲 $[0, \pi]$) で表す. $L(P)$ 上の点を高度 0 , $B(P)$ 上の点を高度 1 とする. MP_i の経度を 0 とする. また, 経度の正の方向を反時計回りとする.

NP_i の緯度を 0 , 赤道を $\pi/2$, 南極を π とする. p_j の位

*3 最小包含球の中心にロボットがいる場合, そのロボットが移動を行うことで $b(P) \notin P$ を満たすことができる.

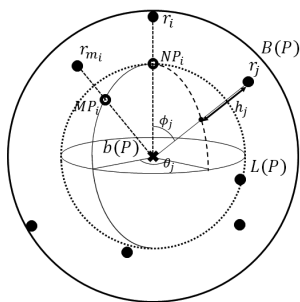


図 3 ローカルビュー [9]

置を $p_j^* = (h_j, \theta_j, \phi_j)$ と表記する. この位置の比較として辞書式順序と同様の方法で, 順序付けを行う. 2つの位置 (h, θ, ϕ) と (h', θ', ϕ') があるとき, 以下の条件の時のみ $(h, \theta, \phi) < (h', \theta', \phi')$ と順序付ける.

$h < h'$, もしくは

$h = h'$ かつ $\theta < \theta'$, もしくは

$h = h', \theta = \theta'$ かつ $\phi < \phi'$.

$V_i^* = \langle p_i^*, p_{m_i}^*, p_{j_1}^*, p_{j_2}^*, \dots, p_{j_{n-2}}^* \rangle$ を p_j^* の位置を並べたリストとする. ($p_{j_k}^* < p_{j_{k+1}}^*$). これを r_i のローカルビューとする. r_{m_i} はローカルビュー V_i^* が最も小さい順序になるように選ばれる.

本稿でもローカルビューを用いるが, 文献 [9] ではキラリティのあるロボット群が仮定されていたため, そのまま用いることができない. これは, ロボットが右手系か左手系かによって経度の正方向が変化するためである. そこで, 上記のローカルビューに以下のような変更を加えたものを, キラリティのないロボット群におけるローカルビューとする.

つまり, 経度の正の方向を反時計回りとするか, 時計回りとするかによってローカルビューが異なる場合は, ローカルビューの順序が小さくなる方をローカルビューとする.

ローカルビューに関して補題 2.2 が成り立つ.

補題 2.2. P を任意の点集合とする. $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ を P の $\gamma(P)$ -分割とする. $\gamma(P)$ -分割の全ての要素 P_i について, 以下の 2つの性質が成り立つ.

- (1) P_i に属する点に存在するロボットは同じローカルビューを持つ.
- (2) 任意の 2 台のロボットにおいて, 1 台は P_i に属する位置に存在し, もう 1 台は P_j ($i \neq j$) に属する位置に存在する場合, それら 2 台のロボットは異なるローカルビューを持つ.

以上のことから, ロボット群は $\gamma(P)$ -分割 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ の順序をローカルビューの小さい順番に合意することができる. 以下, P の $\gamma(P)$ -分割の添え字はこの順序を表すとする.

3. 平面形成問題を解く必要十分条件

キラリティのない完全同期ロボット群による平面形成問題を解くための必要十分条件は以下の通りである.

定理 3.1. $P(0)$ をロボット群の任意の初期配置とする. $\varrho(P(0))$ の各要素が 2 次元的で直交鏡映面を持たないとき, または C_{2h} であるとき, かつそのときに限り, 無記憶性によらず, キラリティのない完全同期ロボット群は平面を形成することができる.

以下では, 定理 3.1 の必要条件に対応する平面形成の不可能性と, 十分条件を示す無記憶モデルに対する平面形成アルゴリズムを示す.

3.1 不可能性

ここでは, 定理 3.1 の条件を初期配置 $P(0)$ が満たさない場合, ロボット群が平面を形成できないことを示す. 例えば, $P(0)$ が正 k 角柱 ($k \geq 3$) である場合, 直交鏡映面を消せないため, 同一平面上に重複なく集まろうとしても衝突が発生し, 平面形成不可能である.

定理 3.2. $P(0)$ をロボット群の任意の初期配置とする. $\varrho(P(0))$ が 3 次元的な対称性の群を要素として含むか, または C_{2h} を除く直交鏡映面を持つ対称性の群を含むとき, 無記憶性によらず, キラリティのない完全同期ロボット群は平面を形成することができない.

この定理を, 対称度に関する以下の定理 3.3 と補題 3.4 から示す.

定理 3.3. $P(0)$ を無記憶ロボット群の任意の初期配置とする. $\varrho(P(0))$ に含まれる任意の要素 G について, G が任意のアルゴリズム ψ の実行 $P(0), P(1), P(2), \dots$ の $\varrho(P(t))$ ($t \geq 0$) に含まれるような, 初期配置での局所座標系が存在する.

証明. $P(0)$ に対し, 定理 3.3 を満たす局所座標系の配置が存在することを示す. 局所座標系の配置とは, 局所座標系の種類, 軸の向き, 単位距離も考慮して配置と呼ぶ. $\varrho(P(0))$ に含まれる任意の要素を G とする. P の G -分割 $\{G_1, G_2, \dots, G_{m'}\}$ の 1 つの要素 G_i に着目する. 大域座標系 Z_0 の原点と座標軸を任意に固定する. G_i の任意の 1 点にいるロボット r_j の局所座標系 Z_j の $(1, 0, 0)$ の Z_0 中で位置を (x_x, x_y, x_z) , $(0, 1, 0)$ を (y_x, y_y, y_z) , $(0, 0, 1)$ を (z_x, z_y, z_z) とする. G_i に含まれる他のロボット r_k の位置 p_k に対して, 定義から $g_k * p_j = p_k$ ($p_j, p_k \in G_i$) となる $g_k \in G$ が存在する. r_k の局所座標系を Z_0 中で $g_k * (x_x, x_y, x_z)$, $g_k * (y_x, y_y, y_z)$, $g_k * (z_x, z_y, z_z)$ とすると, r_k の観測結果 $Z_k(P(0))$ は $Z_j(P(0))$ と等しくなる. よって, G_i に属する全てのロボットの観測結果は等しくなり, 計算する移動先 $\psi(Z_k(P(0))) = d$ の値は等しくなる. このとき, 任意の k について $Z_k(P(0)) = Z_j(P(0))$ であるた

め, r_k の計算した移動先 d を, Z_0 で表記したものを d_k とすると, $d_k = g_k * d_j$ である. これは d_j に対する G の軌道である. これは他の G -分割の要素について言えることであるため, 1 サイクル経過した後の配置 $P(1)$ の対称性の群 $\gamma(P(1))$ は G を部分群として含む. よって, $\varrho(P_1)$ も要素に G を含む. 以上の議論は任意の時刻について成り立つため, $\varrho(P(t))$ は $\varrho(P(0))$ の要素 G を含む. \square

補題 3.4. 点集合 P が平面上に存在しているとする. このとき, $\varrho(P)$ は次の 2 次元的な対称性の群のうちいくつかから成る集合である: $C_1, C_s, C_i, C_k, C_{kv}, C_{2h}, D_\ell, D_{\ell v}, S_u$ ($k = 1, 2, \dots, \ell = 2, 3, \dots, u$ は偶数).

証明は省略するが, 補題 3.4 は 3 次元的な対称性の群 G が成すサイズ $|G|$ の軌道は平面上に存在しないことと, C_{2h} を除く直交鏡映面を持つ 2 次元的な対称性の群 G' が成すサイズ $|G'|$ の軌道もまた平面上に存在しないことを示している. そのため, 点集合 P が平面上に存在しているとき, $\varrho(P)$ は 3 次元的な対称性の群と, C_{2h} を除く直交鏡映面を持つ 2 次元的な対称性の群を要素として含まない.

定理 3.2 の必要性の証明は以下の通りである.

証明. まず, 無記憶ロボット群について考える. 初期配置の対称度 $\varrho(P(0))$ が 3 次元的な対称性の群を含む, または C_{2h} 以外の直交鏡映面を持つ対称性の群を含むとする. そのような $\varrho(P(0))$ の要素を G とし, $P(0)$ において各ロボットの局所座標系が定理 3.3 の状況を満たすとす. ある平面形成アルゴリズム ψ が存在し, $P(0)$ から始まる ψ の実行 $P(0), P(1), \dots$ において時刻 f で $P(f)$ が平面上に存在し以後停止するとす. 補題 3.4 から, G は C_{2h} を除く 2 次元的で直交鏡映面を持たない対称性の群である. しかし, 定理 3.3 より, いかなるアルゴリズムであっても任意の時刻 $t(\geq 0)$ で $\varrho(P(t))$ に G が必ず含まれる場合が存在することが示されているため, これは矛盾である.

以上の議論が有記憶ロボット群についても成立する. つまり, 初期配置での各ロボットのメモリ内容が同一である場合, 対称な局所座標系を持つロボットが獲得する記憶は同一なため, 対称性の解消には利用できない. \square

3.2 平面形成アルゴリズム

ここでは, 初期配置 $P(0)$ が定理 3.1 の条件を満たす場合に平面形成が可能であることを, 平面形成アルゴリズムを与えることにより示す. 提案アルゴリズムは, 大きく 2 段階に分かれている. 1 段階目は $\gamma(P)$ が 3 次元的な対称性の群である場合に, $\gamma(P')$ が 2 次元的な対称性の群であるような別の配置 P' にロボット群を移動させる. $\gamma(P)$ が 2 次元的な対称性の群である場合, 平面を合意可能だからである (アルゴリズム 3.1). 2 段階目は合意した平面への着地を実現する. 基本的にロボット群は, 合意した平面に対し垂直に着地する. その際, 衝突 (着地点が同じになる) が発生しない, もしくは衝突するロボット達のローカル

Algorithm 3.1 r_i の平面決定アルゴリズム

記法:

P : 現時点のロボット群の配置.
 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$: P の $\gamma(P)$ -分割.

アルゴリズム:

```

switch  $\gamma(P)$  do
  case  $\gamma(P) = C_1$ 
    直線  $P_1P_2$  に直交し,  $b(P)$  を通る平面を  $F$  とする.
  case  $\gamma(P) = C_s$ 
     $\gamma(P)$ -分割の要素  $P_1, P_2$  に属する点を通り,
    唯一の鏡面に直交する面を  $F$  とする.
  case  $\gamma(P) = C_i$ 
     $P_1$  に属する 2 台が作る直線に直交し,
     $b(P)$  を通る平面を  $F$  とする.
  case  $\gamma(P) = C_{2h}$ 
    添え字の最も小さい,  $\gamma(P)$ -分割の要素のサイズが 4 である,
    分割の要素  $P_i$  が作る平面を  $F$  とする.
  case  $\gamma(P) \in \{C_n, C_{nv}, D_n, D_{nv}\}$ 
    主軸に直交し,  $b(P)$  を通る平面を  $F$  とする.
  case  $\gamma(P) = S_{2k}$ 
    回映軸に直交し,  $b(P)$  を通る平面を  $F$  とする.
return  $F$ 

```

ビューが全て異なる場合には, ローカルビューの違いを用いて多重点を避けながら合意した平面に着地可能であることを示す. さらに, 垂直に着地しようとした場合に衝突するロボット達のローカルビューが等しい場合にも, 重複なく着地可能な配置にロボット群を一度移動させ, その後平面形成が行えることを示す.

提案アルゴリズムは $\gamma(P)$ により以下のように場合分けを行う. 下記の場合 (1) が上記の 1 段階目に対応し, 場合 (2) が 2 段階目に対応する.

- (1) $\gamma(P)$ が 3 次元的な対称性の群である場合.
- (2) $\gamma(P)$ が 2 次元的な対称性の群である場合.
 - (2-A) $\gamma(P)$ が直交鏡映面を持つ場合.
 - (2-A-i) 回転軸上, もしくは直交鏡映面上にロボットがいる場合.
 - (2-A-ii) $\gamma(P)$ が C_{2h} である場合.
 - (2-B) $\gamma(P)$ が直交鏡映面を持たない場合.
 - (2-B-i) 合意した平面に対し垂直に着地しようとした場合, 衝突が発生し, かつ衝突するロボット達にローカルビューが同じロボットが複数存在する場合.
 - (2-B-i-a) $\gamma(P)$ が C_i である場合.
 - (2-B-i-b) $\gamma(P)$ が D_ℓ , もしくは $D_{\ell v}$ である場合.
 - (2-B-ii) 合意した平面に対し垂直に着地しようとした場合, 衝突が発生しない場合. または, 衝突するロボット達のローカルビューが全て違う場合.
 P が (2-B-ii) を満たす配置である場合, ローカルビューの異なるロボット同士でしか衝突は発生せず, そのような

ロボットは P の $\gamma(P)$ -分割では異なる要素に属するため、ローカルビューの小さい順に優先度を付けることができる。優先度の低いロボットが、高いロボットの着地点を避けるように着地点を計算することで衝突を避けながら合意した平面に着地可能である。よって基本的に提案アルゴリズムは場合 (2-B-ii) を満たす配置を目指す。例外的に $\gamma(P)$ が C_{2h} 、もしくは C_i である場合は、(2-B-ii) を満たす配置にロボット群を移動させることなく、別の方法により平面を形成する。

以下では提案アルゴリズムによるロボットの移動の概要を説明する。いずれの場合にも、各ロボットは自身の移動方法を局所的に計算することが出来る。

3.2.1 (1) の場合

定理 3.1 を満たし、 $\gamma(P)$ が 3 次元対称性の群である場合、 P の $\gamma(P)$ -分割は正四面体、正八面体、正十二面体、二十・十二面体のいずれかを要素として含む。この場合、移動した後の配置 P' に作用する回転群が、2 次元的回転群になるようなアルゴリズム *go-to-center* が存在することが文献 [9] により示されている。*go-to-center* アルゴリズムは上記の多面体を形成する各ロボットが、隣接する側面を 1 つ選びその面の中心に近づくアルゴリズムである。このアルゴリズムは座標系の種類によらないため、実行後の配置 P' の対称性の群 $\gamma(P')$ も 2 次元対称性である。このとき、証明は省略するが、 $\rho(P')$ は定理 3.1 を満たしている。よって、 P' は場合分け (2) のうちのいずれかを満たしている。

3.3 (2) の場合

(2-A-i) の場合

主軸上、もしくは直交鏡映面上のロボットが微小に移動し、主軸や鏡映面を離れることで移動後の配置 P' の $\gamma(P')$ は直交鏡映面を持たなくなる。よって P' は (2-B) のいずれかの場合に当てはまる。

(2-A-ii) の場合

$\gamma(P) = C_{2h}$ のとき、定義から $\gamma(P)$ -分割の任意の要素は、主軸を含む長方形を 4 点が形成しているか、2 点が直交鏡映面上に存在している。そのため P が平面を形成していない場合、 $\gamma(P)$ -分割には 4 点からなる長方形である要素が存在する。そのうち最も添え字の小さいものを P_i とする。このとき、 P_i を含む平面が合意する平面 F である (アルゴリズム 3.1)。 F は鏡面ではないため、 F に垂直に着地しようとしたとき同じ着地点を計算するロボットが複数いたとしても、そのようなロボットは P の $\gamma(P)$ -分割では異なる要素に属し、ローカルビューが異なるため重複を避け着地することができる (図 4)。例外として、ある $\gamma(P)$ -分割の要素 P_j が形成する平面が、 P_i が形成する平面と直交する場合、 P_j 内のロボットで同じ着地点を計算するロボットが現れる。このときは、 P_j に属するロボットが主軸を中心に任意の方向に微小に回転する。こうすることで、

F に対して対称な位置に同じローカルビューを持つロボットが存在することがなくなる。よって移動後の配置 P' は (2-B-ii) を満たす配置である。

(2-B) の場合

(2-B-ii) の場合にはローカルビューの違いを用いて衝突を避けながら合意した平面に着地可能である。しかし、(2-B-i) の場合、ローカルビューの違いを用いて衝突を避けることができない。そこで別の対策をとる必要がある。

(2-B-i-a) の場合

$\gamma(P) = C_i$ であるとき、 $|C_i| = 2$ であることから、 P の $\gamma(P)$ -分割の要素のサイズは全て 2 である。 $\gamma(P) = C_i$ であるときアルゴリズム 3.1 では、合意する平面 F を、 P_1 に属する 2 台が作る直線に直交し、 $b(P)$ を通る平面とする。 P は点対称性のみを持つため、同じ点を着地点として計算する他のロボットが存在するならば、この着地点が点対称の中心でなければならない。点対称の中心は $b(P)$ であるため、 P_1 に属していないロボットは F に対して垂直に着地しようとしたとき、同じ点を着地点として計算する他のロボットが存在したとしても、これらのロボットは必ず $\gamma(P)$ -分割の別の要素に属するため、ローカルビューが異なる。よってロボット群は重複なく着地可能である。しかし、 P_1 に属する 2 台は必ず同じ点を着地点として計算してしまう。そこで以下のように着地を行う。

$\gamma(P) = C_i$ である場合、 F 上に乗っていない、最も添え字の小さい P_j が存在する^{*4}。 P_1 に属するローカルビューの等しい 2 台のロボット r_1, r_2 は P_j に属する 2 点 q_1, q_2 を利用し、重複を避ける。 r_1 は F に垂直に降りた点 d から、 q_1 の計算する着地点に ϵ だけ近い点を着地点 d_1 とする。 r_2 も同様に、 F に垂直に降りた点 d から q_2 の計算する着地点に ϵ だけ近い点を着地点 d_2 とする。 q_1, q_2 は F に対して対称な位置に存在しないため、 d_1, d_2 は共通の点とはならない (図 5)。正確には、他のロボットが計算する着地点と d_1, d_2 が重ならないよう注意する必要があるが、他のロボットの着地位置は計算できるため、各ロボットで重ならないような点を計算することは容易である。

(2-B-i-b) の場合

$\gamma(P)$ が D_ℓ もしくは D_{lv} (図 6) である場合、合意した平面 F に対してロボットが垂直に着地しようするとローカルビューが等しいロボットが同じ場所を着地点としてしまうことがある (図 8)。 F に重複なく着地するために、移動後の配置 P' が (2-B-ii) を満たすようにロボット群が移動を行う。

(2-B-i-b) を満たす P である場合、以下の補題が成り立つ。
補題 3.5. P を任意の点集合とし、 $\gamma(P) \in \{D_\ell, D_{lv}\}$ を満たすとする。 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ を $\gamma(P)$ -分割とする。このと

^{*4} F 上に乗っていない P の $\gamma(P)$ -分割の要素が存在しない場合、 P_1 以外は F 上に乗っているため、 $\gamma(P)$ は C_{2h} となり (2-A) の条件に含まれる。

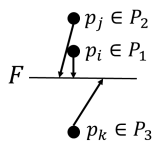


図 4 重複を避ける
着地方法のイメージ

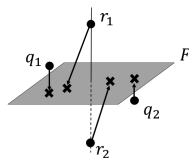


図 5 (2-B-i-a) の場合の
対策方法

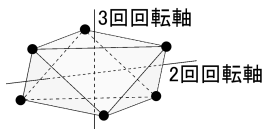


図 6 D_{3v} の例

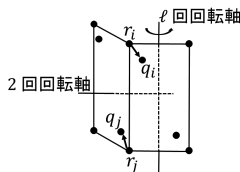


図 7 (2-B-i-b) の場合の
対策方法



図 8 合意した平面 F に対して対称な位置に、ローカルビューが等しいロボットが存在する具体例 (外側の正六角柱の 12 点と内側の正八面体 8 点にロボットがいる)。

き, $\gamma(P_i)$ が直交鏡映面をもたないような P_i が存在する。
証明 . 対偶を考え, $\gamma(P)$ -分割の要素全てについて, $\gamma(P_i)$ が直交鏡映面をもつならば, $\gamma(P) \notin \{D_\ell, D_{\ell v}\}$ であることを証明する. $\gamma(P)$ -分割の要素全てについて, $\gamma(P_i)$ が直交鏡映面をもつとき, 定義から $\gamma(P)$ は直交鏡映面をもつ. $D_\ell, D_{\ell v}$ は直交鏡映面を持たないため, $\gamma(P) \notin \{D_\ell, D_{\ell v}\}$ である. \square

補題 3.5 より P が (2-B-i-b) を満たす場合 P の $\gamma(P)$ -分割の要素 P_j には, $\gamma(P_j)$ が $D_\ell, D_{\ell v}$ のどちらかであるものが存在している. また, $\gamma(P)$ -分割の要素 P_i が, $\gamma(P_i) = D_{\ell h}$ を満たす場合, P_i に属するロボット達が F に着地しようとしたときにローカルビューが同じロボットが衝突する. そこで, このような P_i に属するロボットは鏡映対称でない $\gamma(P)$ -分割の要素 P_j を利用することで, $\gamma(P_i)$ が鏡面を持たないようにロボット群が移動を行う.

$\gamma(P_j)$ が直交鏡映面を持たない, 最も添え字の小さい $\gamma(P)$ -分割の要素を P_j とする. $\gamma(P_i)$ が直交鏡映面を持つような P_i について, F に対して鏡映対称な位置に存在しローカルビューの等しいロボット 2 台を r_i, r_j と表記する. まず r_i, r_j は P_j の中から最も近い点に微小に近づく. (図 7 は, 正 ℓ 角柱 P_i の側面のうち 2 面のみを図示したものである.) r_i の選んだ点を q_i , r_j が選んだ点を q_j とすると, $\gamma(P_j)$ は D_ℓ , もしくは $D_{\ell v}$ であるため, q_i と q_j は F に対して鏡映対称な位置には存在していない. そのため, r_i と r_j も近づいた後, r_i と r_j は F に対して鏡映対称な位置に

は存在していない. 移動後の配置 P' はその移動の方法から主軸を維持しているため, この移動により主軸の位置が変わることはないため, 合意する平面 F は変化せず $\gamma(P')$ は直交鏡映面を持たない. よって, P' は (2-B-ii) を満たす.

4. まとめと今後の課題

本稿では 3 次元空間中のキラリティのないロボット群の対称度を新しく導入し, 完全同期モデルのロボット群が平面形成問題を解くための必要十分条件を示した. 特に, 十分性を証明するため, 新しい平面形成アルゴリズムを与えた.

キラリティのある 3 次元空間中のロボット群については, 回転群のみを用いた対称度によりパターン形成問題を解く必要十分条件が示されている [10]. 今後はキラリティのないロボット群のパターン形成問題について, 本研究で導入した対称度を用いて形成可能なパターンの特徴づけを与えることを目指す.

参考文献

- [1] 今野豊彦, 物質の対称性と群論, 共立出版, 2014.
- [2] M. Cieliebak, P. Flocchini, G. Prencipe, and N. Santoro, Distributed computing by mobile robots: gathering, SIAM Journal on Computing, **41**, 4, pp.829-879, 2012.
- [3] P. R. Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press, 1997. 下川航也, 平澤美可三, 松本三郎, 丸本嘉彦, 村上齐 (訳), 多面体 新装版, 数学書房, 2014.
- [4] P. Flocchini, G. Prencipe, and N. Santoro, Distributed Computing by Oblivious Mobile Robots, Synthesis Lectures on Distributed Computing Theory, Morgan & Claypool Publishers, 2012.
- [5] P. Flocchini, G. Prencipe, N. Santoro, and G. Vigiotta, Distributed computing by mobile robots: Solving the uniform circle formation problem, In Proceeding of the 18th International Conference on Principles of Distributed systems (OPODIS 2014), pp.217-232, 2014.
- [6] P. Flocchini, G. Prencipe, N. Santoro, and P. Widmayer, Arbitrary pattern formation by asynchronous, anonymous, oblivious robots, Theoretical Computer Science, **407**, pp.412-447, 2008.
- [7] N. Fujinaga, Y. Yamauchi, H. Ono, S. Kijima, and M. Yamashita, Pattern formation by oblivious asynchronous mobile robots, SIAM Journal on Computing, **44**, 3, pp.740-785, 2015.
- [8] I. Suzuki, and M. Yamashita, Distributed anonymous mobile robots: formation of geometric patterns, SIAM Journal on Computing, **28**, 4, pp.1347-1363, 1999.
- [9] Y. Yamauchi, T. Uehara, S. Kijima, and M. Yamashita, Plane formation by synchronous mobile robots in the three dimensional euclidean space, In Proceedings of The 29th International Symposium on Distributed Computing (DISC 2015), pp.92-106, 2015.
- [10] Y. Yamauchi, T. Uehara, and M. Yamashita, Brief Announcement: Pattern formation problem for synchronous mobile robots in the three dimensional euclidean space, In Proceedings of the 35th ACM SIGACT-SIGOPS Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC 2016), pp.447-449, 2016.