ハミルトニアン・アルゴリズムによる楽音合成

大 矢 健 一†

本論文では，ハミルトニアン・アルゴリズム（HA）を用いた新しい楽音合成技術について紹介する．HA は，最適化問題において解を探索する新たなアルゴリズムである.「ハミルトニアン・アルゴリズムによる楽音合成」という手法においては,「従来の力学系にあるような極小解にトラップされない」という HA の特徴を用い，1 つの楽音波形から他の楽音波形へと移りゆく性質を積極的に利用する．この効果は，従来の力学系モデルからは得られないものであり，HA ならではのまったく新しい楽音を生じさせることができる．

Hamiltonian Algorithm Sound Synthesis

Ken'ichi Ohya†

This paper introduces a new sound synthesis technique using Hamiltonian Algorithm. Hamiltonian Algorithm (HA) is a new algorithm for searching solutions in optimization problems. "Hamiltonian Algorithm Sound Synthesis" utilizes this phase transition effect in HA to produce a waveform of sound which moves from one waveform to another waveform. Because of this transition effect, totally new sound is obtained, compared to a waveform obtained by classic analytical dynamics.

1. はじめに

楽音合成という分野は，コンピュータミュージック研究の中で，つねに主要なテーマであった．楽音合成の歴史は，初期のコンピュータの歴史にまでさかのぼる．コンピュータを用いた最初の楽音合成の実験は，ベル研においてローズらにより 1957 年に始まった[3)]．それは，真空管による巨大な IBM 704 型コンピュータであった．

それ以来，世界中の研究者の間で，さまざまな楽音合成モデルが提案されて研究されてきた．筆者もまた，リカレントニューラルネットワークを用いた新しい楽音合成モデルを研究している[1)]．楽音合成の歴史の中で，最も有名なモデルの 1 つは,「周波数変調による楽音合成」〔FM（Frequency Modulation）合成〕であろう．これは，スタンフォード大学のジョン・チョウニング博士によるものである．このモデルは，ヤマハにより，DX7 という機種のシンセサイザーに適用された，これは大変なヒットになり，音楽シーンを変えるとともに，1980 年代初期の最も有名なシンセサイザーとなった．FM 合成のほかには，加算合成もまた，つねに重要な地位を占めてきた．

その後，1990 年代になり，PCM（Pulse-code modulation）を用いた技術が主流になっていった．PCM の原理は，音を録音してコード化したものを合成に使うというものである．たとえば，ピアノの場合，88 鍵のうちのいくつかだけを録音したデータを用いて，88 鍵すべてを合成する．発音時間が長くなればそれだけデータも多くなるため，この技術はメモリを大量に消費するが，相対的にメモリが安価になってしまうと楽音合成の主流になっていった．

しかしながら，PCM を用いた手法にも問題がある．1 つはユーザのエディット機能であり，もう 1 つは，どこか音が単調になってしまうというものである．この単調さは，サンプリングした音をループさせて使っていることに起因している．

また，1990 年代に実用化されたのが物理モデルによる楽音合成である[7)]．物理モデルとは，楽器を，弦や胴などの個々の要素に分解し，それぞれの要素とそれらによる系とを数式で記述することにより得られる楽音合成の方式である．この方式の特徴は，既存の楽器を忠実にモデル化することにより，その楽器の音色に近づくことができることである．ピアノ・ギターなどの弦楽器，フルートなどの管楽器において，良好な再合成が得られている．物理モデルの弱点としてあげ

† 長野工業高等専門学校電子情報工学科
Department of Electronics and Computer Science, Nagano National College of Technology

られるのは，(1) 計算時間の問題，(2) モデルそのものに起因する問題，(3) 楽音の中の非楽音部分の問題，の３つであると考えられる．物理モデルでは，モデルに忠実であればあるほどモデルが複雑になり，楽音を合成する際の計算時間が増えてしまう．また，既存の楽器を物理モデルとして再合成するには向いている手法であるが，まったく新たな楽音を創造する際には，既存のモデルで十分なのかあるいは新たなモデルを創造しなければならないのか，という問題点が生じてしまう．そしてまた，物理モデルにおける楽音合成で明確になってきたのは，楽音の中の非楽音ともいえるノイズ的な部分の扱いである．これは物理モデルにおいては過渡的現象として扱われる．

一方，近年になり，楽音合成に新たな研究も出てきている．Polotti らは，楽音のノイズ部分と細かなゆらぎとに着目し，バスーン，クラリネット，フレンチホルンなどの再合成において良好な結果を得ている[9]．Robel らは，カオス系で生じるアトラクタを楽音合成に利用し，サックス・フルート・ピアノの楽音合成を行っている[8]．ここで用いているのは擬似周期的なアトラクタである．注目すべき点は，楽音における定常的な調和的な部分と非定常的な部分とを２つに分けるのではなく，同時に扱っていることであり，数理モデルを楽音合成に対して適用する利点の１つとしてあげられる．

本論文では，ハミルトニアン・アルゴリズムを用いた楽音合成を紹介する．この新しい楽音合成は，ハミルトニアン・アルゴリズム（HA）[4),5)]を用いている．ハミルトニアン・アルゴリズムとは，ハミルトニアンを用いた最適化問題のための新しいアルゴリズムである．

ハミルトニアン・アルゴリズムを用いた楽音合成と従来手法との比較であるが，HA は微分方程式により表現され，これらを数値的に解くことにより，音の波形が生成される．音の生成時間には制限はないため，ループというものが存在しない．よって，PCM における「サンプルされた単調さ」という点からは解放されることになる．また，HA が極小値に束縛されないという性質を利用して，音色が遷移するような楽音を生成することが可能となっている．

また，ハミルトニアン・アルゴリズムのような数理モデルを楽音合成に対して適用する利点としては，音の定常部分と非定常な部分とを同時に扱えるという点のほかに，楽音に対する従来の先入観を排除して最初から楽音を構築できる，という点がある．

まず最初に，HA そのものについて簡単に紹介し，そのあと，HA を用いた楽音合成技術について述べる．

2. ハミルトニアン・アルゴリズム

ハミルトニアン・アルゴリズム（HA）とは，ハミルトニアンを用いた，最適問題を解くための新しいアルゴリズムである[5),6)]．HA は，q_i を変数として持つコスト関数である $f(q_i)$ を最小にするように最適解を探索する．一般的に，コスト関数に極小解がたくさん存在するときに最小値を探索するのは難しい．これは，変数の数が多くなればなるほど顕著である．

2.1 “問題空間” と “作業空間”

HA は,「意味空間」と「高次元空間」という言葉で説明される[6)]．意味空間における解は非常に狭い範囲であり，よって，最小値を探すのが非常に困難になってしまう．

一方，HA に特有な高次元空間は仮想的な空間であり，余分な項を付加することにより生じる空間である．ここにおいては，座標は運動量に相当する．

力学系を考えると，意味空間における解の狭い存在範囲は，高次元空間においては以下に示すように非常に拡大される．このため，意味空間において解を探すのが難しい問題であっても，高次元空間においては見つけることが難しくない．

2.2 ハミルトニアン

また，HA では，解析力学などに登場するハミルトニアンを用いる．しかしながら，HA では解析力学とは異なり，以下の式 (1) に示すように γ という項が存在している．ここで，q_i を一般化座標として，その共役量である運動量を p_i とする．

$$H[q_i, p_i] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^{2\gamma} + V[q_i] \qquad (1)$$

式 (1) からすぐに分かるように，$\gamma = 1$ という条件においては，解析力学のハミルトニアンと一致する．この，拡張されたハミルトニアンの式を用いることにより，ある場合において，最適化問題を解くことができることが示されている[4),5)]．

解析力学の場合と同様に，ハミルトニアンから得られる運動方程式は以下のように記述される．

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2)$$

2.3 期待値：τ

さて，ここで，期待値 τ についてもふれておくと，τ は，位相空間内の点が位相空間内の体積 $\prod$ に存在する確率であり，τ は以下のような式で得られる[4)]．

$$\tau \propto M(N)(E - V[q_i])^{N/2\gamma - 1} \prod_{i=1}^{N} \Delta q_i \qquad (3)$$

ここで，$M(N)$ は N に依存する正の定数である（N：変数 q_i の数）．

HA におけるハミルトニアンを使った力学系においては，変数 q_i が系を動くのにつれて，τ は自然に増大していく．これが意味しているのは，位相空間内の点は，最小値を探索しているということである．N が 2 よりかなり大きいか，あるいは，γ が非常に小さいとき，解の場所へいく確率は非常に高くなるが，これは γ を用いている利点である．

2.4 混合効果

また，HA の特徴の 1 つとして，混合効果の性質をあげることができる．これは，ハミルトニアンに混合効果の項を加えることにより実現されている．これにより，HA は極小値に拘束されることなく，全体として評価関数の最小値へと向かうことができる．

3. ハミルトニアン・アルゴリズムによる楽音合成

HA による楽音合成とは，HA を用いて楽音を生成するためのまったく新しいアルゴリズムである．

HA における特徴は 2 つあり，それらは，

(1) 評価関数の最小値へ向かう性質

(2) 混合性の性質

とまとめることができる．式 (1) における γ の導入や式 (3) は前者の性質を示している．

以下，HA を用いた楽音合成について紹介する．

3.1 二重リングポテンシャルを用いた楽音合成の例

HA を用いての楽音合成の 1 つの手法として，HA の持つ「評価関数の最小値へ向かう」という性質を，楽音の定常状態へと向かう性質として考えてみる．たとえば，ピアノにおいては，ハンマが弦を叩いた瞬間からしばらくたつと定常状態になるが，こういう性質に対応させてみる．そして，HA の持つ「混合性の性質」を，定常状態から逸脱させる作用と考えてみる．

この具体的な例として，二重リングポテンシャルを用いて楽音合成を行ってみた．

例として，ポテンシャルを以下のように設定した．

$$V(q_{ix}, q_{iy}) = -3e^{-10(\sqrt{(q_{ix}^2+q_{iy}^2)}-2)^2} - 2e^{-10(\sqrt{(q_{ix}^2+q_{iy}^2)}-3)^2} \qquad (4)$$

これは，**図 1** に示されるように，r 軸方向において 2 つの極小を持っており，横軸は原点からの距離を表す．**図 2** は，図 1 を 3 次元表示したものであり，2 つの谷状のリングがよく分かる．内側のリングは外側のリングより深くなっている．すなわち，内側のリングが最小，外側のリングが極小という関係にある．

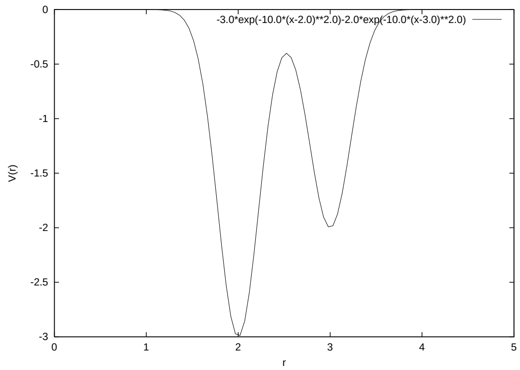

図 1 $V(r)$ のポテンシャル曲線．2 つの谷がある
Fig. 1 Potential curve: $V(r)$. It has two potential valleys.

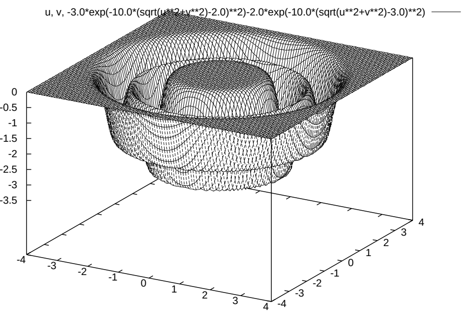

図 2 図 1 のポテンシャル曲線を 3 次元表示したもの
Fig. 2 Potential curve of Fig. 1 in 3D image.

このポテンシャルを用いる目的は,「定常的な最終的には内側のリングに相当する楽音を得たいが，外側のリングにも影響を受けるような楽音を得たい」というものである．

ここで，2 体からなる系を考える．すなわち，この位相空間上において，2 つの点が動きまわることになる．初期値を与えられることにより，2 つの点の動きは決定される．

もし，古典力学系であれば，エネルギーが十分小さいときには，1 つの谷から別の谷への遷移は考えられない．しかし，HA においては，混合効果により，この遷移が起きうる．

HA 楽音合成のこの最初の例は，このポテンシャルの谷から谷への遷移を利用したものであり，楽音合成の結果としては，ある波形から別の波形へと遷移することになる．すなわち，古典力学系では得られない波形を生成することが可能となる．

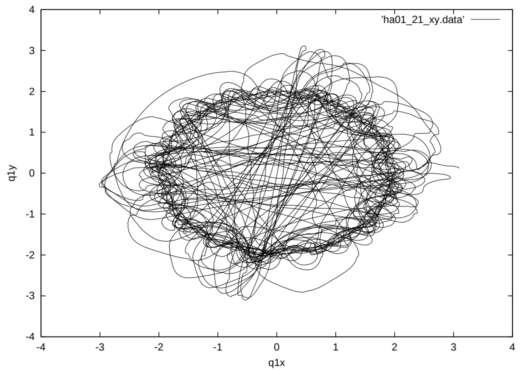

図 3 位相空間における点の軌跡の例 1
Fig. 3 Phase space trajectory: example 1.

この系のハミルトニアンは以下の式で示される．

$$H = \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{2}(p_{ix}^2 + p_{iy}^2)^{\gamma} + V(q_{ix}, q_{iy}) \right\} + V_{12}, \quad (5)$$

$$V_{12} = a \left\{ p_{1x}^{\gamma} p_{2x}^{\gamma} + p_{1y}^{\gamma} p_{2y}^{\gamma} \right\}, \quad (6)$$

ここで，V_{12} は混合効果のための項である．

さて，座標と運動量との初期値をいろいろと与えることにより，2 つの点は位相空間上を動きまわる．

式 (5) のハミルトニアンを用いて，HA を用いて数値計算をする．得られた結果を**図 3** として示す．これは，1 つの点の軌跡であり，図 2 における xy 平面上の軌跡を示したものである．これによって分かるのは，軌跡が最小値付近に多く集まっているものの，その他のところにも動きまわっているということである．これが混合効果である．

図 3 の x 座標のみを取り出したのが**図 4** である．HA を用いたこの楽音合成の手法においては，この図 4 が出力波形となる．混合効果により複雑な波形が得られることが分かる．

また，別の条件における例が，**図 5** と**図 6** とに示されている．この例においては，最小値に束縛されることがほとんどなくなっている．このように，条件を変えることにより，最小値への束縛の程度を変えることが可能となる．

この手法による楽音合成の評価であるが，現状ではまだ音色の制御が難しいという難点がある．得られる楽音の特徴は，基本周波数が定まらず，振幅も揺れが激しい．しかし，物理モデルも当初は基本周波数の制御が困難であったため，音色の制御については，今後の課題となる．既存の楽音合成手法に対するアルゴリズムの優位性としては，計算の容易さ，および，時間的な束縛がない，という点があげられる．ハミルトニアンが決まりさえすれば，あとは単純な微分方程式を数値計算するだけなので，複雑な物理モデルと比較すると計算量が非常に少なくなる．また，PCM の手法ではループを用いるという点で時間的に束縛を受けて

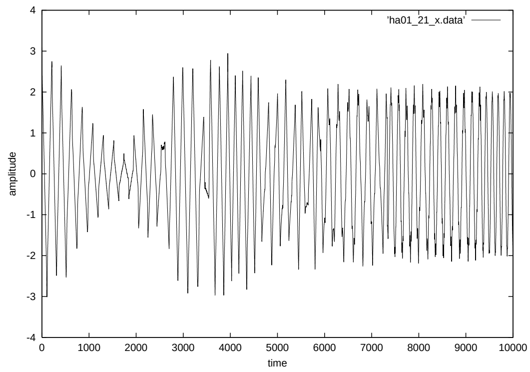

図 4 ハミルトニアン・アルゴリズムによって生成された波形の例 1
Fig. 4 Generated waveform by Hamiltonian Algorithm Sound Synthesis: example 1.

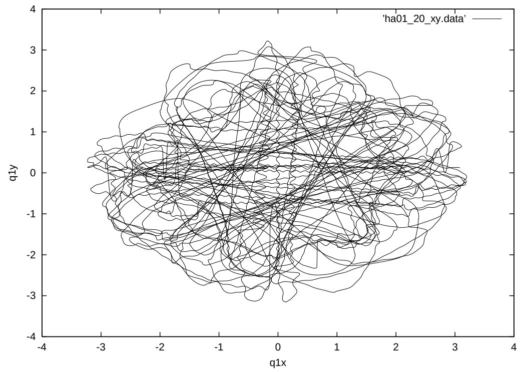

図 5 位相空間における点の軌跡の別の例
Fig. 5 Phase space trajectory: example 2.

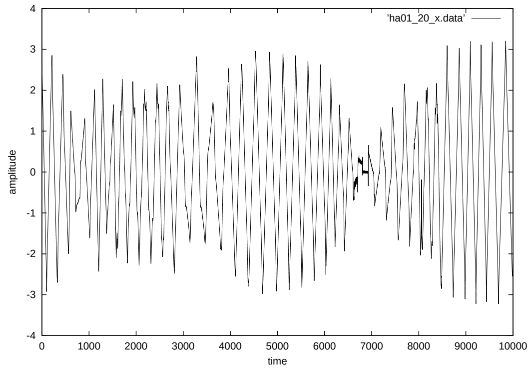

図 6 ハミルトニアン・アルゴリズムによって生成された波形の別の例 2
Fig. 6 Generated waveform by Hamiltonian Algorithm Sound Synthesis: example 2.

しまうが，この手法では時間的な制限がない．現状において本手法に向いていると思われる音色の 1 つとしてあげられるのは，振幅および音高が非常に激しく変化する音色である．

4. ま と め

ハミルトニアン・アルゴリズムを用いた新しい楽音合成技術を紹介した．例として二重リングポテンシャルにおいて，ハミルトニアン・アルゴリズムを適用した楽音合成の例を示した．得られた音色は，振幅および音高が非常に激しく変化する音色であった．今後の課題としては，音色の制御があげられる．

参 考 文 献

1) Ohya, K.: Sound Variations by Recurrent Neural Network Synthesis, *Proc. 1998 International Computer Music Conference*, pp.280–283 (1998).
2) Ohya, K. and Shinjo, K.: Mathematical Models used for Sound Synthesis, *Proc. 2nd ISAAC Congress*, pp.367–373 (2000).
3) Roads, C.: *The Computer Music Tutorial*, *partII* “*Sound Synthesis*”, MIT Press (1996).
4) Shinjo, K. and Sasada, T.: Hamiltonian Systems with Many Degrees of Freedom: Asymmetric Motion and Intensity of Motion in Phase Space, *Phys. Rev.*, Vol.E54, p.4686 (1996).
5) Shinjo, K., Shimogawa, S., Yamada, J. and Oida, K.: Strategy of Designing Routing Algorithms Based on Ideal Routings, *International Journal of Modern Physics C*, Vol.10, pp.1–32 (1999).
6) 新上和正：高次元アルゴリズム，*bit*, 7 月号, pp.2–8 (1999).
7) Smith, J.O.: Physical Modeling Synthesis Update, *Computer Music Journal*, Vol.20, No.2, pp.44–56 (1996).
8) Robel, A.: Synthesizing Natural Sounds Using Dynamic Models of Sound Attractors, *Computer Music Journal*, Vol.25, No.2, pp.46–61 (2001).
9) Polotti, P. and Evangelista, G: Fractal Additive Synthesis via Harmonic-Band Wavelets, *Computer Music Journal*, Vol.25, No.3, pp.22–37 (2001).

(平成 15 年 2 月 3 日受付)
(平成 15 年 6 月 13 日採録)

大矢　健一（正会員）

昭和 63 年東京大学理学部物理学科卒業．同年ヤマハ（株）入社．音楽情報科学に関する研究に従事．平成 4 年 10 月より長野工業高等専門学校電子情報工学科助手．平成 9 年 4 月講師．楽音合成モデルやリズム認知モデル等の音楽情報科学研究に従事．音楽情報科学メーリングリスト主宰．日本音楽知覚認知学会，日本神経回路学会，ICMA 各会員．