4L-4

Minority Gameにおける富の性質*

戸田 皓治† 中村 泰之 †
名古屋大学大学院 情報科学研究科 複雑系科学専攻‡

1 はじめに

市場の原理を解明するため，Challet と Zhang によって，Minority Game(MG)[1] が提案された．これは，それまでの市場モデルに見られる，構造の複雑さの問題を解消した，極度に単純なモデルである．

そして，オリジナルのモデルに価格決定公式を導入した，いわゆる人工市場としての MG は，リターンの fat tailed distribution や volatility clustering といった，現実の金融市場で見られる極めて重要な特徴 (stylized fact) を再現し，注目を集めている．

また，MG の研究現状に加え，最近の経済物理学の分野での研究により，日本における富の分布が明らかになった [2]．これによると，富 (所得) の分布は高額側で冪分布になるという事実に加え，その傾きを表す Pareto 指数が，ある値の付近で揺らいでいるという興味深い事実が報告されている．

本研究では，オリジナルの MG[1] と我々が先行研究 [3] で用いたモデル，及び Jefferies らの論文 [4] で用いられている，より現実的なモデルの 3 つを対象に，それらの富に着目した比較を行う．

2 モデル

2.1 モデル 1 −オリジナルのモデル

N 人のエージェントが，それぞれ独立に 2 つの選択肢のうちからどちらか一方を選ぶ．一般に，市場モデルを考えたとき，この 2 つの選択肢を売り買いとする．その結果，少数派の選択を取った方が勝ちとなり，報酬として一定の得点をもらう．詳細は省くが，エージェントは，履歴と呼ばれる過去 M 回の少数派の記録と，特定の履歴が与えられたときに次の行動を指定する，S 個の戦略を元に行動する．

2.2 モデル 2 −投資を導入したモデル

我々が先に行った研究では，前述のオリジナルのモデルに，投資という概念を導入した．時刻 t でのエージェント i の富を $w_i(t)$ とすると，各時刻でそれぞれのエージェントは，自分の持っている富の一定の割合 $0 < r < 1$ だけ投資を行う．すなわち，投資する量を $w_i^I(t)$ とすると，$w_i^I(t) = r \times w_i(t-1)$．そして，時刻 t での投資された量の合計値を $w^S(t)$，このときの勝ち側のプレーヤーが投資した量の合計値を $w^M(t)$ とおき，プレーヤー i の報酬を，$w_i^R(t) = w^S(t) \times w_i^I(t)/w^M(t)$ で定義する．負けたエージェントに関しては，$w_i^R(t) = 0$ である．したがって，時刻 t でのプレーヤーの富は，

$$w_i(t) = w_i(t-1) - w_i^I(t) + w_i^R(t). \tag{1}$$

2.3 モデル 3 −人工市場としての MG

2.2 のモデルに加えて，人工市場を考えるに当たって，決定的に不可欠な要素である，価格決定のメカニズムを導入する．これは，選択肢を，例えば株を売るか買うかといったものにしたとき，その株の価格のダイナミクスを定義するということである．

まず，上記のように取り引きの対象の価値を考えるため，エージェントは必然的に次の 2 つの資産を所持することになる．それは，取り引きの対象であるリスク資産と呼ばれる資産 $\mathcal{S}$ と，リスク資産を買うために必要な無リスク資産 $\mathcal{M}$ である．ここで，リスク資産の価格を p とおくと，エージェントの富は，

$$C = \mathcal{M} + \mathcal{S} \cdot p. \tag{2}$$

次に，エージェント i の資産 $M_i(t), S_i(t)$ の時間変化を次のように定義する．まず，エージェント i が時刻 $t+1$ で，買い操作を取った場合の資産変化は，

$$\begin{cases} \mathcal{M}_i(t+1) = \{1 - rp(t+1)/p(t)\}\mathcal{M}_i(t), \\ \mathcal{S}_i(t+1) = \mathcal{S}_i(t) + r\mathcal{M}_i(t)/p(t), \end{cases} \tag{3}$$

となる．一方，売り操作を取った場合は，

$$\begin{cases} \mathcal{M}_i(t+1) = \mathcal{M}_i(t) + r\mathcal{S}_i(t)p(t+1), \\ \mathcal{S}_i(t+1) = (1-r)\mathcal{S}_i(t). \end{cases} \tag{4}$$

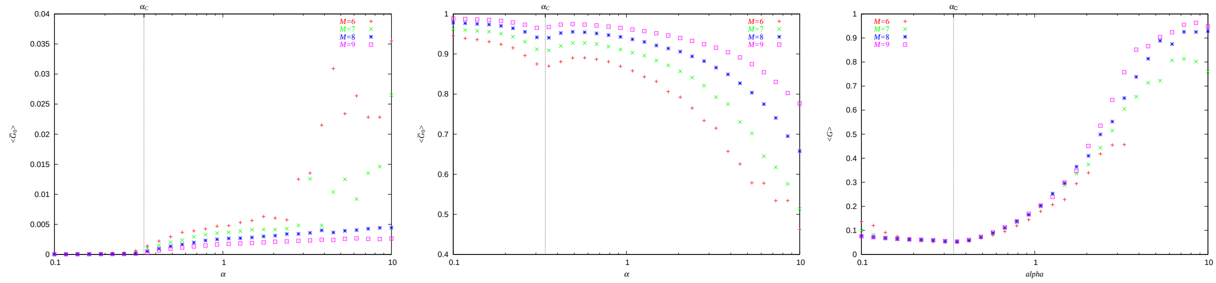
この式からわかるように，買い手 (売り手) は自分の持つ無リスク (リスク) 資産の量を基準に，リスク資産をどれだけ買う (売る) かを決め，買い (売り) 注文を出す．

次に，価格の更新は，以下のように行う．

$$p(t+1) = p(t)e^{\{Buys(t) - Sells(t) - S_M(t)\}/\lambda} \tag{5}$$

ただし，$Buys(t)$ は買い注文の総数，$Sells(t)$ は売り注文の総数である．また，一般に，$S_M(t)$ はマー

*Property of wealth in Minority Game
†Koji Toda, Yasuyuki Nakamura
‡Graduate School of Information Science, Nagoya University



(a) モデル 1　　(b) モデル 2　　(c) モデル 3

図 1: それぞれのモデルにおける α と gini 係数のグラフ

ケットメーカーの在庫に当たり，価格の変化を調節する役割を持つ．また，λ は流動性と呼ばれる量である．

3　結果

3.1　Gini 係数

それぞれのモデルにおける，Gini 係数の値を $\alpha = 2^M/N$ を横軸として，図 1 にプロットする．ここで，$S = 2$ とする．(a) と (b) に関しては，平衡状態に入ったと考えられる $t = 50P$〜$100P$ までの Gini 係数の時間平均を，100 回のシミュレーションにより平均化している．しかし，(c) の価格を導入したモデルでは，どの場合も価格 p が安定せず，平衡状態が存在しない．このため，$t = 100P$ での値を，100 回のシミュレーションにより平均化することにした．

MG では，α_C と呼ばれる臨界点を境にシステムの振る舞いが変化したり，その付近で特徴的な現象が見られる場合が多い．今回の図を見てみると，(a) では α_C を境に Gini 係数が急激に増加し，(b) では α_C で極小値をとっている．また，(c) では，α_C において gini 係数が最小値をとっていることがわかる．

3.2　富の分布

モデル 2,3 の富の分布を図 2,3 に示す．ただし，どちらも $M = 8, S = 2$ として，図 2 は $t = 100P$，図 3 が $t = 400P$ における富の分布を，それぞれプロットしている．図 3 が，高額側においてきれいな冪になっているのがわかる．

4　まとめ

本研究では，単純なエージェントベースのモデルである MG を含め，それを元にした 3 つの異なるモデルを対称に，富の性質の比較を行った．

結果，オリジナルのモデルにおいては，平衡状態における Gini 係数の値が極端に低く，どのパラメータ領域においても非現実な結果となった．逆に，投資を導入したモデルでは，gini 係数の値は現実の値に対して，比較的高くなっている．また，平衡状態

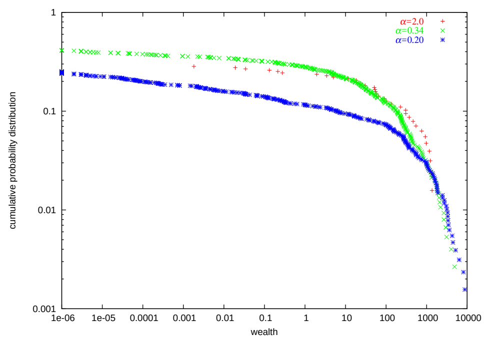


図 2: モデル 2 における富の累積確率分布

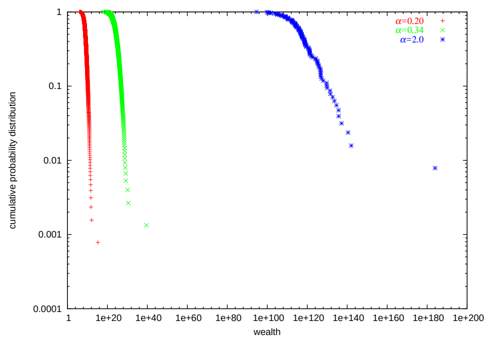


図 3: モデル 3 における富の累積確率分布

に至る過程において，富の分布が高額側において冪になることはあったが，最終的な分布をみると，指数的になっている．最後に，価格を導入したモデルでは，平衡状態を扱うことはできなかったが，どの時刻においても安定した冪的な分布が得られた．

参考文献

[1] D. Challet, Y. C. Zhang, Physica A 246 (1997) 407-418.

[2] 青山秀明, 相馬亘, 藤原義久, 数理科学 No.472 (2002) 44-50.

[3] 戸田皓治，中村泰之，情報処理学会論文誌「数理モデル化と応用」，掲載予定．

[4] P. Jefferies et al, Eur. Phys. J. B 20, 493-501 (2001)