情報処理学会論文誌　数理モデル化と応用　Vol.9　No.3　8–14 (Dec. 2016)

蟻コロニー最適化と遺伝的アルゴリズムの間

久門 正人[1,a)]　日野 雅文[2]

受付日 2016年2月26日，再受付日 2016年4月28日，
採録日 2016年5月18日

概要：情報カスケードは人々の模倣行為によって，情報が連鎖的に伝達する現象である．バンク・ランをはじめとして，誤った情報が連鎖的に伝わることが，研究対象にされることも多い．その一方，情報カスケードは正しい情報を効率的に伝える，という役割を果たすこともある．蟻コロニー最適化（ACO）は蟻のフェロモンに反応して他者を模倣する行為を利用して最適化を行うアルゴリズムであり，巡回セールスマン問題（TSP）などで有効なアルゴリズムであることが知られている．遺伝的アルゴリズムは子の遺伝子は親の遺伝子を模倣することと突然変異を利用するアルゴリズムである．我々はこの 3 つのモデルの関係を調べ，情報カスケードのモデルである投票モデルで記述できることを示した．この情報カスケードのモデルは数理的な解析が可能であり，また情報カスケード転移という相転移があることが分かっている．このことを利用して蟻コロニー最適化と遺伝的アルゴリズムのハイブリッドであるアルゴリズムを考えた．またこのアルゴリズムを利用し，2 択のクイズでの最適化を行った．

キーワード：蟻コロニー最適化，遺伝的アルゴリズム，イジング・モデル，投票モデル

Between Ant Colony Optimization and Generic Algorithm

Masato Hisakado[1,a)]　Masafumi Hino[2]

Received: February 26, 2016, Revised: April 28, 2016,
Accepted: May 18, 2016

Abstract: In this paper, we discuss a relation among ant colony optimization, generic algorithm and a voting model. The voting model represents how voters are given the public perceptions. A voting model is constructed by two types of voters-herders and independents and two candidates. The voting of independents is based on their fundamental values; on the other hand, the voting of herders is based on the number of previous votes. Herders corresponds to ants that follow pheromone trail and independents are dull ants which cannot trail the pheromone in ant colony optimization. In generic algorithm, herders corresponds to the DNA which is succeeded from parents to children and independents corresponds to mutations. We made a new algorithm between ant colony optimization and generic algorithm and apply it to the a two-choice quiz optimization.

Keywords: ant colony optimization, genelic alogorithm, Ising model, voting model

1.　はじめに

模倣行為は様々な場面で見られる．これは群で行動することが多い動物の世界はもちろんであるが，ヒトの世界でも頻繁に見られることである．これらは主に社会学や経済学などの世界で，議論されてきた．統計物理学はこのような模倣行為の集団現象であるマクロ現象を記述する有力な手段と考えられている．実際，社会物理学や経済物理学などはこのような試みの舞台となっている [1]．

ヒトは他人の行動を観察して，‘空気を読む’．これは ‘社会的学習’ とも呼ばれる．実際，‘学習’ と名のつくとおり，ヒトからヒトへの情報の伝達方法である．おいしいレストランは行列ができている場合も多い．行列に並べば，独自に調査しなくてもおいしい食事にありつけるかもしれない．ただしこれが正解かどうかは分からない．誤った情報が連鎖することによって，（たとえば美味しくないレスト

[1] 金融庁
Financial Services Agency, Chiyoda, Tokyo 100–8967, Japan
[2] 日本電気株式会社
NEC Corporation, Minato, Tokyo 108–8001, Japan
[a)] hisakadom@yahoo.co.jp

ランに行列ができるなど）間違った結論が導かれる．情報の正誤にかかわらず連鎖的に情報が伝わることは‘情報カスケード’と呼ばれている [2]．

模倣行為は通常，悪い意味で使われることも多い．たとえば文献 [2] では，誤った情報が広がり，修正機能が働かず，バンク・ランになってしまう様子が詳細に調べられている．一方，正しい情報をコストをかけずに多くの人に伝えることができるというメリットもある．有用なイノベーションがどのように社会に浸透していくか，などについてもさかんに研究されている [3]．

このような模倣性を利用したアルゴリズムとして蟻コロニー最適化（Ant Colony Optimization: ACO）と遺伝的アルゴリズム（Generic Algorithm: GA）が知られている．ACO は蟻の群行動メカニズムから発想を得て，蟻のフェロモンの効果を用いた最適化アルゴリズムである [4], [5]．蟻がフェルモンをなぞる性質を利用している．これは模倣行為を利用した，情報の群全体への伝達と考えられる．このアルゴリズムは，巡回セールスマン問題（Traveling Salesman Problem: TSP）や 2 次割当て問題，グラフ色彩問題のような，組合せ問題を解くのに有効であることが知られている．一方，GA は遺伝のメカニズムを模した，DNA の情報伝達と突然変異によるアルゴリズムである．親から子への遺伝子の伝達は‘進化’の視点で語られることが多いが，模倣と考えることも可能である．子は親の遺伝子を模倣しているという考え方である．

この論文では情報カスケードのモデルである投票モデルによって，ACO と GA を理論的に解析した．これらのアルゴリズムでは様々なパラメータが用いられるが，実質的にパラメータは参照範囲と模倣の程度の 2 つのパラメータによって制御されることが分かった．

またこの解析を応用し ACO と GA のハイブリッドなアルゴリズムを考案した．これらを 2 択のクイズの最適化（正解の推定）に応用しパフォーマンスを標準的な ACO や GA との比較を行った．

章立ては以下のようになっている．2 章では情報カスケードのモデルである投票モデルを導入する．3 章，4 章では投票モデルを変形し，それぞれ ACO と GA を解析する．4 章では特に，GA を拡張したモデルも導入する．5 章では 2 択のクイズの最適化に様々なアルゴリズムを適用する．6 章ではまとめと今後の課題を議論する．

2. 情報カスケードと投票モデル

2.1 投票モデル

情報カスケードのモデルとして投票モデルを考える．この章では情報カスケードのモデルのレビューを行う．自己情報によらずに投票するグループ（模倣者と呼ぶ）と自己情報のみで投票するグループ（独立投票者と呼ぶ）の 2 種類の投票者を考える．投票の対象は候補者 1 と候補者 0 とする．模倣者と独立投票者の 2 種類の人数の比は $p : 1 - p$ とする．p は模倣者の割合である．この比率に従い，ランダムに模倣者と独立投票者が現れ，順次（sequential）投票を行うとする．

独立投票者は自己情報にのみ基づき投票するので確率 q で候補者 1，確率 $1 - q$ で候補者 0 に投票するものとする．ここでは便宜的に候補者 1 を正解とする．独立投票者はおおむね正しい情報を持っていると仮定し，$q > 1/2$ とする．

模倣者はどのような投票をするだろうか．自己情報を持っていないので，他者の投票の影響をふまえて投票するものと考えられる．この行為を‘参照’と呼ぶ．この他者からの影響の関数を反応関数と呼ぶ．

反応関数は他者の候補者 1 への投票の割合が多くなるにつれて，(i) 線形に追随する反応（アナログ模倣者と呼ぶ）(ii) 多数決で多いほうに追随する反応（デジタル模倣者と呼ぶ）の 2 種類が典型例として考えられる．実際ヒトの実験ではこの中間の反応（Tanh 型）をすることが観察されている [6]．

候補者 1 に投票した人の割合を y とすると，それを参照した模倣者は候補者 1 に確率 $f(y)$ で投票するとする．アナログ模倣者の場合は (i) $f(y) = y$，デジタル模倣者の場合は (ii) $f(y) = \theta(y - 1/2)$ に対応する．ここで θ はヘビサイド関数．文献 [6] で使用したその中間の反応は (iii) $f(y) = 1/2[\tanh \lambda(y - 1/2) + 1]$．$\lambda$ はパラメータで模倣の強度を表す変数とする．ただこの関数は模倣度が強いため次章では (iii) とは異なる，べき型の反応関数を用いる．

2.2 確率微分方程式と平均場

確率微分方程式を用いて解析する [7]．過去の投票者全員を参照する場合の確率微分方程式は次のようになる．ただし反応関数は実験で観測された tanh 型の関数 (iii) を用いている．

$$\mathrm{d}X_\tau = \left[(1-p)(2q-1) + p \tanh \frac{\lambda X_\tau}{2\tau}\right] \mathrm{d}\tau + \sqrt{\epsilon}. \quad (1)$$

ここで X_τ は候補者 1 への投票割合，τ は投票者数．最後の項はノイズ項．式 (1) の均衡点 ν の満たす方程式は次のようになる．

$$\nu = \tanh \frac{p\lambda}{2} \left[\nu + \frac{(1-p)(2q-1)}{p}\right]. \quad (2)$$

これはイジング・モデルの平均場と同じ式になっている（付録 A.1 参照）[*1]．対応関係は $p\lambda/2 = J\beta$ となっている．$q = 1/2$ の場合が外場がない場合，$q \neq 1/2$ が外場にある場合に対応している．$q = 1/2$ の場合 λ と p は同じ役割，統計物理では温度の逆数の役割を担っている．独立投票者や反応関数のデジタルからのずれは，ノイズと考えること

*1 イジング・モデルやその平均場理論については田崎晴明著『統計力学 II』（2008 培風館）など統計力学の教科書に詳しい記述がある．

ができ，最適化問題では重要な役割を果たす．独立投票者は一様誤差モデル（uniform error model），反応関数のデジタルからのずれは対数線形反応（log-linear response）と呼ばれ，ノイズの異なる入れ方として知られている [8]．参照人数全員参照ではなく一定の場合は動的イジング・モデルになる [9]．この参照人数が一定のプロセスは平衡過程となり，サイズが大きければ，悪い均衡（誤った回答）に収束することはない．つまり，集団に修正機能が働くという意味である．一方，参照人数が過去の投票者全員の場合は，非平衡プロセスになる [9]．

このようなシステムでは ∞ 人の候補者の投票についてはは 2 種類の相転移が存在することが知られている．候補者 1 への投票率の分布を考える．

1 つは情報カスケード転移．模倣者の割合 p が小さいと，独立投票者が多く投票する候補者 1 に収束する．これを 1 ピーク相と呼ぶ．p を大きくして相転移点 p_c を超えると独立投票者の投票で劣勢な候補者に収束する場合も顕在化する．これを 2 ピーク相と呼ぶ．p_c は式 (2) の解である．$q \neq 1/2$ の場合，2 ピーク相では悪い均衡に収束する場合がある．これは平衡プロセスでは見られなかった現象である．

模倣者の割合 p が小さければ通常のブラウン運動（BM）と同様に標準偏差が $1/\sqrt{t}$ で収束する．相転移点 p_{vc} を境として p を増やしていくと，収束がより遅くなる．これをスーパー・ノーマル転移と呼ぶ．収束が遅い相をスーパー相，収束速度が BM と同じ相をノーマル相と呼ぶ．これは多少揺らぎが大きくなるものの収束速度の問題で，最終的には必ず独立投票者で優勢な候補者に収束することを意味する [7], [10], [11]．

3.　蟻コロニー最適化と投票モデル

3.1　蟻コロニー最適化

巡回セールスマン問題（Traveling salesman problem: TSP）とは都市の集合と距離が与えられた場合，それらの地点を 1 回ずつ訪れる条件を課した場合の，最短距離と求める問題である．この問題は都市の数が増えると経路の計算は難しくなり，NP 困難な問題として知られる．TSP の最適解を探すプログラムに蟻コロニー最適化（Ant colony optimization: ACO）が知られている．

蟻コロニー最適化の標準的なアルゴリズムを紹介する [4], [5]．蟻が地点 i から j に移動する確率は

$$p_{ij}(t) = \frac{(\tau_{ij})^a(\xi_{ij})^b}{\sum_j(\tau_{ij})^a(\xi_{ij})^b} \tag{3}$$

ここで τ_{ij} は地点 i j の間のフェロモン，ξ_{ij} は距離に関する事前知識などヒューリスティックなパラメータである．これは前章の反応関数に相当し，この場合はべき関数となっている．a（>0）と b（>0）はパラメータ．a は模倣の程度を表す重要なパラメータである．実際の蟻の行動の観測では $a=1$ の線形のものと $a=2, 6$ の非線形なものが知られている [14], [15], [16]．

フェロモンの更新は次のように更新を行う．

$$\tau_{ij}(t+1) \to (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \rho\Delta\tau_{ij}(t), \tag{4}$$

ここで，ρ はフェロモンの蒸発率，$\Delta\tau$ は時間 t に更新されたフェロモン．フェロモンの更新は t 番目にスタートした蟻が i j の通路を使用した場合 $\Delta\tau_{ij} = C/L$，使わない場合は $\Delta_{ij} = 0$ である．L は t 番目にスタートした蟻が 1 周するのに要した距離，C は定数である．

3.2　2 択のクイズと ACO

2 択のクイズ N 問を考える．回答者は順に N 問を回答する．回答が終わると採点される．採点は 1 点満点（1 問は $1/n$ 点）で行われるとする．回答者は 2 章で議論したように独立投票者と模倣者の 2 種類を考える．それぞれは $p:(1-p)$ の割合で現れるとする．

独立投票者は確率 q で選択肢 1 を選択するとする．独立投票者は ACO では ‘反応の鈍い蟻（dull ants）’ に対応する [13]．

全部で N 問のうち m 番目の問題に注目する．m 番目の問題に選択肢 1（0）を回答した t 番目の投票者までの平均点（選択肢 1（0）に投票した投票者の総得点を選択肢 1（0）の投票者数で割ったもの）$\bar{\eta}_{1,m}$（$\bar{\eta}_{0,m}$）とする．また選択肢 1（0）の回答数は c_1（c_0）とする．今後は $\bar{\eta}_{1,m}$（$\bar{\eta}_{0,m}$）の m をとって $\bar{\eta}_1$（$\bar{\eta}_0$）と書くこととする．

次の回答者は，問題を解くときに，$\bar{\eta}_i c_i : i = 0, 1$ が提示される．これは $i : i = 0, 1$ に投票した投票者の得点の総和である．この結果，模倣者の場合，得点が高い投票者の回答が模倣されやすくなる．この章では全員を参照する場合を考える．これは ACO では $\rho = 0$ の場合に相当する．

簡単のため十分時間がたったあとを考え $t \gg 1$，$\bar{\eta}_1$ と $\bar{\eta}_0$ を定数と考える．ここでは選択肢 1 が正解であり $\bar{\eta}_1 > \bar{\eta}_0$ を仮定する．投票プロセスは次のようになる．

$$\begin{aligned} c_1(t) = k \to k+1 : P_{k,t} &= p\frac{(\bar{\eta}_1 k)^a}{(\bar{\eta}_1 k)^a + (\bar{\eta}_0(t-k))^a} \\ &\quad + (1-p)q, \\ c_1(t) = k \to k : Q_{k,t} &= 1 - P_{k,t}, \end{aligned} \tag{5}$$

$P_{k,t}$ は ACO では式 (3) の $p_{ij}(t)$ に対応する．またパス $i \to j$ のフェロモン，式 (4) の $\tau_{ij}(t)$ は $\bar{\eta}_j c_j : j = 0, 1$ に対応する．

ここで新しい変数 Δ_t を導入する，

$$\Delta_t = 2c_1(t) - t = c_1(t) - c_0(t). \tag{6}$$

$\Delta_t = u$ で式 (5) を書き直すと

$$\Delta_t = u \to u+1 : P_{u,t} = p\frac{\bar{\eta}_1^a(u+t)^a}{\bar{\eta}_1^a(u+t)^a + \bar{\eta}_0^a(t-u)^a}$$

$$+ (1-p)q,$$

$$\Delta_t = u \to u-1 : Q_{u,t} = 1 - P_{u,t}.$$

次のように連続化する，$\epsilon \to 0$,

$$X_\tau = \epsilon \Delta_{[\tau/\epsilon]}, \tag{7}$$

ここで $\tau = t\epsilon$．この操作で次の確率微分方程式が得られる（詳細については付録 A.2 参照）．

$$\mathrm{d}X_\tau = \left[p \frac{\bar{\eta}_1^a (X_\tau + \tau)^a - \bar{\eta}_0^a (\tau - X_\tau)^a}{\bar{\eta}_1^a (X_\tau + \tau)^a + \bar{\eta}_0^a (\tau - X_\tau)^a} + (1-p)(2q-1) \right] \mathrm{d}\tau + \sqrt{\epsilon}. \tag{8}$$

最後の項はノイズ項で 1 次元ブラウン運動．

$a=1$ の場合，次の方程式になる．

$$\mathrm{d}X_\tau = \left[p \frac{\bar{\eta}_1 (X_\tau + \tau) - \bar{\eta}_0 (\tau - X_\tau)}{\bar{\eta}_1 (X_\tau + \tau) + \bar{\eta}_0 (\tau - X_\tau)} + (1-q)(2q-1) \right] \mathrm{d}\tau + \sqrt{\epsilon}. \tag{9}$$

定常解を次のように仮定する．

$$X_\infty = \bar{v}\tau, \tag{10}$$

ここで $\bar{v}$ は定数．

式 (10) を式 (8) に代入して次の方程式が得られる，

$$\bar{v} = p \frac{\bar{\eta}_1^a (\bar{v}+1)^a - \bar{\eta}_0^a (1-\bar{v})^a}{\bar{\eta}_1^a (\bar{v}+1)^a + \bar{\eta}_0^a (1-\bar{v})^a} + (1-p)(2q-1). \tag{11}$$

これが自己撞着方程式になる．

以下 $p=1$，$q=1/2$ の場合を考える．これは独立投票者がいない場合に相当する．$a \neq 1$ の場合式 (11) の解は $\bar{v} = \pm 1$ と

$$\bar{v} = \frac{\bar{\eta}_0^{\frac{a}{a-1}} - \bar{\eta}_1^{\frac{a}{a-1}}}{\bar{\eta}_0^{\frac{a}{a-1}} + \bar{\eta}_1^{\frac{a}{a-1}}} \tag{12}$$

が得られる．

$a > 1$，$\bar{\eta}_1 > \bar{\eta}_0$（$\bar{\eta}_0 > \bar{\eta}_1$）の場合，$\bar{v} = \pm 1$ が安定解となる．中間の解 (12) は不安定になる．この場合，選択肢 0，つまり悪い均衡に収束する場合がある．

$a < 1$，$\bar{\eta}_1 > \bar{\eta}_0$（$\bar{\eta}_0 > \bar{\eta}_1$）の場合，逆に中間の解 (12) は安定になり $\bar{v} = \pm 1$ は不安定になる．この場合，1 つの中程度の均衡のみが存在する．これは満点 $\bar{v} = 1$ には収束しないことを意味する．

次に $a=1$ の場合を考える．$\bar{v}$ は $\bar{v} = \pm 1$ に解を持つ．$\bar{\eta}_1 > \bar{\eta}_0$（$\bar{\eta}_0 > \bar{\eta}_1$）のとき，式 (11) で右辺 $\geq$ 左辺になっているので $\bar{v} = -1$（$\bar{v} = 1$）は安定ではない．そのため $\bar{v} = 1$（$\bar{v} = -1$），良い均衡に必ず収束する．

一方，$a > 1$ にすればプロセスは $a=1$ より速く収束する．しかし，相転移しているので悪い均衡に収束する可能性もある．これは時間と正解率のトレード・オフとなる．

通常 ACO では a はしばしば $a=1$ に設定されることも多い．これは悪い均衡に収束するリスクを避けていると考えられる．

4. 遺伝的アルゴリズムと投票モデル

4.1 2 択のクイズ

この章では投票モデルと遺伝的アルゴリズム（GA）の関係について考える．前章と同様に 2 択のクイズ N 問を考える．回答者は順に N 問を回答する．回答は採点され，1 点満点で点数がつけられる．ここで N 問のうち m 問目に注目する．

m 番目の問題に選択肢 1（0）を回答した投票者の時刻 0 から t までの平均点を $\bar{\eta}_1$（$\bar{\eta}_0$）とする．また選択肢 1（0）の回答数は c_1（c_0）とする．回答者は独立投票者と模倣者を考え，それぞれは $p : (1-p)$ の割合で現れるとする．

模倣者は時刻 t に t 番目の投票者がすでに投票を終えた投票者の中から選んだ r 人の投票を参照するとする．この r 人については重複しないものとする．模倣者はその参照した投票で多数を獲得している選択肢に投票するとする．$c^r_{0(1)}(t) > c^r_{1(0)}(t)$ の場合，模倣者は選択肢 0（1）に投票する．同数だった場合は $c^r_0(t) = c^r_1(t)$，模倣者は選択肢 1，選択肢 0 に確率 1/2 で投票する．すなわち模倣者は 2.1 節で定義したデジタル投票者ということになる．

ここで $t = c_0(t) + c_1(t) = c_0^\infty + c_1^\infty \to \infty$ の極限を考える．

$$\frac{c_1(t)}{t} \Longrightarrow Z_\infty. \tag{13}$$

ここで $Z(t)$ は選択肢 1 の時刻 t での投票率．

確率 Z の 2 項分布の多数を占める確率を $\pi(Z)$ とする．r が奇数の場合，

$$\pi(Z) = \sum_{g=\frac{r+1}{2}}^{r} \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} Z^g (1-Z)^{r-g} \equiv \Omega_r(Z) \tag{14}$$

となる．r が偶数の場合，

$$\begin{aligned}\pi(Z) &= \sum_{g=\frac{r}{2}+1}^{r} \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} Z^g (1-Z)^{r-g} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r \\ r/2 \end{pmatrix} Z^g (1-Z)^{r/2} \\ &= \sum_{g=\frac{r}{2}}^{r-1} \begin{pmatrix} r-1 \\ g \end{pmatrix} Z^g (1-Z)^{r-1-g} = \Omega_{r-1}(Z).\end{aligned} \tag{15}$$

偶数 r での多数派の確率 π は奇数 $r-1$ の多数派の確率に等しい．以後，奇数の場合を考える..

π は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}\pi(Z) &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^Z x^n (1-x)^n dx \\ &= \frac{1}{B(n+1, n+1)} \int_0^Z x^n (1-x)^n dx.\end{aligned} \tag{16}$$

上記の式 (16) は重複を含むものになっているが t が十分

大きく問題ないと考える．

$r = 2$ の場合，2 人を参照することになる．参照する 2 人が同じ回答ならば，その回答を選択する．もし参照する 2 人が異なる回答ならば確率 1/2 でどちらかの回答になる．これは GA と同じプロセスになっている．

参照する投票者は点数に比例して選ぶとする．これは点数のいい投票者ほど模倣されやすくするという意味である．つまり模倣者が選択肢 1 を選ぶ確率は

$$\frac{(\bar{\eta}_1 k)}{(\bar{\eta}_1 k) + (\bar{\eta}_0 (t-k))} \tag{17}$$

となる．これは GA のルーレット選択に対応する．

時間発展は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} c_1(t) = k \to k+1 : P_{k,t} &= p\pi\left(\frac{(\bar{\eta}_1 k)}{(\bar{\eta}_1 k) + (\bar{\eta}_0 (t-k))}\right) \\ &\quad + (1-p)q, \\ c_1(t) = k \to k : Q_{k,t} &= 1 - P_{k,t}, \end{aligned} \tag{18}$$

最後の項は独立投票者の投票である．これは GA では突然変異に対応する．この突然変異の確率は $1-p$ でおこるとする．

Δ_t を次のように定義する．

$$\Delta_t = 2c_1(t) - t = c_1(t) - c_0(t). \tag{19}$$

時間発展は次のようになる．

$$\begin{aligned} \Delta_t = u \to u+1 : P_{u,t} &= \pi\left(\frac{\bar{\eta}_1(u+t)}{\bar{\eta}_1(u+t) + \bar{\eta}_0(t-u)}\right)p \\ &\quad + (1-p)q, \\ \Delta_t = u \to u-1 : Q_{u,t} &= 1 - P_{u,t}. \end{aligned}$$

前章と同様に連続極限をとる，$\epsilon \to 0$,

$$X_\tau = \epsilon \Delta_{[\tau/\epsilon]}, \tag{20}$$

ここで $\tau = t\epsilon$．この連続化によって次の確率微分方程式が得られる（詳細については付録 A.2 参照）．

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}X_\tau \\ &= \Bigg[(1-p)(2q-1) - p \\ &\quad + 2p\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^{\frac{\bar{\eta}_1(X_\tau+\tau)}{\bar{\eta}_1(X_\tau+\tau)+\bar{\eta}_0(\tau-X_\tau)}} x^n(1-x)^n dx\Bigg]\mathrm{d}\tau \\ &\quad + \sqrt{\epsilon}. \end{aligned} \tag{21}$$

最後の項はノイズ項で 1 次元ブラウン運動．

$r = 1$ の場合，次の方程式になる．

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_\tau = &\Bigg[p\frac{\bar{\eta}_1(X_\tau+\tau) - \bar{\eta}_0(\tau-X_\tau)}{\bar{\eta}_1(X_\tau+\tau) + \bar{\eta}_0(\tau-X_\tau)} \\ &\quad + (1-p)(2q-1)\Bigg]\mathrm{d}\tau + \sqrt{\epsilon}. \end{aligned} \tag{22}$$

これは $p = 1$ の場合，ACO の式 (8) で $a = 1$ の方程式になる．$r = 2$ は $r = 1$ と同等であることから，GA は ACO の $a = 1$ に該当することが分かる．

定常解を次のように仮定する．

$$X_\infty = \bar{v}\tau + (1-p)(2q-1)\tau, \tag{23}$$

ここで $\bar{v}$ は定数．

式 (23) を式 (21) に代入して次の方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \bar{v} = &\frac{2p(2n+1)!}{(n!)^2} \\ &\times \int_0^{\frac{\bar{\eta}_1(\bar{v}+1+(1-p)(2q-1))}{(\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_0)+(\bar{\eta}_1-\bar{\eta}_0)(\bar{v}+(1-p)(2q-1))}} x^n(1-x)^n dx \\ &- p. \end{aligned} \tag{24}$$

これが自己撞着方程式になる．

以下 $p = 1$，$q = 1/2$ の場合を考える．独立投票者がいない場合に相当する．$r = 1, 2$ の場合，ACO の $a = 1$ に相当し，$\bar{v}$ は $\bar{v} = \pm 1$ に解を持つ．$\bar{\eta}_1 > \bar{\eta}_0$（$\bar{\eta}_0 > \bar{\eta}_1$）のとき，式 (11) で右辺 $\geq$ 左辺になっているので $\bar{v} = -1$（$\bar{v} = 1$）は安定ではない．そのため $\bar{v} = 1$（$\bar{v} = -1$），良い均衡に必ず収束する．これが GA に相当する．このことから自然は情報カスケード相転移がない模倣に抑えている．

r が 2 より大きくなるにつれて模倣度は上昇する．それにともない $\bar{v} = \pm 1$ 以外に中間解を持つようになるが，この解は安定解ではない．この場合，情報カスケード転移があり，$\bar{v} = -1$ の悪い均衡に収束する場合が存在する．これは GA に該当せず，模倣度が高いアルゴリズムである*2．次の章ではこのアルゴリズムを 2 択のクイズの最適化に適用する．

5.　2 択のクイズ最適化シミュレーション

5.1　実験の概要

実際にアルゴリズムが機能するかを確認するために，クイズ最適化シミュレーションを行った．シミュレーション方法は以下のとおり行う．はじめに独立回答者 1,000 人がクイズに回答する．次に模倣者が前出の独立回答者の結果の中から r 人を選び，その結果を参照して回答する．参照については直近の 1,000 人の回答（これを参照範囲と呼ぶ）の中から選択し，時間の経過とともに参照範囲は更新されるとする．したがって，つねに参照範囲は 1,000 人と一定にしている．ここは前章までの解析部分と異なるところである．前章まではすべての範囲を参照範囲としていた．このためこのプロセスは平衡プロセスになる．

参照範囲からどの回答者を参照するかは回答者 j の得点の a 乗に比例するものとする．$a = 1$ の場合が式 (17) に該当する．a はパラメータと考える．GA の場合は $a = 1$ のルーレット選択になる．a は選択に対するメリハリと考えられる．点数がいい回答者の解をどれだけ参照するのかの

*2　ACO では $a > 1$ のパラメータ領域に該当する．ただし反応曲線は異なる．

度合いを示している．たとえばサラブレッドの世界であれば，人気の高い種馬の子供が多くなる（参照する）一方，人気のない種馬の子供はほとんどいない．このメリハリを表すパラメータと考えることができる．

参照人数は r とし，シミュレーションのもう 1 つのパラメータとする．今回は $r = 2, 5, 10, 1{,}000$ で実施した．なお 1,000 の場合は ACO モデルに該当する．この場合は選択された複数の参照人数から，どちらの答えを選択するかは式 (5) に従う．

クイズの問題数は 100 問とし満点は 1 点（1 問は 0.01 点）とする．回答者の学習つまりスコアが 1 点に収束する速度 t_{min}（模倣者の数）とシミュレーションのパラメータとの依存関係を比較した．t_{min} は最初に収束値に到達した回答者とする．

5.2　数値計算結果

結果をまとめたものが**表 1** である．参照人数 r，模倣度のパラメータ a の増加にともない収束 t が減少している*3．これらは模倣度を上げるパラメータになっており，収束する場合は収束測度は速くなる．一方，$a = 2.0$ で $r = 10$，$r = 1{,}000$ のときはそれぞれ最大スコアが 0.89，0.96 と満点 1 には到達していない．これは模倣の度合いが強すぎて悪い均衡に収束してしまった状態と考えられる．今回の実験では途中に独立投票者を入れていないため，いったん悪い均衡に陥ると抜けられる可能性は低くなっている．

模倣は社会的な学習の速度を上げる．一方，あまり模倣度を高くすると，誤った情報を修正する機能が働かずに，逆に誤った情報が流布してしまうこととなる．これは社会的な学習のトレードオフ，すなわち表裏になっている．

模倣度 a や参照数 r については今後，どのような問題にはどの領域が最適なのか，意味のある値なのかを検証する必要がある．これは問題の選択肢数などの難易度や正答の時間的な変化などによるものと考えられる．2 択のクイズは比較的簡単な問題のため，模倣度を上げることにより，学習効果を高めるというのが比較的有効な戦略と考えられる．

また $a = 0.5$ で $r = 2$ の場合のみ，最適値を持つことも注目される．これはあまりメリハリがついていない場合は，参照数は少ない方が安定的に学習が進む可能性を示している．$r \neq 2$ では収束値を持たず $t = 1{,}000$ と $t = 1{,}000{,}000$ でスコアの分布に違いは見られなかった．

表 1　異なるパラメータによる収束の様子．a と r による収束の様子．t は収束時間 t_{min}．* のついていないものは 1 に収束．それぞれの収束値は * が 0.89，** が 0.86，*** が 0.96

Table 1　Convergence in some parameters.

	$r = 2$	$r = 5$	$r = 10$	$r = 1{,}000$
$a = 0.5$	$t = 85{,}113$	収束せず	収束せず	収束せず
$a = 1.0$	$t = 69{,}429$	$t = 53{,}481$	$t = 46{,}951$	$t = 34{,}567$
$a = 2.0$	$t = 56{,}077$	$t = 5{,}199$*	$t = 3{,}218$**	$t = 4{,}493$***

*3　収束については複数回確認しているが，収束時間についてはそのうちの 1 回のもの（100,000 ステップ）を記載している．

6.　まとめと今後の課題

情報カスケードは模倣によって情報が連鎖する現象である．これによって間違った情報が流布することもあれば，正しい情報がすばやく伝達することも可能になる．この論文ではこのような正負の両面のうち，正の面をアルゴリズムに応用することを考えた．

以前から生物の模倣性を利用する ‘集合知’ として蟻コロニー最適化（ACO）や遺伝的アルゴリズム（GA）が知られている．これは蟻のフェルモンに従って行動する習性や子の DNA が両親からの遺伝子を受け継ぐシステムを利用している．これらは模倣の一種ととらえることができる．

これらのアルゴリズムを情報カスケードのモデルを使って記述し，ACO はべきの反応関数，GA は両親の数 r（通常はオスとメスの 2）が模倣度に重要な影響を与えることを示した．特に ACO でパラメータ $a = 1$ の場合は GA と同値であること示した．また GA の両親の数を増やすアルゴリズムを考案した．これは ACO で $a > 1$ の GA バージョンであり模倣度を増やすことに相当する．

2 択のクイズの最適化という比較的簡単な問題を行った場合はこれらの模倣度を強めたアルゴリズムを用いることによって収束速度を上げることができた．ただ，これらのパラメータの最適値は問題の難易度や正解の時間変化の影響を受けるので，様々な問題に適応してその効果を確認したい．

また，これらのパラメータのある領域では，模倣の負の効果が出やすくなる情報カスケード転移が起こる場合がある．これは誤った解（悪い均衡）に拘束され，そこから抜け出せない現象である．ここから抜け出すには相当数の独立投票者（突然変異）と時間が必要になる．自然がこのようなパラメータを採用しないのはシステムに頑健性を求めるためだと考えることができる．

今後の課題としては NP 困難な問題である巡回セールスマン問題に適用することを考えている．また正解が時間とともに変化する場合は解に適度に追随する必要がある．過度な追随は状況が変化した場合，悪い均衡になり，そこから抜け出すのが困難になってしまう．この場合についても数値実験を行う予定である．

参考文献

[1]　Galam, G.: *Stat. Phys.*, Vol.61, p.943 (1990).

[2]　伊藤陽一，小川浩一，榊　博文：デマの研究：愛知県豊川信用金庫 “取り付け” 騒ぎの現地調査，総合ジャーナリズム研究，No.69 (1974).

[3]　Watts, D.J. and Dodds, P.S.: *J. Consumer Research*, Vol.34, p.441 (2007).

[4] Dorigo, M. and Stutzle, T.: *Ant Colony Optimization*, Bradford Books (2004).

[5] Dorigo, M. and Gambardella, L.M.: *Bio System*, Vol.43, p.73 (1997).

[6] Mori, S., Hisakado, M. and Takahashi, T.: *Phys. Rev. E.*, Vol.86, p.026109 (2012).

[7] Hisakado, M. and Mori, S.: *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol.45, p.345002 (2012).

[8] Young, H,P.: *Econome*, Vol.61, No.1, p.57 (1993).

[9] Hisakado, M. and Mori, S.: *Physica A*, Vol.417, p.63 (2015).

[10] Hisakado, M. and Mori, S.: *J. Phys. A*, Vol.22, p.275204 (2011).

[11] Hisakado, M. and Mori, S.: *J. Phys. A*, Vol.43, p.31520 (2010).

[12] Mori, S. and Hisakado, M.: *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol.79, p.034001 (2010).

[13] Shimomura, S., Sugimoto, M., Haraguchi, T., Matsushita, H. and Nishio, Y.: *NOLTA'10*, p.504 (2010).

[14] Beckers, R., Deneubourg, J.L., Goss, S. and Pasteels, J.M.: *Insectes Sociaux*, Vol.37, p.258 (1990).

[15] Pratt, S.C., Sumpter, D.J.T., Mallon, E.B. and Franks, N.R.: *Behavioral Eco and Socio*, Vol.52, p.117 (2005).

[16] Beckers, R., Deneubourg, J.L., Goss, S. and Pasteels, J.M.: *J. Insect Behavior*, Vol.6, p.751 (1993).

付　　録

A.1 イジング・モデル

ここではイジング・モデルを紹介する．ここでは各スピンが他の $N-1$ 個のスピンと相互作用し無限レンジ模型（infinite range model）と呼ばれるモデルを考える．ハミルトニアンは

$$H(\sigma)=-\frac{J}{N}\sum_{i>j}\sigma_i\sigma_j-h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i. \tag{A.1}$$

ここで σ はスピン変数であり ± 1 の値をとる．J は相互作用の強さを表すパラメータで，h は外場の強さを表すパラメータである．ここでスピンの平均値を $m=1/N\sum\sigma_i$ とする．これはオーダパラメータになる．

$N\rightarrow\infty$ のリミットで自己撞着方程式は次のようになる．

$$m=\tanh\beta(Jm+h), \tag{A.2}$$

ここで $\beta=1/k_BT$．k_B はボルツマン定数で T は温度．無限レンジ模型では平均場近似が厳密解を与えることが知られている．

A.2 式 (8) の導出

次のような変数を用いる．$\delta X_\tau=X_{\tau+\epsilon}-X_\tau$ は差分，ζ_τ は標準的な i.i.d. のガウシアンとする．ドリフトを f_τ，分散を g_τ^2 とする．

$$\delta X_\tau=f_\tau(X_\tau)\epsilon+\sqrt{\epsilon}g_\tau(X_\tau)\zeta_{\tau+\epsilon}. \tag{A.3}$$

$X_\tau=x$ とすると Δ_n の時間発展の式から次の式が得られる．

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\delta X_\tau)&=\epsilon\mathrm{E}(\Delta_{[\tau/\epsilon]+1}-\Delta_{[\tau/\epsilon]})\\&=\epsilon(2p_{[\frac{l/\epsilon+\tau/\epsilon}{2}],\tau/\epsilon}-1)\\&=\epsilon\left[p\frac{\bar{\eta}_1^a(X_\tau+\tau)^a-\bar{\eta}_0^a(\tau-X_\tau)^a}{\bar{\eta}_1^a(X_\tau+\tau)^a+\bar{\eta}_0^a(\tau-X_\tau)^a}\right.\\&\qquad\left.+(1-p)(2q-1)\right].\end{aligned} \tag{A.4}$$

これからドリフト項が次のようになる．

$$\begin{aligned}f_\tau(x)&=p\frac{\bar{\eta}_1^a(X_\tau+\tau)^a-\bar{\eta}_0^a(\tau-X_\tau)^a}{\bar{\eta}_1^a(X_\tau+\tau)^a+\bar{\eta}_0^a(\tau-X_\tau)^a}\\&\quad+(1-p)(2q-1).\end{aligned} \tag{A.5}$$

さらに，

$$\begin{aligned}\sigma^2(\delta X_\tau)&=\epsilon^2[1^2p_{[\frac{l/\epsilon+\tau/\epsilon}{2}],\tau/\epsilon}+(-1)^2(1-p_{[\frac{l/\epsilon+\tau/\epsilon}{2}],\tau/\epsilon})]\\&=\epsilon^2,\end{aligned} \tag{A.6}$$

ここで $g_{\epsilon,\tau}(x)=\sqrt{\epsilon}$．よって X_τ が従う確率微分方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_\tau&=\left[p\frac{\bar{\eta}_1^a(X_\tau+\tau)^a-\bar{\eta}_0^a(\tau-X_\tau)^a}{\bar{\eta}_1^a(X_\tau+\tau)^a+\bar{\eta}_0^a(\tau-X_\tau)^a}\right.\\&\qquad\left.+(1-p)(2q-1)\right]\mathrm{d}\tau+\sqrt{\epsilon}.\end{aligned} \tag{A.7}$$

久門 正人

1968 年生．1991 年東京大学理学部物理学科卒業．1993 年同大学大学院修士課程修了．1996 年同大学院博士課程修了．専門は経済物理学や金融工学．

日野 雅文

1982 年生．2009 年東京工業大学大学院物理電子システム創造専攻修士課程修了．現在，NEC 勤務，金融システム開発を担当．