構造形態を自律的に生成するセルオートマトン

三　井　和　男†

本論文では，構造システムの自己組織化のための単純なモデルとしてのセルオートマトンを用いて，構造形態を最適化するための効率的な方法を提案する．提案する方法は純粋な 0-1 の問題のまま位相最適化問題を解く方法として非常に単純であり，なおかつ多種多様な複雑な位相と形状を表現することができる．この方法では，セルの出現と消滅に関する局所的な規則だけが必要であり，設計感度などを必要としない．本論ではこの手法の有効性が位相最適化の例題により示される．本手法は数理計画手法を用いた古典的方法に起因する困難の大部分を克服し，構造形態最適化への新しいアプローチを提供する．

Autonomous Generation of Structural Form by Cellular Automata

Kazuo Mitsui†

This paper presents an effective method for designing structures using a cellular automata, representing a simple conceptual basis for the self- organization of structural systems. The proposed methods are sufficiently simple to solve topology optimization problems as pure 0-1 problems, and yet sufficiently complex to express a wide variety of complicated topologies. Local rules for the birth and death of cells are all that is required for this method. The effectiveness of the proposed method is demonstrated through numerical topology optimization problem examples. The method proposed in this paper offers a new approach to structural optimization, overcoming most of the problems associated with traditional techniques.

1. はじめに

Xie ら[1] は，構造から効果のない材料をすこしずつ取り除くことによって，構造の形状は最適な形状に向かって進化するという進化的構造最適化の単純な概念を示した．この手法は，たとえば Thompson[2] の「骨格は，力の場との相互作用によって，力の場に対応して変化する」などの自己組織化の考え方をモデル化したものと見ることができる．すなわち力のかからない細胞は少しずつ消滅し，そのような過程を繰り返すことで最終的には，最小限の材料で最大の強度を出す形態を獲得するわけである．しかし，そこには「力のかかる部分は必ず成長して，要求される強度を持つようになる」というメカニズムが含まれていない．

これに対し，著者ら[3)~5)] は成長のメカニズムを含めたモデルをセルオートマトンを用いて表現し，構造形態の最適化への応用を試みた．この手法を構造システムの形態生成のいくつかの問題に適用し，形状最適化問題に対する有効性を示すことができた．セルの出現と消滅に関する単純な局所規則のみを定義することによって構造が自律的に発生するという点において，自身のセルの状態からまず次ステップの状態を決定する伊能ら[6] の手法と大きく異なる．また，この手法[3)~5)] では，目標セルの出現と消滅を決定するために，制御パラメータとして上限応力値 σ^U と下限応力値 σ^L を設定する必要がある．この制御パラメータの値は比較的簡単に設定できるが，それでも数回の試行錯誤が必要な場合もある．

本論では，ニューロンの性質に着想を得たセルの出現と消滅に関する単純な局所規則[7] を提案する．応力の目標値を超えるセルが近傍にあった場合，目標セルにはその近傍セルより一定の入力が与えられ，この入力が目標セルのポテンシャルを増加させると考える．逆に入力がない場合は，ポテンシャルが減衰する．そして，ポテンシャルがある閾値を超えると目標セルに材料が出現するというものである．本論では，このモデルを最小重量問題に適用して，その有効性を示す．

2. 最適化手順

本論において提案する最適化手法の基本的手順は，以下に示す 5 つのうち，(3)，(4)，(5) を繰り返す

† 日本大学生産工学部数理情報工学科
Department of Mathematical Information Engineering, Nihon University

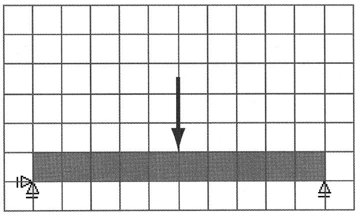


図 1　設計領域と正方格子
Fig. 1　Design domain and square grids.

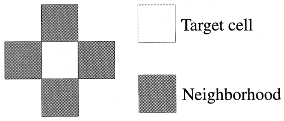


図 2　目標セル（白）と近傍（黒）
Fig. 2　Target cell and neighborhood.

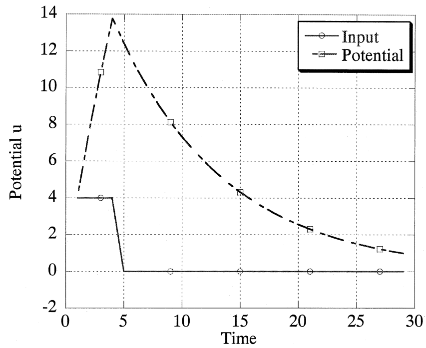


図 3　入力とポテンシャル
Fig. 3　Input and potential.

ものである．

(1)　設計領域を均一な正方格子（セル）に分割する．
(2)　設計領域に支持点と荷重点を含み，荷重を支持点まで伝達する任意の構造システムを設定する．
(3)　構造の応答を評価するために有限要素法を用いて応力解析を行い，各セルの応力を求める．
(4)　(3) で得られた応力をもとに，次の時間ステップにおけるセルの状態，すなわちそのセル上に材料が存在するか否かを決定し，形状を更新する．
(5)　(3) へ戻る．

設計領域を分割することによって得られる正方格子は，セルオートマトンのセルとして，また有限要素解析の要素として用いられる．また，(2) で設定する任意の構造システムとは，たとえば**図 1** のように支持点と荷重点を含んで荷重を支持点まで伝達できるシステムである．さらに，各セルの応力は，等方性材料に対する規準としてしばしば用いられる相当応力（von Mises stress）により評価する．相当応力は次式で表される．

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \qquad (1)$$

この相当応力を基に次の時間ステップにおける材料分布が決定される．このとき，あるセル上に材料が存在するか否かを決定するのに，そのセルの近傍だけに関連した局所的な規則が用いられるのがセルオートマトン法の特徴である．なお，本論では，セルの中央における相当応力を採用する．また，8 自由度矩形平面応力要素[8)]を用いて応力解析を行う．

3. 局 所 規 則

設計領域中の各セルに対して**図 2** に示すような上下左右に隣接する 4 つのセルを近傍とする Neumann 近傍を考える．目標とする応力値 σ^E をあらかじめ設定し，相当応力が σ^E を超えるセルが近傍にある場合には，そのセルから目標セルに入力信号 $+1$ が入力される．その結果，目標セルのポテンシャルには入力信号の合計が加算される．目標セルの相当応力が σ^E を下回る場合は，ポテンシャルには -1 が加算される．

$$u_{k+1} = \lambda u_k + x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ (0 < \lambda < 1) \qquad (2)$$

$$x_0 = \begin{cases} -1 & (\sigma_0 < \sigma^E) \\ 0 & (\sigma_0 \geq \sigma^E) \end{cases} \qquad (3)$$

$$x_i = \begin{cases} +1 & (\sigma_i > \sigma^E) \\ 0 & (\sigma_i \leq \sigma^E) \end{cases} \qquad (4)$$

ここに，u_k，u_{k+1} はそれぞれ離散時間 k，$k+1$ におけるポテンシャル，x_0 は目標セルからの入力，$x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ は近傍セルからの入力である．式 (2) の第 1 項は，入力信号のポテンシャルに対する時間的加算性を意味する．

ポテンシャル u_k は次の時間ステップ $k+1$ に伝播する際，そのまま伝播するのではなく λ 倍することで時間の経過とともに減衰する．第 2 項以降は空間的加算性を意味する．

図 3 は 4 近傍から入力+1 が 4 ステップ続いたときのポテンシャルの変化である．**図 4** に示すようにポテンシャル u と閾値 ε の差 $u - \varepsilon$ がその大きさにかかわらず，$u - \varepsilon \geq 0$ のとき $S = 1$ すなわち材料が出現し，$u - \varepsilon > 0$ のとき $S = 0$ すなわち材料が消滅するとした．これは非線形性を意味する．入出力信号の二値性と上述の空間的加算性，時間的加算性，非線形性の 4 つの基本的性質を有する局所規則である．

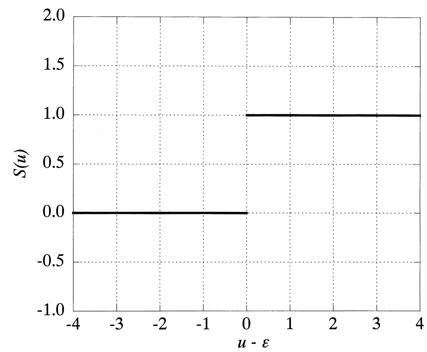


図 4 材料の出現と消滅を決定するステップ関数
Fig. 4 Step function concerned with birth and death.

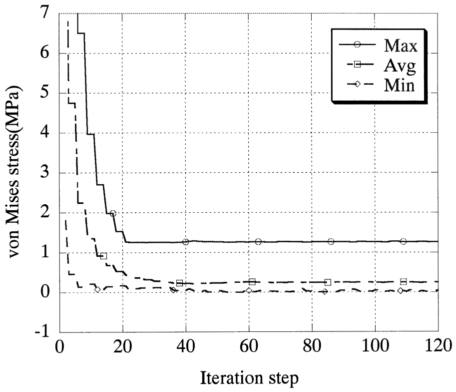


図 6 相当応力の推移
Fig. 6 Histories of von Mises stress.

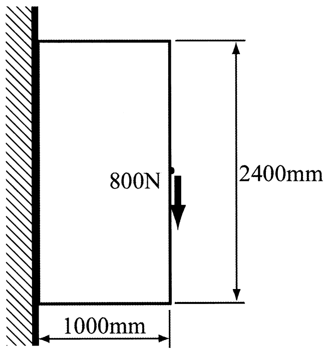


図 5 設計領域と荷重および支持条件
Fig. 5 Design domain, load and support conditions.

4. 最小重量問題への応用

図 5 に示す 1,000 mm × 2,400 mm の設計領域において壁面から 1,000 mm の点に 800 N の荷重を支持する構造システムを上述の局所規則によって生成することを考える．これは構造最適化問題としてよく取り上げられる二部材フレーム問題である[1)]．設計領域は 25 × 60 の正方格子で分割され，初期形状を**図 7** (a) のような片持ち梁とした．ヤング率は 100 GPa，ポアソン比は 0.3，セルサイズは 40 mm × 40 mm，セル厚は 10 mm とし，目標応力値を $\sigma^E = 0.25$ MPa とした．応力解析には，正方格子の 1 つを平面応力要素とする有限要素法を用いた．なお，使用する材料は，たとえば鋼などの線形弾性材料とし，ヤング率とポアソン比でその特性が記述できるものとした．また，座屈などの発生は考慮しない．$\lambda = 0.9$，$\varepsilon = 0$ とした．初期形状では，体積が $8 \times 10^6 \mathrm{mm}^3$ であり，最終形状の $6.50 \times 10^7 \mathrm{mm}^3$ と比較して小さな構造であるが，応力は左側の壁面付近で 31.8 MPa と右端に比較してきわめて高い値となっている．このような初期形状では，非常に不均一な応力状態であることが分かる．理想的にはすべての部分において，ある安全な応力レベルの近傍に応力状態があることが望ましい．

セルの出現と消滅の局所規則として本研究で提案する規則を適用すると，ステップを重ねるごとにセルが出現して梁せいが増大し，やがて (e) のように 1 本の梁が枝分かれし，120 ステップで解析解として知られる (h) のような二部材フレーム構造となる．

図 6 は図 7 の生成過程における相当応力の推移である．本研究で用いるセルの出現と消滅に関する局所規則が，応力の集中する荷重点などは別として，各セルの応力を均衡化し，その平均値を，設定した目標応力値 σ^E 近傍に誘導する働きを持つことが分かる．なお，形態生成の過程では，孤立したセルや孤立したセルの集合が発生する場合があるが，これらのセルの応力は 0 となるため，次ステップ以降でこれらは消滅する．得られた形状では，高さと幅の比がほぼ 2 : 1 となり，Xie ら[1)] の ESO 法による結果とも一致する．**図 8** は，同じ問題で初期形状を図 8 (a) とした場合である．この場合も図 7 (h) と同様の二部材フレーム構造となる．2 つの構造の体積の差は約 5%，応力の平均値の差は約 1%である．

次に，**図 9** に示す 1,000 mm × 500 mm の設計領域を 50 × 25 のセルに分割して，両端を支持して中央に荷重が作用する Michell タイプ構造の生成を考える．ヤング率は 100 GPa，ポアソン比は 0.3，セル厚は 10 mm である．荷重は 10 N，目標応力値 $\sigma^E = 8$ KPa とした．また，$\lambda = 0.9$，$\varepsilon = 0$ とした．この問題は Michell[9)] によって示された最小重量設計問題として有名である．

図 10 は形態生成の過程を示したものである．上から順に，荷重を支持点に伝達する初期形状，20 ステッ

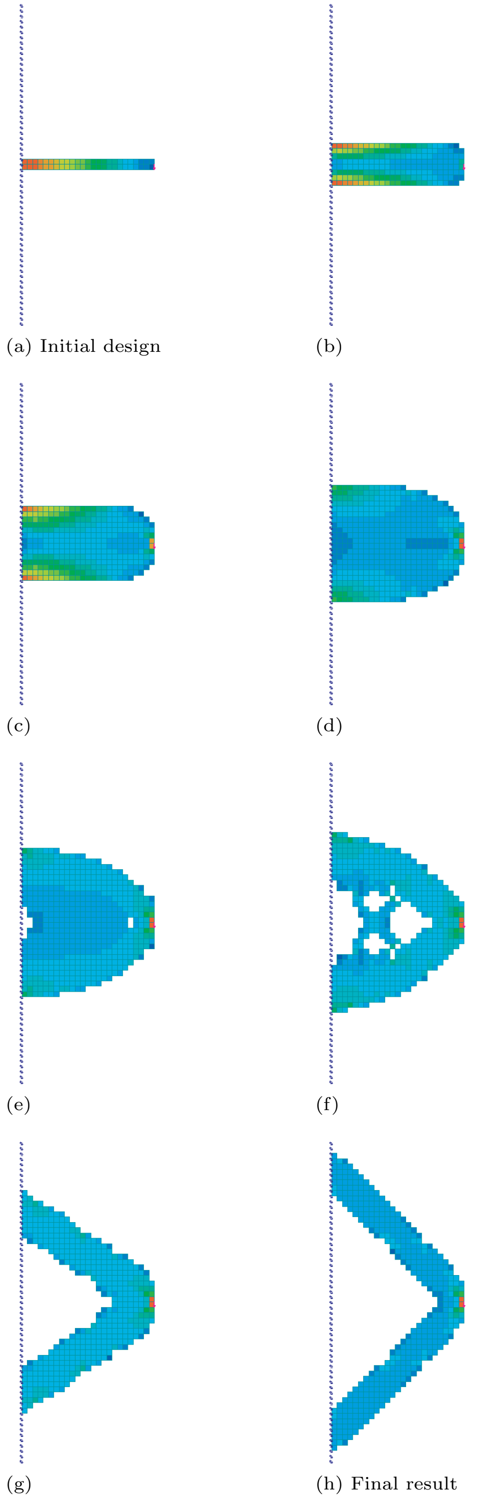


図 7　二部材フレーム構造の生成（1）
Fig. 7　Generation of the two-bar frame structure (1).

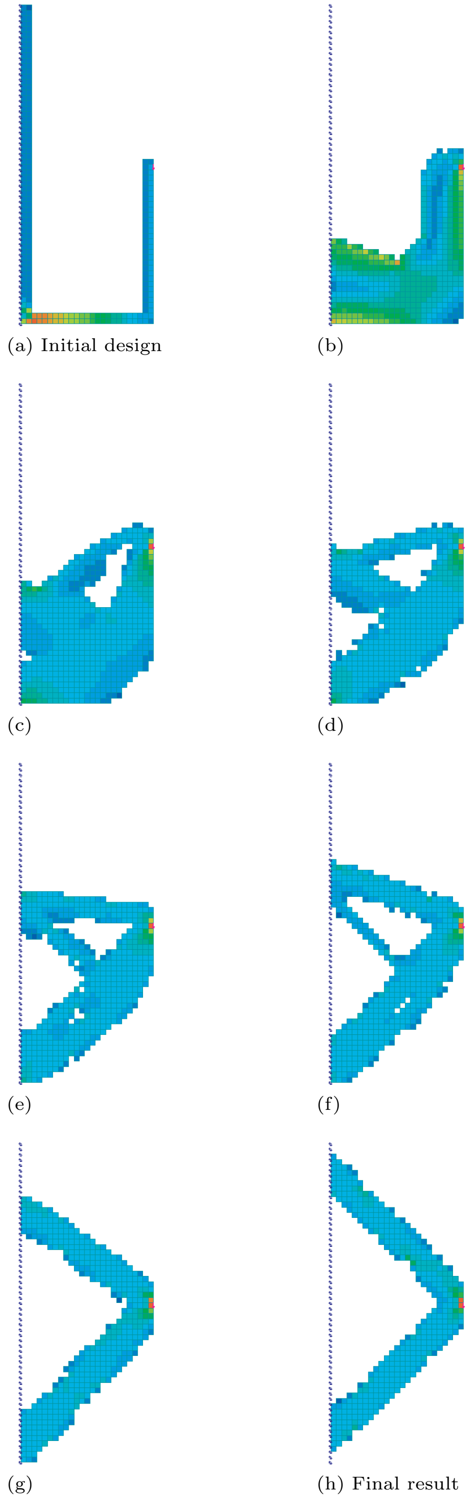


図 8　二部材フレーム構造の生成（2）
Fig. 8　Generation of the two-bar frame structure (2).

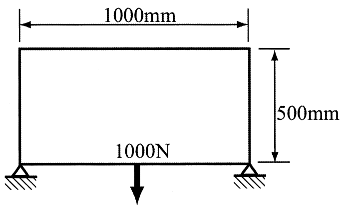


図 9 設計領域と荷重および支持条件
Fig. 9 Design domain, load and support conditions.

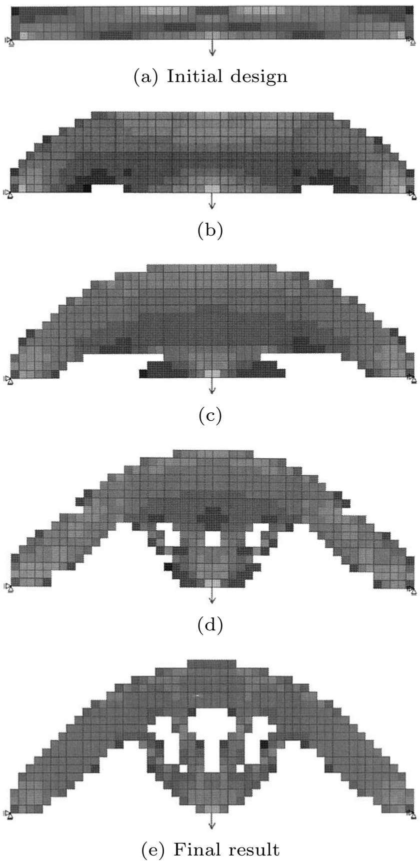


図 10 Michell タイプ構造の生成
Fig. 10 Generation of Michell type structure.

プ，30 ステップ，40 ステップ，50 ステップである．同図に示すように形態を変え，Michell タイプ構造が得られた．**図 11** は生成過程における相当応力の変化を示したものである．同図には，相当応力の変化を最大値，平均値，最小値で示している．ステップを繰り返し形態を変化することで，相当応力が減少し，平均値が目標として設定した 8 KPa にほぼ漸近することが分かる．なお，最大値は応力の集中する荷重点のごく近傍に生じるものである．

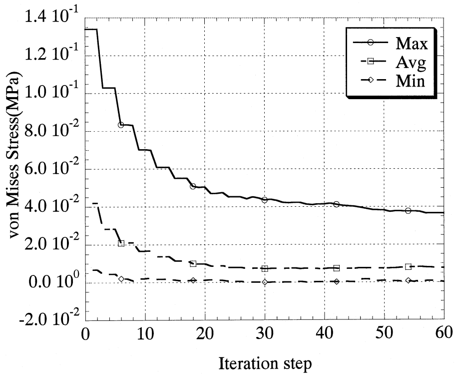


図 11 相当応力の推移
Fig. 11 Histories of von Mises stress.

5. 変位制約のある問題への応用

図 12 に示す片持ち梁を変位制約のある構造の最適設計問題の一例として取り上げる．平面応力状態にあるとして，設計領域を 80×50 の点平面応力要素で均等に分割する．板厚は 1 mm で，ヤング率は 207 GPa，ポアソン比は 0.3 であると仮定する．梁の左端は固定され，右端中央に 3000 N の荷重が作用する．この荷重点における鉛直方向変位が 1 mm 以下で，体積が 5,000 mm^3 以下となる構造形態を探索する問題である．Bendsoe ら[11)] の論文で例題として取り上げられる問題である．

この問題では，前述の相当応力の代わりに式 (5) で与えられる平均コンプライアンスを制御パラメータとして用いることができる．

$$C = \frac{1}{2}\{\mathbf{P}\}^T\{\mathbf{u}\} \tag{5}$$

ここで，$\{\mathbf{P}\}$ は節点荷重ベクトル，$\{\mathbf{u}\}$ は節点変位ベクトルである．i 番目のセル上の要素を除去することによって生じる平均コンプライアンスの増分（これを本論では要素平均コンプライアンスと呼ぶ）は，式 (6) となる．

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\{u^i\}^T[k^i]\{u^i\} \tag{6}$$

ここで，$\{u^i\}$ は i 番目のセル上の要素の要素変位ベクトル，$[k^i]$ は同じく要素剛性マトリクスである．前述の問題で述べたように相当応力を制御パラメータとして用いる場合，本論で用いる局所規則は，各セルの応力を均衡化し，その平均値を設定した目標応力値に誘導する働きを持つ．この問題で平均コンプライアンスを制御パラメータとして用いると，要素平均コンプライアンス α_i を均衡化し，目標の平均コンプライアンスに誘導することが期待できる．目標とする平均コン

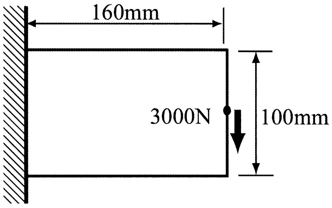


図 12 設計領域と荷重および支持条件
Fig. 12 Design domain, load and support conditions.

プライアンス α^E をあらかじめ設定し，平均コンプライアンスが α^E を超えるセルが近傍にある場合には，そのセルから目標セルに入力信号 $+1$ が入力される．その結果，目標セルのポテンシャルには入力信号の合計が加算される．目標セルの平均コンプライアンスが α^E を下回る場合は，ポテンシャルには -1 が加算される．

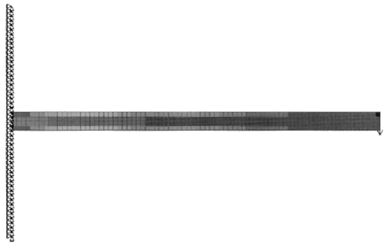
$$x_0 = \begin{cases} -1 & (\alpha_0 < \alpha^E) \\ 0 & (\alpha_0 \geq \alpha^E) \end{cases} \tag{7}$$

$$x_i = \begin{cases} +1 & (\alpha_i > \alpha^E) \\ 0 & (\alpha_i \leq \alpha^E) \end{cases} \tag{8}$$

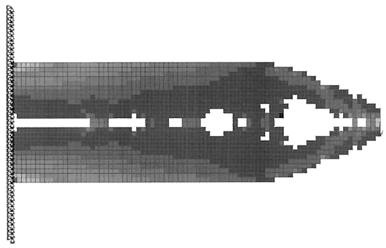
3000 N の荷重が作用するとき，この荷重点における鉛直方向変位が 1 mm であるとすると平均コンプライアンスは 1500 Nmm となり，このとき体積が 5,000 mm^3 の構造物で要素平均コンプライアンスが均衡化しているとすると，α_i の平均値は要素あたり 1.2 Nmm となる．このことから要素平均コンプライアンスの目標値を 1.2 Nmm と設定した．また，$\lambda = 0.9$，$\varepsilon = 0$ とした．

初期形状として，荷重を左端に伝達する任意形状の中から**図 13** (a) に示すように荷重点と支持点を結ぶ直線梁を選択した．図 13 (b) は途中形状であり，図 13 (c) は最終的に得られた形状である．

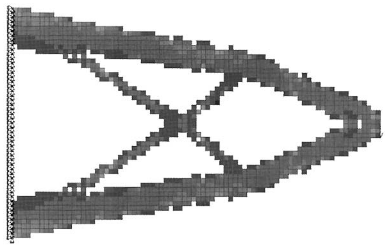
図 14 は，構造の体積と荷重点の変位の変化を示したものである．初期形状では，体積は 1,280 mm^3 で 5,000 mm^3 以下であるが，変位は 450 mm であって制約条件を満たしていない．平均コンプライアンスを制御パラメータとして自律的に形状が変化し，それにともなって体積や変位が変化する様子が分かる．体積は，35 ステップ付近までの初期過程において徐々に増加し，これにより剛性も増加するために変位は次第に減少する．35 ステップ付近を過ぎて体積は減少するが，それでも変位は増加しない．これは，構造が自律的に形状を調節することによって，別のトポロジーを獲得し，体積を減少しても剛性を低下させない，むしろ剛性を増す形状となったためである．71 ステップで目標とする解，荷重点における鉛直方向変位が 0.996 mm で，体積が 4,940 mm^3 となる構造形態を見つけることができた．**図 15** は要素平均コンプライアンスの推移である．要素平均コンプライアンスの平均値は設定した目標値の $\alpha_i = 1.2$ に漸近することが分かる．



(a) Initial design



(b)



(c) Final result

図 13 変位制約のある片持ち梁構造の生成
Fig. 13 Generation of short cantilever with a displacement constraint.

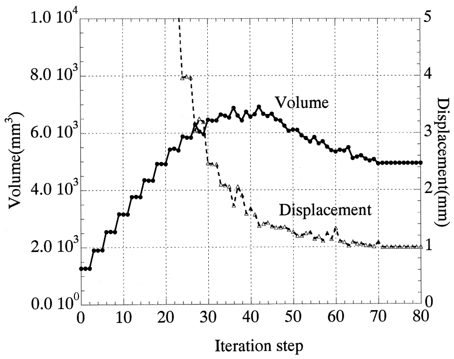


図 14 変位および体積の変化
Fig. 14 Histories of displacement and volume.

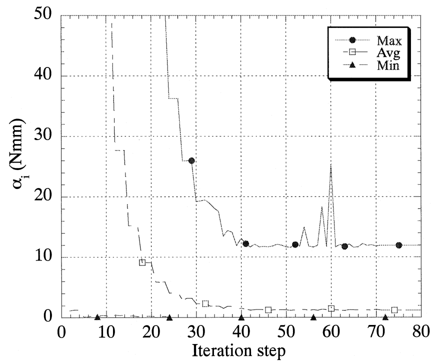


図 15 平均コンプライアンスの変化
Fig. 15 Histories of mean compliances.

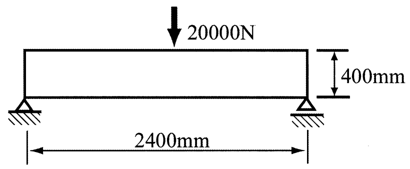
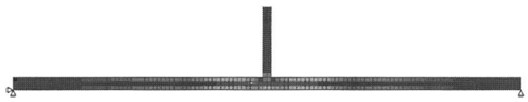
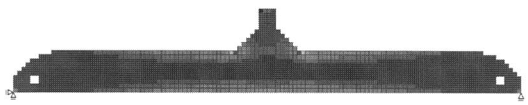


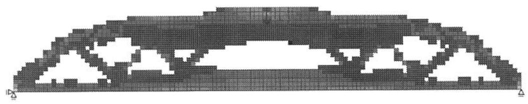
図 16 設計領域と荷重および支持条件
Fig. 16 Design domain, load and support conditions.



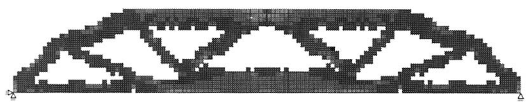
(a) Initial design



(b)



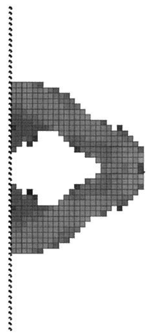
(c)



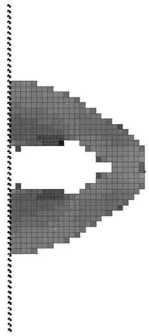
(d) Final result

図 17 MBB 梁構造の生成
Fig. 17 Generation of MBB beam.

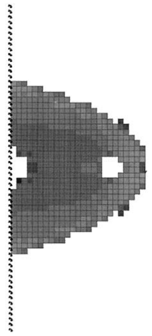
MBB 梁構造と呼ばれる問題を**図 16** に示す．Messerschmitt-Bolkow-Blohm に因んで名づけられたこの問題も，現在では位相最適化の古典的問題となっている[10]．設計領域を 20×120 の平面応力要素で均等に分割する．板厚は 1 mm で，ヤング率は 200 GPa，ポアソン比は 0.3 であるとする．梁の両端は固定され，上部中央に 20000 N の荷重が作用する．この荷



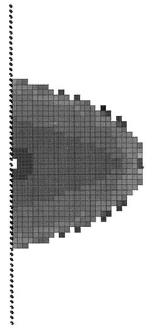
$\lambda = 0.6$



$\lambda = 0.7$



$\lambda = 0.8$



$\lambda = 0.9$

図 18 係数 λ の形態生成に与える影響
Fig. 18 Influence of λ to generating structure.

重点における鉛直方向変位が 10 mm 以下で，体積が $500\times10^3\mathrm{mm}^3$ 以下となる構造形態を探索する問題とした．要素平均コンプライアンスの目標値を 55 Nmm と設定して，**図 17** (a) を初期形状とすると，(b)，(c) のように変化し，64 ステップで図 17 (d) の形状を得ることができた．このとき，体積は $500\times10^3\mathrm{mm}^3$ で，変位は 9.83 mm である．パラメータ λ および ε は，$\lambda=0.9$，$\varepsilon=0$ とした．

6. パラメータの検討

本論で提案した局所規則は，ポテンシャルの増減を材料の出現と消滅に関連付けるものである．したがって，パラメータ λ および ε の設定は，最適解の探索効率に大きな影響を与える可能性がある．ここでは，係数 λ の形態生成に与える影響と収束に与える影響について述べる．**図 18** は図 7 に示した計算例において $\lambda=0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ とした場合の繰返し計算の 15 ステップ目に得られた形態を示している．λ が小さい場合は，過去のポテンシャルの影響が早く減衰するために形態変化が比較的急激に進行するこことが分かる．

図 19 はこの場合の体積の変化を示したものである．10 ステップ付近までは，ほぼ同様に体積の増加が見

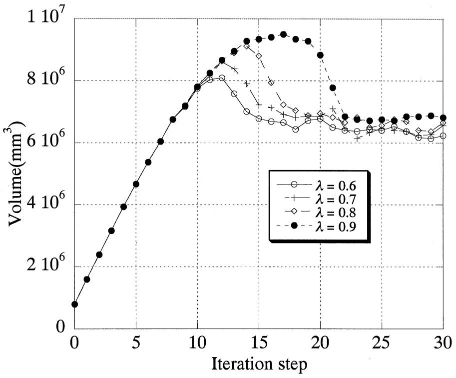


図 19 係数 λ の収束に与える影響
Fig. 19 Influence of λ to convergency.

られる．その後，$\lambda = 0.6$ の場合，$\lambda = 0.7$ の場合，$\lambda = 0.8$ の場合，$\lambda = 0.9$ の場合の順に減少が生じることが分かる．25 ステップ以後はほぼ同様の形態変化を経過して，$\lambda = 0.6$ の場合に 60 ステップ，$\lambda = 0.9$ の場合に 100 ステップ付近で図 7 (h) と同様の二部材フレーム構造となる．$\varepsilon = 0, 1, 2$ の各場合についても計算を行ったが有意の差は現れなかった．この解析例では，パラメータは最終的に得られる構造形態に大きく影響を与えず，λ を小さく設定することで探索効率を向上させることができる．しかし，問題によっては得られる構造形態に影響が大きい場合も予想される．また，多峰性のある問題ではこれらのパラメータをチューニングすることで異なるいくつかの構造形態を探索できる可能性もある．

7. まとめ

セルの出現と消滅に関する単純な局所規則のみを定義することによって，構造が自律的に発生するという自己組織化の持つ本質的な能力を検証することができた．また，この手法を構造システムの形態生成に適用し，形状最適化問題に対する有効性を示すことができた．

設計領域全体に仮定した初期形状から徐々に不要の部分を削除する Xie ら[1] の ESO 法や Bendsoe ら[11]，Suzuki ら[12]，藤井ら[13] の均質化設計法と比較すると計算アルゴリズムが単純であることはもちろんのこと，この手法はたとえば図 7 (a) のような設計領域内の小さな初期形状から計算を開始できるため，計算負荷の小さいことも特徴である．たとえば図 7 の問題は Pentium3 800 MHz で計算すると約 60 秒で (h) の構造形態を得ることができる．また，立方体有限要素を用いた三次元構造の問題では，局所規則を要素に接する 6 近傍に拡張することで本手法を容易に適用することが可能である．さらに，前述の理由により他の手法に比較して計算効率が高いことも予想できる．

非常に単純なアルゴリズムを持つ本手法はここに示した最小重量問題や変位制約のある問題のみならず，振動数に関する最適化問題にも応用することが可能である．この意味においてもパラメータ λ や ε の最適解探索効率に与える影響の検討は重要であり，これは今後の課題である．

参考文献

1) Xie, Y.M. and Steven, G.P.: *Evolutionary Structural Optimization*, Springer-Verlag (1997).
2) ダーシー・トムソン，柳田友道ほか（訳）：生物のかたち，東大出版会 (1981).
3) 三井和男，大久保雅司，登坂宣好：構造システムの自律的生成，計算工学講演論文集，Vol.5, pp.85–86 (2000).
4) 三井和男，登坂宣好：セルオートマトンによる構造システムの自律的生成，日本応用数理学会 2000 年度講演予稿集，pp.90–91 (2000).
5) 三井和男：セルオートマトンによる構造システムの自律的生成と最適化，日本建築学会構造系論文集，No.555, pp.101–105 (2002).
6) 伊能教夫ほか：力学構造物を自己組織化するセルオートマトン，日本機械学会論文集（A 編），Vol.61, No.586, pp.1416–1422 (1995).
7) 三井和男：ニューロンモデルによる構造形態の自律的生成，日本計算工学会計算工学講演会論文集 (2002).
8) Yang, T.Y.: *Finite Element Structural Analysis*, Prentice-Hall (1986).
9) Michell, A.G.M.: The Limits of Economy of Material in Frame-Structures, *Phil. Mag*, No.8, pp.589–597 (1904).
10) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, Part II: Topological, Geometrical and Generalized Shape Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.89, pp.309–336 (1991).
11) Bendsoe, M.P. and Kikuchi, N.: Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197–224 (1988).
12) Suzuki, K. and Kikuchi, N.: A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, pp.291–318 (1991).
13) 藤井大地ほか：均質化設計法を用いた弾性変形機構の位相最適化，日本建築学会構造系論文集，

No.528, pp.99–105 (2000).

(平成 14 年 10 月 30 日受付)
(平成 14 年 12 月 24 日再受付)
(平成 15 年 1 月 9 日採録)

三井　和男（正会員）

昭和 29 年生．昭和 54 年日本大学大学院生産工学研究科修了．平成 6 年より日本大学助教授．ヒューリスティックスを用いたシステム最適化に関する研究に従事．工学博士．日本建築学会，日本機械学会，日本計算工学会，IASS 各会員．