確率的なグラフ連結性判定アルゴリズム

池田 諭[†] 品野 勇治[†] 中森 眞理雄[†]

与えられたグラフ $G=(V,E)$ が連結か否かを判定することを考える．グラフ全体の構造を保持すれば，$O(|V|+|E|)$ の手間で連結性を判定できることが Tarjan によって示されている．本論文では，グラフ全体の構造は保持しないで，グラフの各頂点をある規則に従ってランダムウォークすることによりグラフの連結性を判定するアルゴリズムを扱う．無向グラフを対象として，時間計算量 $O(|V||E|\log|V|)$，空間計算量 $O(\log|V|)$ でグラフの連結性を判定するランダムウォークに基づくアルゴリズムが，Aleliunas らにより開発されている．本論文では，簡単な前処理をすることが可能な状況ならば，時間計算量 $O(|V|^2\log|V|)$ で無向グラフの連結性が判定できることを示す．また，有向グラフの場合もグラフの直径と正の次数に上界を仮定すると，連結性が多項式オーダで判定できることを示す．

A Probabilistic Algorithm for the s-t Connectivity Problem

Satoshi Ikeda,[†] Yuji Shinano[†] and Mario Nakamori[†]

This paper investigates a certain version of the *s-t connectivity problem* for a directed or undirected graph $G=(V,E)$. In 1979, Aleliunas, et al. proposed the “random walk”-based probabilistic algorithm of time complexity $O(|V||E|\log|V|)$ and space complexity $O(\log|V|)$. This work presents a variant of that algorithm. The mean *hitting time* of random walks is analyzed and our algorithm variant is shown to improve the time complexity to $O(|V|^2\log|V|)$ for an undirected graph. The same time complexity $O(|V|^2\log|V|)$ holds for a directed graph, where the implied constant multiplier depends only on the diameter and the degree of the graph.

1. はじめに

与えられたグラフ $G=(V,E)$ が連結か否かを判定することを考える．グラフ全体の構造を保持すれば，$O(|V|+|E|)$ の手間で連結性を判定できることが Tarjan[2)]によって示されている．しかし，インターネット上での現在 20 億近くある[9)] といわれているサイトの接続関係をモデル化したようなグラフを対象とする場合，グラフ全体の構造を抽出すること自体が困難である．さらに，グラフの構造そのものも時事刻々と変化する．したがって，Tarjan によって示されるアルゴリズムは適さない．

本論文では，グラフ全体の構造は保持せず，グラフの頂点をある規則に従って，ランダムウォークすることでグラフの連結性を判定するアルゴリズムを扱う．1979 年に論文 3) の中で，Aleliunas らは，長さ $O(|V||E|\log|V|)$ のランダムウォークによって，無向グラフの連結性が判定できることを主張している．彼らの手法では，無向グラフの頂点 s，t が連結かどうかの判定は，次のように行う．頂点 s から出発して**図 1** のように，隣接する頂点を等確率で選んで移動するという操作を繰り返す．そして，十分な操作を繰り返しても頂点 t に到達できないならば頂点 s と頂点 t は連結でないと判定する．誤った結論を導く可能性もあるが，その確率が十分小さいならば実用上は問題がないと考えられる．

本論文では，簡単な前処理をすることが可能な状況ならば，$O(|V|^2\log|V|)$ の手間で彼らと同様な主張ができることを示す．また，モデルが有向グラフの場合は，グラフの直径と正の次数に上界を仮定すれば，論文 3) の手法によりグラフの連結性を多項式オーダで判定できることを示す．このような仮定は，必ずしも非現実的なものではない．たとえば，先のインターネット上でのサイトの接続関係をモデル化したようなグラフを考えると，現在，その強連結成分の直径は 20 以下といわれている[9)]．つまり，グラフの頂点に対応する 20 億のサイト数に対して，グラフの直径の上界と

† 東京農工大学工学部
Tokyo University of Agriculture and Technology

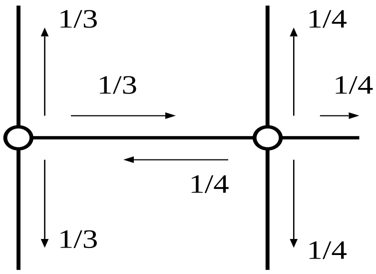


図 1　隣接する頂点を等確率で探索する
Fig. 1　Each neighbor has the same probability for being selected.

して十分に小さい数を仮定しても非現実的ではない．

2. 記号の定義

グラフ $G=(V,E)$ は，有向グラフまたは無向グラフであるものとする．いずれの場合も，グラフ G は多重辺は持たないが自己ループを持つことは許されるものとする．

$G=(V,E)$ が有向グラフならば，$u \in V$ に対して，

$$N^+(u) = \Big\{v : (u,v) \in E\Big\},$$
$$N^-(u) = \Big\{v : (v,u) \in E\Big\}$$

と記す．また，

$$\deg^+(u) = |N^+(u)|,$$
$$\deg^+(G) = \max_{u \in V} \Big\{\deg^+(u)\Big\}$$

および

$$\deg^-(u) = |N^-(u)|,$$
$$\deg^-(G) = \max_{u \in V} \Big\{\deg^-(u)\Big\}$$

と記す．このとき，$\deg^+(u)$，$\deg^-(u)$ をそれぞれ $u \in V$ の正の次数，負の次数，$\deg^+(G)$，$\deg^-(G)$ をグラフ G の正の次数，負の次数という．

$G=(V,E)$ が無向グラフならば，$u \in V$ に対して，

$$N(u) = \Big\{v : (u,v) \in E\Big\}$$

と記す．また，$u \in V$ の次数 $\deg(u)$ およびグラフ G の次数 $\deg(G)$ を

$$\deg(u) = |N(u)|,\ \deg(G) = \max_{u \in V} \deg(u)$$

と定める．

グラフ G の最も離れた 2 頂点の距離をグラフ G の直径と呼び $D(G)$ と記す．すなわち，

$$D(G) = \max_{u,v \in V} D(u,v)$$

とする．ただし，$u, v \in V$ に対して $u \neq v$ であるならば

$$D(u,v) = \inf \Big\{\ell \in \mathbf{N} \;\Big|\; u = v_0,\ v = v_\ell,\ \{v_i, v_{i+1}\} \in E \text{ for } i = 0, 1, \cdots, \ell - 1\Big\}$$

とし，$u = v$ であれば $D(u,v) = 0$ とする．

3. ランダムウォークに基づく連結性判定アルゴリズム

ランダムウォークに基づく，無向グラフ上の頂点 s，t 間の連結性判定アルゴリズムを以下に示す．

Algorithm s-t connectivity
begin
　$r := s$;
　for $i = 0$ **to** $f(|V|, |E|)$ **do**
　begin
　　for all $j \in N(r)$ **do**
　　begin
　　　　$\deg(j)$ を求める;
　　end;
　　ある選択基準で $k \in N(r)$ を選ぶ;
　　$r := k$;
　　if $r = t$ **then** 連結と判定;
　end;
　非連結と判定;
end;

ここで，$f(|V|, |E|)$ は，繰返し回数を与える関数である．r 更新時の選択基準と，各選択基準による $f(|V|, |E|)$ を決定するための解析については次節以降で述べる．論文 3) との違いは，$\deg(j)$ を求める部分が必要なことだけである．つまり，本論文でのアルゴリズムは，前処理として r に隣接する各頂点の次数を知る必要がある．この処理を加えることで，r 更新時に隣接する頂点を選択する際，隣接する各頂点の次数の情報を利用できる．有向グラフの場合には，$N(r)$ が $N^+(r)$ となり，$\deg(j)$ が $\deg^+(j)$ となる．

上記のアルゴリズムでは，r が更新されるときに，$N(r)$ に関する情報のみを参照する．具体的には，r 到達時において，r に隣接する各頂点の次数さえ得られればよく，グラフ全体の構造を保持する必要がない．この事実により，上記のアルゴリズムに対応する次のような分散アルゴリズムが考えられる．各プロセス（またはサイト）では，以下のアルゴリズムが動作する．

プロセス P_r での Algorithm
while Receive(Origin, Message, Tag) **do**
begin
　case Tag **of**
　　Token:

```
    begin
      if Message.step > f(|V||E|) then
        非連結と判定して終了;
      if Message.t = r then
        連結と判定して終了
      else
      begin
        s := Message.s;
        t := Message.t;
        step := Message.step + 1;
        if P_r は初期化されていない
          then
          begin
            for all j ∈ N(r) do
            begin
              Send(j, NULL,
                DegreeRequest);
            end;
          end
          else
          begin
            ある選択基準に従って,
              k ∈ N(r) を選択;
            Message.s := s;
            Message.t := t;
            Message.step := step;
            Send(k, Message, Token);
          end;
       end;
    end;
  DegreeRequest:
    begin
      Send(Origin, deg(r),
        DegreeReply);
    end;
  DegreeReply:
    begin
      if N(r) の全部から DegreeReply
        を得た then
      begin
        P_r の初期化完了 (すべての隣接
          する頂点の次数を得た）;
        ある選択基準に従って,
          k ∈ N(r) を選択;
        Message.s := s;
        Message.t := t;
        Message.step := step;
        Send(k, Message, Token);
      end;
    end;
end;
```

ここで，Receive(origin, message, tag) は，送り元 origin から，tag で示される種類のメッセージを受け取り，メッセージ内容を message に含む関数である．また，Send(destination, message, tag) は，送り先 destination へ，tag で示される種類のメッセージを送り，メッセージ内容を message に含む関数である．Token メッセージには，始点 s，終点 t と，ランダムウォークした長さを示す step を含む．DegreeReply メッセージには，メッセージを返した P_j における $\deg(j)$ が含まれる．

アルゴリズムは，始点となるプロセスが，自分自身に対して，s，t と step=0 を含む Token メッセージを送出することで開始する．

4. アルゴリズムの解析

4.1 モデルの定式化

頂点の片側無限列の集合を $\Omega = V^{\mathbf{N}\cup\{0\}}$ とする（ただし，$\mathbf{N}$ は自然数の集合とする）．Ω はグラフ上の辺に沿って，グラフ上をランダムウォークする際の頂点列を表している．すなわち，集合 Ω の元を $\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots)$ と表記するとき，ω は頂点 ω_0 から出発して，頂点 $\omega_0, \omega_1, \cdots$ をこの順番で遷移するランダムウォークのパスを意味している．次に，ω の $i+1$ 番目の要素 ω_i のことを $X_i(\omega)$ と記す．すなわち，$\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots) \in \Omega$，$n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して，

$$X_n : \Omega \to V, \quad X_n(\omega) = \omega_n$$

とする．

集合 Ω 上のマルコフ測度全体の集合を $\mathcal{M}(\Omega)$ とする．マルコフ測度 $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ は，初期分布 $\mathbf{q}^{(0)} = (q_v^{(0)}) \in [0,1]^V$ と遷移確率行列 $Q = (q_{uv}) \in [0,1]^{V \times V}$ を持つものとする．すなわち，任意の $v \in V$ に対して

$$\mu(X_0(\omega) = v) = q_v^{(0)} \quad \text{かつ} \quad \sum_{v \in V} q_v^{(0)} = 1.$$

また，任意の $i \in \mathbf{N}$ と $u, v, x_0, x_1, \cdots, x_{i-1} \in V$ に対して，

$$\begin{aligned} &\mu(X_{i+1}(\omega) = v | X_0(\omega) = x_0, \cdots, X_i(\omega) = u) \\ &= \mu(X_{i+1}(\omega) = v | X_i(\omega) = u) = q_{uv} \end{aligned}$$

かつ，任意の $u \in V$ に対して

$$\sum_{v \in V} q_{uv} = 1$$

が成り立つ．

ここで，Ω の元は，$G = (V, E)$ 上のランダムウォークのパスなので，一般性を失うことなく次の 2 つの条件を仮定できる：

$$v \in N(u) \implies q_{uv} > 0$$

かつ

$$v \notin N(u) \cup \{u\} \implies q_{uv} = 0.$$

よって，以後は扱う測度のクラスを

$$\mathcal{M}^+(\Omega) = \Big\{ \mu \in \mathcal{M}(\Omega) \;\Big|\; q_{uv} > 0 \text{ if } v \in N(u) \text{ かつ } q_{uv} = 0 \text{ if } v \notin N(u) \cup \{u\} \Big\}$$

に制限して議論する．定義により，任意の $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ に対して，

$$\mu\Big(\Big\{\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots) \in \Omega \;\Big|\; \exists k \in \mathbf{N} \text{ such that } (\omega_{k-1}, \omega_k) \notin E\Big\}\Big) = 0$$

が成立する．すなわち，途中で隣接しない頂点が並ぶ ω 全体の測度は 0 である．

$\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots) \in \Omega$ と $v \in V$ に対して

$$\sigma_v(\omega) = \inf\Big\{ i \in \mathbf{N} \mid X_i(\omega) = v \Big\}$$

とする．定義よりすべての $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ と $v \in V$ に対して，

$$\mu\Big(\{\omega \in \Omega \mid \sigma_v(\omega) < \infty\}\Big) = 0$$

が成立する．以上の定義に基づき，与えられたグラフ $G = (V, E)$ と $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ に対して s から $t (s, t \in V)$ への mean hitting time $H_\mu(s, t)$ を次のように定義する．

$$H_\mu(s, t) = E_\mu\Big[\sigma_t(\omega) \mid X_0(\omega) = s\Big].$$

このとき，$H_\mu(s, t) < \infty$ である．また，一般に $H_\mu(s, t) \neq H_\mu(t, s)$ である．

4.2 アルゴリズムの評価手法

アルゴリズムの評価には，マルコフの不等式[8] を用いる．グラフ $G = (V, E)$ と $s, t \in V$，$r > 0$ に対して，マルコフの不等式により，

$$\mu|_s\Big(\{\omega \in \Omega \mid \sigma_t(\omega) \geq r H_\mu(s, t)\}\Big) \leq \frac{1}{r}$$

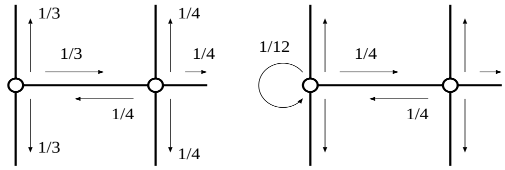
が成立する．ただし，$\mu|_s$ は μ を $\{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) = s\}$ へ制限した確率測度とする．f を，頂点数 $|V|$ と辺の数 $|E|$ で決まるランダムウォークの繰返し回数を与える関数とする．このとき，

$$H_\mu(s, t) \leq f(|V|, |E|) \quad \text{for any } s, t \in V \qquad (1)$$

が成り立つならば，2 頂点が連結かどうかを任意の精度で判定するのに必要な計算量は $O(f(|V|, |E|) \log |V|)$ である[3]．よって，本論文では，式 (1) が成り立つときに，単に，頂点 s，t の連結性は，$O(f(|V|, |E|) \log |V|)$ で判定可能という．

4.3 ランダムウォークの遷移規則

本論文では，遷移確率 $P = (p_{uv}) \in [0, 1]^{V \times V}$，$\hat{P} = (\hat{p}_{uv}) \in [0, 1]^{V \times V}$ がそれぞれ



(a) $\tilde{\mu}$ (b) $\hat{\mu}$

図 2 2 つの遷移規則
Fig. 2 Two transition rules.

$$p_{uv} = \begin{cases} 1/\deg(u) & \text{if } v \in N(u), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\hat{p}_{uv} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{1}{\deg(u)}, \dfrac{1}{\deg(v)}\right\} & \text{if } v \in N(u), \\ 1 - \sum_{w \in N(u)} \hat{p}_{uw} & \text{if } u = v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (3)$$

で与えられる 2 種類のランダムウォークを扱う．ただし，初期分布はそれぞれ $\mathbf{p^{(0)}} = (p_v^{(0)}) \in [0, 1]^V$，$\hat{\mathbf{p}}^{(\mathbf{0})} = (\hat{p}_v^{(0)}) \in [0, 1]^V$ とおく．また，式 (3) は無向グラフの場合のみを扱うが，式 (2) に関しては，有向グラフの場合も扱う．有向グラフの場合，式 (2) の設定は次のように解釈する．

$$p_{uv} = \begin{cases} 1/\deg^+(u) & \text{if } v \in N^+(u), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (2')$$

以後，遷移確率が式 (2) または式 (2′) で与えられるマルコフ測度を $\tilde{\mu}$ と記す．また，式 (3) で与えられるマルコフ測度を $\hat{\mu}$ と記す．明らかに $\tilde{\mu}, \hat{\mu} \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ である．本質的でない議論を避けるため，以降の議論では遷移確率行列が非周期的な場合のみを扱う．式 (2) および式 (2′) は隣接する頂点へ等確率で遷移するというもので，グラフ上のランダムウォークを扱う場合に標準的に使われる設定[3)~8)] である．一方，式 (3) は，文献 10) で扱われた設定で，**図 2** のように遷移確率がつねに対称になるように式 (2) へ修正を加えたものである．

定義から明らかなように，$\hat{P}$ は重確率行列になる．それゆえ，式 (3) の設定では定常分布がつねに一様になる[10]．

4.4 無向グラフの場合

設定 (2) に対して，次の事実が知られている[3),6),8)]．

定理 1 $G = (V, E)$ を連結な無向グラフとする．このとき，任意の $s, t \in V$ に対して，

$$H_{\tilde{\mu}}(s,t) \le |V||E|$$

が成り立つ．

定理 1 は $O(|V|^3 \log|V|)$ の試行で，2 頂点の連結性が判定できることを意味している．次に，設定 (3) の遷移規則を用いた場合の mean hitting time の評価行う．文献 10) の中で，同じ遷移規則での cover time[3)~5),8),10)] の評価を行っているが mean hitting time $H_{\hat{\mu}}(s,t)$ に関する評価は，著者らが知りうる限りは存在しない．

定理 2 $G=(V,E)$ を連結な無向グラフとする．このとき，任意の $s,t \in V$ に対して，

$$H_{\hat{\mu}}(s,t) \le 2|V|(3|V|-2)$$

が成り立つ．

定理 2 は $O(|V|^2 \log|V|)$ の試行で，2 頂点の連結性が判定できることを意味している．よって時間計算量に関しては，Aleliunas らが提案する遷移規則 (2) より (3) の方が有利である．

定理 2 の証明 $H_{\hat{\mu}}(u,v)$ の定義から，

$$H_{\hat{\mu}}(u,v) = \sum_{w\in V} \hat{p}_{uw} H_{\hat{\mu}}(w,v) - \hat{p}_{uv} H_{\hat{\mu}}(v,v) + 1 \qquad (4)$$

が成り立つ．$\hat{P}$ が重確率行列であることから，

$$\begin{aligned}&\sum_{u\in V} H_{\hat{\mu}}(u,v)\\ &= \sum_{u\in V}\sum_{w\in V} \hat{p}_{uw}(1+H_{\hat{\mu}}(w,v)) - \sum_{u\in V}\hat{p}_{uv}H_{\hat{\mu}}(v,v)\\ &= \sum_{u\in V}\sum_{w\in V}\hat{p}_{uw} + \sum_{w\in V} H_{\hat{\mu}}(w,v) - H_{\hat{\mu}}(v,v)\end{aligned}$$

なので，任意の $v\in V$ に対して

$$H_{\hat{\mu}}(v,v) = \sum_{u\in V}\sum_{w\in V}\hat{p}_{uw} = |V| \qquad (5)$$

が成り立つ．式 (4) において，$u = v$ とすると，$w \notin N(v)\cup\{v\}$ のとき $\hat{p}_{vw}=0$ であるから，

$$\begin{aligned}H_{\hat{\mu}}(v,v) &= 1 + \sum_{w\in N(v)} \hat{p}_{vw} H_{\hat{\mu}}(w,v)\\ &> \sum_{w\in N(v)} \hat{p}_{vw} H_{\hat{\mu}}(w,v)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$u \in N(v)$ ならば，

$$\begin{aligned}&H_{\hat{\mu}}(v,v)\\ &> \hat{p}_{vu} H_{\hat{\mu}}(u,v)\\ &= \Big(\max\big\{\deg(u),\deg(v)\big\}\Big)^{-1} H_{\hat{\mu}}(u,v)\end{aligned}$$

を得る．$a,b>0$ ならば $\max\{a,b\} \le a+b$ だから，式 (5) とあわせて，任意の $v\in N(u)$ に対して

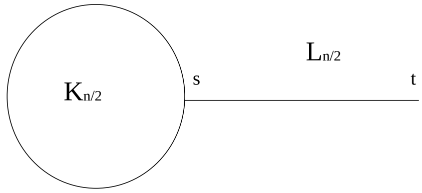


図 3 Lolli-pop グラフ
Fig. 3 A lolli-pop graph.

$$H_{\hat{\mu}}(u,v) \le \Big(\deg(u)+\deg(v)\Big)|V|. \qquad (6)$$

ここで，$s \ne t$ である任意の $s,t\in V$ に対して，次のような s と t を結ぶ最短の経路（経路の長さは ℓ）を考える：

$$s = v_0, v_1, \cdots, v_\ell = t.$$

この経路が最短経路であることから，任意の i，j $(0 \le i < j \le \ell,\ i+2<j)$ に対してつねに

$$\Big(N(v_i)\cup\{v_i\}\Big) \bigcap \Big(N(v_j)\cup\{v_j\}\Big) = \emptyset$$

が成り立っている．よって，$\ell > 2$ の場合に

$$\sum_{i=0}^{\ell} \deg(v_i) < 3|V|-2 \qquad (7)$$

を得る．また，この不等式は $\ell \le 2$ の場合も明らかに成り立っているので，式 (7) はつねに成り立つことが分かる．式 (6) と式 (7) により，任意の $s,t\in V$ に対して

$$\begin{aligned}H_{\hat{\mu}}(s,t) &\le \sum_{i=0}^{\ell-1} H_{\hat{\mu}}(v_i,v_{i+1})\\ &\le 2|V|\sum_{i=0}^{\ell}\deg(v_i) < 2|V|(3|V|-2)\end{aligned}$$

となり定理を得る． □

定理 1 および定理 2 は，オーダとしては最良の評価である．たとえば，次のような例がある．**図 3** は，lolli-pop[8)] と呼ばれるグラフである．lolli-pop は，頂点数 $n/2$ の完全グラフ $K_{n/2}$ のいずれかの頂点に頂点数 $n/2$ の線グラフ $L_{n/2}$ が接続したグラフである．今，図 3 に示すように，頂点 s を線グラフと完全グラフの切断点とし，頂点 t を線グラフのもう一方の端点とする．このとき，

$$H_{\tilde{\mu}}(s,t) = \Theta(n^3)$$

が成り立つ[6),8),10)]．すなわち定理 1 の評価は，オーダとしては最良の評価である．一方，

$$H_{\hat{\mu}}(s,t) = \Theta(n^2)$$

であり，定理 2 の設定において cover time のオーダが真に小さくなることが知られている[10)]．

4.5 有向グラフの場合

この節では，有向グラフの場合を議論する．ランダムウォークを用いて連結性を判定するアルゴリズムにおいて，有向グラフを扱ったものは，著者らが知る限り存在しない．

以後は，$G=(V,E)$ を単純有向グラフで，かつ強連結であるものとする．次の定理は，グラフの直径と正の次数に上界を仮定すると，$O(|V|^2\log|V|)$ の試行で，2 頂点の連結性が判定できることを意味している．

定理 3 $G=(V,E)$ を連結な有向グラフとする．このとき，任意の $s,t\in V$ に対して，

$$H_{\tilde{\mu}}(s,t)\le \deg^+(G)^{D(G)+1}|V|^2$$

が成り立つ．

定理 3 の証明 $H_{\tilde{\mu}}(v,v)$ の定義から，

$$H_{\tilde{\mu}}(v,v)=1+\sum_{w\in N^+(v)} p_{vw}H_{\tilde{\mu}}(w,v)$$

である．$w\in N^+(v)$ のとき，$p_{vw}\ge \dfrac{1}{\deg^+(G)}$ なので，

$$\sum_{w\in N^+(v)} H_{\tilde{\mu}}(w,v)\le \deg^+(G)H_{\tilde{\mu}}(v,v)$$

が成り立つ．s から t へのパスを

$$s=v_0,v_1,\cdots,v_\ell=t$$

とすると，G の強連結性と不等式

$$H_{\tilde{\mu}}(x,y)\le H_{\tilde{\mu}}(x,z)+H_{\tilde{\mu}}(z,y)(x,y,z\in V)$$

により，

$$\begin{aligned}H_{\tilde{\mu}}(s,t)&\le\sum_{i=0}^{\ell-1}H_{\tilde{\mu}}(v_{\ell-i},v_{\ell-i-1})\\&\le\sum_{y\in V}\sum_{x\in N^+(y)}H_{\tilde{\mu}}(x,y)\\&\le\deg^+(G)\sum_{y\in V}H_{\tilde{\mu}}(y,y)\end{aligned}$$

が任意の $s,t\in V$ に対し成立する．ここで，$\tilde{\mu}$ の定常分布を $\pi=(\pi_x)$ とすると，任意の $x\in V$ に対して $\pi_x H_{\tilde{\mu}}(x,x)=1$ だから，任意の $s,t\in V$ に対して，

$$H_{\tilde{\mu}}(s,t)\le\deg^+(G)\sum_{x\in V}\pi_x^{-1} \qquad (8)$$

が成り立つ．

また，$y\in N^+(x)$ とすると，

$$\pi_x=\sum_{w\in N^-(v)}\frac{\pi_w}{\deg^+(w)}\ge\frac{\pi_y}{\deg^+(G)}$$

である．ここで，$\pi_{v_{max}}=\max_{u\in V}\pi_u$ を満たす $v_{max}\in V$ に対して v_{max} から x への最短路を

$$v_{max}=v_0,v_1,\cdots,v_\ell=x$$

とすると，$\pi_{v_{max}}\ge 1/|V|$ なので

$$\begin{aligned}\pi_x&\ge\frac{\pi_{\ell-1}}{\deg^+(G)}\ge\cdots\ge\frac{\pi_{v_{max}}}{\deg^+(G)^\ell}\\&\ge\frac{1}{\deg^+(G)^{D(G)}|V|}.\end{aligned}$$

よって式 (8) とあわせると，任意の $s,t\in V$ に対して

$$H_{\tilde{\mu}}(s,t)\le\deg^+(G)^{D(G)+1}|V|^2$$

を得る． □

5. まとめ

本論文では，グラフ全体の構造を保持しないでグラフの連結性を判定するための，確率的なアルゴリズムについて考察した．その結果，前処理が可能な状況ならば従来知られていた判定方法より少ない手間 $O(|V|^2\log|V|)$ で連結性を判定できることを示した．また，有向グラフの場合，従来の手法での手間の評価を行った．そして，グラフの直径と正の次数に上界を仮定すると，同様に $O(|V|^2\log|V|)$ の手間で連結性が判定できることを示した．

参考文献

1) Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley series in probability and mathematical statistics, New York (1968).
2) Tarjan, R.E.: Depth first search and linear graph algorithms, *SIAM J. on Computing*, Vol.1, pp.146–160 (1972).
3) Aleliunas, R., Karp, R.M., Lipton, R.J., Lovász, L. and Rackoff, C.: Random walks, universal traversal sequences, and the complexity of maze problems, *Proc. 20th Ann. Symposium on Foundations of Computer Science*, pp.218–223 (1979).
4) Broder, A.Z. and Karlin: Bounds on covering times, *Proc. 29th Ann. Symposium on Foundations of Computer Science*, pp.479–487 (1988).
5) Matthews, P.: Covering problems for Markov chain, *Annals of Probability*, Vol.16, No.3, pp.1215–1228 (1988).
6) Brightwell, G. and Winkler, P.: Maximum hitting time for random walks on graphs, *J. Random Structures and Algorithms*, Vol.3, pp.263–276 (1990).
7) Coppersmith, D., Tetali, P. and Winkler, P.: Collisions among random walks on a graph, *SIAM J. on Discrete Mathematics*, Vol.6, No.3, pp.363–374 (1993).
8) Motowani, R. and Raghavan, P.: *Randomized*

Algorithms, Cambridge University Press, New York (1995).

9) Albert, R., Jeong, H. and Barabasi, A.-L.: Internet: Diameter of the World-Wide Web, *Nature*, Vol.401, pp.130–131 (1999).

10) Ikeda, S., Kubo, I., Okumoto, N. and Yamashita, M.: Fair circulation of a token, *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, Vol.13, No.4, pp.367–372 (2002).

(平成 14 年 2 月 4 日受付)
(平成 14 年 6 月 18 日採録)

池田　　諭（正会員）

1995 年広島大学大学院工学研究科後期博士課程修了，博士（学術）．日本学術振興会特別研究員等を経て，1996 年東京農工大学工学部助手．測度論，フラクタル幾何学，および分散アルゴリズムの理論と応用の研究に従事．

品野　勇治（正会員）

1997 年東京理科大学大学院工学研究科博士課程修了，博士（工学）．同年，東京理科大学助手．1999 年東京農工大学講師（現職）．主に，組合せ最適化問題に対する並列・分散アルゴリズムとその実装に関する研究に従事．

中森眞理雄（正会員）

1971 年東京大学工学部計数工学科卒業．1977 年同大学大学院博士課程修了，工学博士．同年，東京農工大学講師，現在，教授．アルゴリズム・ネットワークフロー・数理計画法の理論と応用の研究，情報工学のモデルカリキュラムの策定等に従事．