3M-5

オンデマンド・データ・ブロードキャスティングに対する近似アルゴリズムの実験的評価

長谷 英治† 浅野 孝夫‡

中央大学大学院 理工学研究科 情報工学専攻†
中央大学 理工学部 情報工学科‡

1 はじめに

オンデマンド・データ・ブロードキャスティングに関する問題の 1 つに，平均レスポンスタイム最小化問題がある．この問題に対し，Bansal et al. によって 2005 年に $O(\sqrt{n})$ 近似アルゴリズムが提案され，2006 年には 2005 年の手法を発展させた $O((\log n)^2/\log\log n)$ 近似アルゴリズムが提案されている．

本稿では，この 2 つのアルゴリズムを実装し，計算機実験を行うことでその性能を評価した．また，2006 年の手法を改善することで，その計算時間を短縮できることを示す．

2 問題定義

オンデマンド・データ・ブロードキャスティング (on-demand data broadcasting) とは，サーバに n 種類のページが存在し，クライアントから受信したリクエストに対してサーバがページを送信するというものである．ここで，サーバは送信するページをブロードキャストすることにより，すべてのクライアントにページを送信することができる．

このオンデマンド・データ・ブロードキャスティングの中に，**平均レスポンスタイム最小化問題** (average response time minimization problem) がある．これは，サーバに存在するページ数 n と，時刻 t でのページ p に対するクライアントからのリクエストの量 r_t^p が入力として与えられる．リクエスト r_t^p は，サーバが時刻 $t'(t' > t)$ にページ p を送信することにより満たされ，この待ち時間 $t' - t$ を**レスポンスタイム** (response time) と呼ぶ．本問題の目的は，すべてのリクエストを満たし，平均のレスポンスタイムを最小化することである．

また，単位時間にサーバが送信できるページの数が k であるとき，k-スピードと呼ばれる．$k = 1$ のとき，NP-困難であることが証明されており，本稿においてもこれを扱っていく．

この問題は，以下のように整数計画問題として定式化できる．なお T は，リクエストの最大到着時刻である．$x_{tt'}^p$ は時刻 t でのページ p に対するリクエストが時刻 t' に満たされたとき 1 となり，そうでないときは 0 である．また，$y_{t'}^p$ は時刻 t' でページ p を送信したとき 1 となり，そうでないときは 0 である．

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_p \sum_t \sum_{t'=t+1}^{T+n} (t'-t)\cdot r_t^p \cdot x_{tt'}^p & \\
\text{s.t.} & y_{t'}^p - x_{tt'}^p \geq 0, & \forall p, t, t' > t \\
& \displaystyle\sum_{t'=t+1}^{T+n} x_{tt'}^p \geq 1, & \forall p, t \\
& \displaystyle\sum_p y_{t'}^p \leq 1, & \forall t' \\
& x_{tt'}^p \in \{0,1\}, & \forall p, t, t' \\
& y_{t'}^p \in \{0,1\}, & \forall p, t'
\end{array}
$$

3 Bansal et al. (2005) の手法 [1]

2005 年の手法は，緩和した整数計画問題を解き，その解を利用して**暫定的スケジュール** (tentative schedule) を求め，キューを用いてこの暫定的スケジュールを実行可能なスケジュールにするというものである．

以下にアルゴリズムの詳細を示す．

1. 緩和した整数計画問題を解き LP 解を求める．
2. 各ページ p ごとに $\alpha_p \in [0, 1]$ をランダムに定める．
3. $i = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，LP 解においてページ p が合計で $i + \alpha$ 送信された時刻を t_i^p とする．
4. $t_0^p, t_1^p, \cdots$ をページ p の暫定的スケジュールとする．
5. キューを使用して，暫定的なスケジュールを実行可能なスケジュールにする．

4 Bansal et al. (2006) の手法 [2]

本質的には，2005 年の手法の発展である．2006 年の手法における 2 つの改良点を以下に示す．

(改良点 1) 各ページ p ごとに**ブロック** (block) と呼ばれる時間枠 $B(p, i)$ を定め，そのブロック内で暫定的スケジュールを求める．

(改良点 2) 各ブロックごとに $\alpha \in [0, 1]$ を定める．このとき，新たに線形計画問題を定義し α の値を決定する．

α の値は，$\delta = 1/(T + n)^2$ の j (j は正整数) 倍としてよいことが証明されている [2]．ここで，$B(p, i, j)$ を $B(p, i)$ 内で $\alpha = \delta \cdot j$ と決定したときの暫定的スケジュールであるとする．

Experimental Estimation of Approximation Algorithms for On-demand Data Broadcasting

†Eiji HASE, Information and System Engineering Course, Graduate School of Science and Engineering, CHUO University

‡Takao ASANO, Department of Information and System Engineering, Faculty of Science and Engineering, CHUO University

以下の線形計画問題を解くことで，α の値を決定することができる．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_p \sum_i \sum_j R(B(p,i,j)) \cdot z_{pij} & & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_j z_{pij} = 1, & \forall p, i \quad & (1) \\
& \sum_p \sum_i \sum_j w(B(p,i,j),t) \cdot z_{pij} = 1, \ \forall t & & (2) \\
& z_{pij} \geq 0, & \forall p, i, j \quad & (3)
\end{aligned}
$$

なお，$R(B(p,i,j))$ は $\alpha = \delta \cdot j$ を選んだときの $B(p,i)$ 内のレスポンスタイムであり，$w(B(p,i,j),t)$ は，$t \in B(p,i,j)$ であるとき 1 となり，それ以外は 0 となる．また，制約式 (2) は各時刻 t において，1 ページのみ送信するということを表している．

この式の整数解を求めるために，制約式 (2) を緩和する．具体的には $I = (t_1, t_2]$ とし，この時間枠内で送信するページをまとめて選択する．そして，線形計画問題を解き，$z_{pij} = 1$ となった変数を除き線形計画問題を再構築する．これを $O(\log(T+n))$ 回繰り返し，整数解を求める．

5 提案手法

(2005 年の手法に対する改善)

2005 年の手法では，まだ満たされていないリクエストがあるにも関わらず，サーバがどのページも送信しない時刻が存在する．そこで，その時刻に満たされていないリクエストが最も多いページを送信することで，解を改善する．

(2006 年の手法に対する改善)

2006 年の手法では，α の値を定めるために，線形計画問題を $O(\log(T+n))$ 回解く必要がある．また，j は 1 から $(T+n)^2$ の値をとるために，変数の数が膨大になってしまう．この 2 つの点から，2006 年の手法では，計算時間がかかってしまう．そこで，本稿では計算時間を減らすために，j の値を制限する．

具体的には，各 $B(p,i)$ に対しすべての j で暫定的スケジュールを求め，連続した同じ暫定的スケジュールを 1 つの j として考える．暫定的スケジュールが変わったときの j を新たな j と考え，同様に繰り返していく．これをすべての $B(p,i)$ について行い，j の値を制限していく．

6 実験的性能評価

2005 年，2006 年の手法とそれぞれに改善を加えたものを，近似率と計算時間の観点から比較した．実験のデータは，両実験共に 100 種類の入力に対し平均を取ったものであり，入力である各時刻のリクエスト数には 0 から 5 の一様乱数を与えている．また，両実験共にリクエストの最大到着時刻を 30 と固定し，ページ数を変化させている．なお，最適解としては整数計画問題を線形計画ソフト NUOPT で解くことにより得られる整数解を用いた．

図 1 が近似率について比較したグラフである．ページ数が少ないときには 2006 年の手法は，改善前，改善後共にあまり有効ではないのがわかる．これは，ページ数やリクエストの最大到着時刻が小さいときにはブロックの概念が効果的ではなくなってしまうためだと考えられる．ページ数が多くなるにつれて，2006 年の手法がよい近似率を求めていることがわかる．

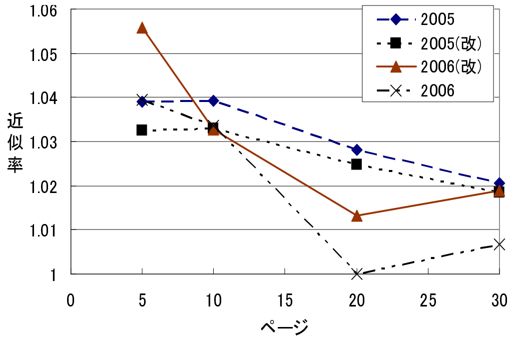

図 1　近似率に対する比較

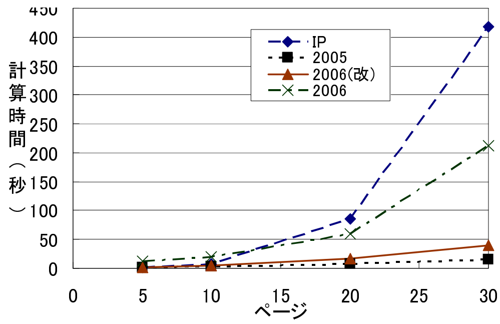

図 2　計算時間に対する比較

図 2 が計算時間について比較したグラフである．こちらに関しては，整数計画問題の計算時間についても比較した．また，2005 年の計算時間は，提案手法も合わせた計算時間である．このグラフを見ると，改善した 2006 年の手法が，改善していない 2006 年の手法よりかなり計算時間が短いことがわかる．

7 結論

2006 年の手法に対する改善は，もともとの手法の計算時間を大幅に短縮することができた．特に，ページ数やリクエストの最大到着時刻が大きいほど効果的である．2006 年の手法は，近似率に関する結果を見てもわかるように，大きな入力に対して有効である．大きな入力では計算時間が大きくなってしまうのを，改善を加えることで，短縮することができた．

以上のことから，2006 年の手法に対する改善は有用であるといえる．

参考文献

[1] N. Bansal, M. Charikar, S. Khanna, J. S. Naor: Approximating the Average Response Time in Broadcast Scheduling. *Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Vancouver, January 2005, pp. 215–221.

[2] N. Bansal, D. Coppersmith, M. Sviridenko: Improved Approximation Algorithms for Broadcast Scheduling. *Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Miami, January 2006, pp. 344–353.