

1次元空間における固定半径ランダムグラフの連結性の理論解析

能代 愛[†] 吉川 毅^{††} 栗原 正仁^{††}

近年、ランダムグラフモデルの1つである固定半径モデルが着目されている。これは、固定半径モデルが近年注目されている無線ネットワークと明確な関係があるためである。固定半径モデル $G = G(n, R)$ は、ユークリッド空間上に何らかの分布に従って n 個の頂点をランダムに配置し、距離が R 以内である2頂点間に辺を生成するグラフであり、これは半径 R 以内であれば互いに通信可能であるような n 個のモバイル端末がランダムに分布しているシステムとして、自然に数理モデル化できる。このような応用を想定して、固定半径モデルのグラフが連結グラフである確率に興味を持たれている。本論文では、ユークリッド空間を1次元に限定し、従来の固定半径モデル(固定半径自由直径ランダムグラフモデル)と、本論文で新たに定義した固定半径固定直径ランダムグラフモデルの各グラフが連結グラフである確率を理論的に求める。

Analysis for Connectivity of Fixed Radius Random Graph with the One-dimensional Uniform Distribution

AI NOSHIRO,[†] TAKESHI YOSHIKAWA^{††} and MASAHITO KURIHARA^{††}

Recently, a class of random graph models called the Fixed Radius Model has been received much attention because of its clear relationship with a kind of state-of-the-art wireless communication networks. In the Fixed Radius Model $G = G(n, R)$, each random graph is defined by n nodes placed randomly in the Euclidean plane according to some distribution; each pair of nodes is connected by an edge if and only if the distance between the nodes is within the common radius R . Hence the model can be naturally interpreted as a mathematical model of wireless communication networks in which every mobile node can communicate with other nodes within the distance R . In this paper, we present some analytical results concerning the probability of such random graphs being connected, assuming that the fixed number of nodes are distributed in one-dimensional space according to the uniform distribution. More precisely, we first present the results for the Fixed Radius Fixed Diameter Model developed in this paper and then use them to analyze the conventional, Fixed Radius Free Diameter Model.

1. はじめに

ランダムグラフ $G = G(V, E)$ とは、頂点の集合 V と辺の集合 E が、何らかのランダムなメカニズムに従って生成されるようなグラフの総称である。生成メカニズムで最もよく知られ、広く研究されているものは、ベルヌーイモデル $G = G(n, p)$ と呼ばれ、 n と p が与えられたときに、任意の2頂点間に確率 p で辺が存在するような頂点数 n のグラフを生成する。このモデルについてはかなりの理論的成果が得られている^{1)~3)}。

本論文では、近年着目され始めている固定半径モデル $G = G(n, R)$ を扱う。このモデルでは、ユークリッド空間上に何らかの分布に従って n 個の頂点をランダムに配置し、距離が R 以内である2頂点間に辺を生成する。ユークリッド空間の次元は通常1, 2, または3が想定されている。頂点の分布をどう仮定するか、また、ランダムグラフのどのような性質を調べかなどによって、様々な研究テーマがありうる。

固定半径モデルが注目されてきた大きな理由は、近年注目を受け始めているある種の無線ネットワークと明確な関係があるためである。半径 R 以内であれば互いに通信可能であるような n 個のモバイル端末がランダムに分布しているシステムは固定半径モデル $G = G(n, R)$ として自然に数理モデル化できる。もちろん、現実のシステムでは、 R は時間や位置やその他の環境要因に依存して様々に変化するのである

[†] 北海道大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Hokkaido University

^{††} 北海道大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

が、このようなシステムの基本的な性質を調べるために、 R を固定して綿密に調べることは応用的にも有益な情報を提供しうる。

このような応用を想定して、固定半径モデルの解析対象として、ランダムグラフが連結グラフである確率に興味を持たれている。すなわち、上記の無線ネットワークの言葉で述べれば、これは端末が通信の転送機能を持っているときに、任意の端末間に通信経路が存在する確率ということになる。本論文の解析対象もこの確率である。

解析方法としては、シミュレーションと理論解析がある。前者は、モデルの仮定に従って乱数を用いてグラフを生成するモンテカルロ・シミュレーションで、明らかに、何らかの近似解が数値的に得られる点の実用的である。一方、後者は確率論に基づく数理的な解析手法であり、一般に解析は困難だが、いったん結果が得られれば、それは記号的な表現による厳密解であり、現象の基本的な理解につながるが多く、シミュレーション結果を説明し、より現実的な環境を想定したシミュレーションコストの削減に役立つ。たとえば本論文では、ある前提のもとでランダムグラフが連結グラフである確率が、ある 2 つのパラメータの比 R/L に関して (頂点数-2) 次の区分多項式 (スプライン関数) で表されることを導いているのだが、その結果は、シミュレーション結果を多項式補間することの妥当性の根拠となり、パラメータの値の多数の組合せに対するシミュレーションを不要とするのに役立つだろう。

このような考えから、本論文では固定半径モデルの理論解析を取り扱う。しかし、固定半径モデルの一般的な理論解析は困難であり、世界的レベルで現在進行中の研究課題の 1 つとなっているため、当面は、部分的な研究課題を解決することに集中せざるをえない。そこで、本研究ではユークリッド空間を 1 次元に限定する。この場合、ランダムグラフが連結グラフであることは、隣り合うすべての 2 頂点間の距離が R 以内であることと同値となる。これは無線ネットワークへの応用としてもそれなりに意味のあるもので、たとえば、砂漠や山中にある長い一本道や高速道路のような擬似 1 次元ともいえる環境の近似として使うことができる。また、理論的には 2 次元モデルの研究における特殊ケースとして 1 つの知見となりうる。

固定半径モデルに類似したポアソンモデル $G = G(\lambda, R)$ では、すでに興味深い解析結果が得られている^{4)~7)}。このモデルは半径 R 以内の 2 頂点間に辺を生成するところは固定半径モデルと同じだが、頂点

は空間内の任意の点において、与えられた固定強度 λ のポアソン点過程に従ってランダムに生成する点で異なっている。この場合、頂点数 n は λ に依存する確率変数となる。特に 1 次元空間の場合には、頂点の発生過程はよく知られたパラメータ λ のポアソン過程に一致し、与えられた区間内の頂点数 n はポアソン分布に従い、隣接した頂点間の距離は平均 $1/\lambda$ の互いに独立な指数分布として陽に与えられるので、比較的解析が容易になっている。

本論文では、あくまでも当初の定義に従い、半径 R とともに頂点数 n も固定されたモデルを扱い、頂点が一樣分布する仮定のもとで解析することを目的としたい。ここで問題となるのが、頂点が分布する 1 次元空間の領域である。区間 $[-\infty, +\infty]$ の範囲に一樣分布するという仮定は、確率密度が $f(x) = 0$ となるので数学的に意味がない。そこで本論文では、ランダムグラフの直径 L もパラメータとして与えるモデルを導入する。グラフの直径とは最も離れた 2 頂点間の距離である。すなわち、このモデルでは L だけ離れた位置に 2 つの頂点を事前に置き、その内部に n 個の頂点を一樣分布に従ってランダムに配置することによって、 $n+2$ 頂点のランダムグラフを生成する。このモデルを固定半径固定直径ランダムグラフモデルと呼び、 $G = G(n, R, L)$ と書くことにする。これに対して、従来の固定半径モデルを固定半径自由直径ランダムグラフモデルと呼ぶことにし、 $G = G(n, R)$ と表記する。

次章以降の本論文の構成は次のようになっている。2 章では、固定半径固定直径ランダムグラフモデルを正式に定義し、固定半径自由直径ランダムグラフモデルについて説明する。3 章では固定半径固定直径ランダムグラフが連結グラフである確率の満たすべき再帰的な積分方程式を導き、小さな n の値 ($n = 1, 2$) に対してこの方程式の解を陽に求めるとともに、一般の n に対して、解は R/L に関する n 次の区分多項式となり、そのつなぎ目においては $n-1$ 階微分まで連続であることを示す (このような性質を満たす区分多項式は一般に n 次のスプライン関数と呼ばれている)。また、この区分多項式の係数を数列の計算として漸化的に求めるための方法を示す。さらに、固定半径固定直径ランダムグラフモデルの結果を用いて、固定半径自由直径ランダムグラフモデルの解析解を示す。4 章で、本研究の成果と今後の課題を簡潔にまとめる。

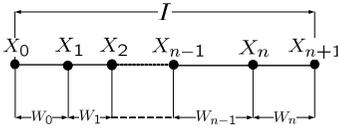


図1 固定半径固定直径ランダムグラフモデル
Fig.1 The fixed radius fixed diameter model.

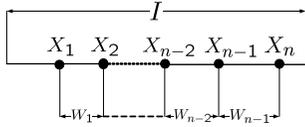


図2 固定半径自由直径ランダムグラフモデル
Fig.2 The fixed radius free diameter model.

2. ランダムグラフモデル

2.1 固定半径固定直径ランダムグラフモデル

本論文では、1次元空間に頂点が一様分布し、半径 R 、頂点数 n が固定されたモデルを扱う。固定半径固定直径ランダムグラフモデル $G = G(n, R, L)$ (図1) では、ランダムグラフの直径 L も固定する。グラフの直径とは最も離れた2頂点間の距離である。このモデルでは、1次元空間上で L だけ離れた位置に2つの頂点を事前に置き、その内部に n 個の頂点を一様分布に従ってランダムに配置することによって、 $n + 2$ 頂点のランダムグラフを生成する。

頂点の存在区間 $I = [0, L] = \{x | 0 \leq x \leq L\} (L > 0)$ とし、配置された頂点の位置を左から X_0, X_1, \dots, X_{n+1} とする。区間 I の内部 ($0 < x < L$) には、 n 個の頂点が一様に分布する。

$$P_R\{X_i \leq x\} = \frac{x}{L} (1 \leq i \leq n, 0 \leq x \leq L). \quad (1)$$

また各頂点間距離を W_0, W_1, \dots, W_n とする。

$$W_i = X_{i+1} - X_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

以下では、位置 X_i にある頂点を X_i という名称で呼ぶ。

2.2 固定半径自由直径ランダムグラフモデル

固定半径自由直径ランダムグラフモデル $G = G(n, R)$ (図2) は、頂点数 n と半径 R が固定されており、頂点の存在区間 $I = [0, L] = \{x | 0 \leq x \leq L\} (L > 0)$ の内部 ($0 < x < L$) に、 n 個の頂点が一様に分布したモデルである。固定半径固定直径ランダムグラフモデルと異なる点は、区間 I の両端に頂点が存在しないこと、すなわちグラフの直径が固定されていないことである。その他の定義については、固定半径固定直径ランダムグラフモデルと同じとする。

隣り合うすべての2頂点間距離が半径 R 以内であれば、ランダムグラフは連結グラフである。固定半径

固定直径ランダムグラフモデルおよび固定半径自由直径ランダムグラフモデルが連結グラフである確率を次章で求める。

3. 解析

3.1 固定半径固定直径ランダムグラフモデル

3.1.1 積分による解の漸近的表現

すべての頂点間距離 W_0, \dots, W_n の最大値を W とする。

$$W = \max\{W_i | 0 \leq i \leq n\}. \quad (3)$$

頂点 X_0 と頂点 X_{n+1} が連結である確率 $P_n(L)$ は、 W が R 以内となる次のような確率で表すことができる。

$$P_n(L) = P_R\{W \leq R\}. \quad (4)$$

なお、式(4)は W の分布関数なので、 $F(R)$ のように R を変数として表現するのが一般的であるが、以下では R を固定、 L, n を可変にして再帰的な関係式を導出するので、 $P_n(L)$ と表記する。

$n = 0$ のとき、すなわち両端の頂点しか存在しない場合、式(4)が次のようになるのは自明である。

$$P_0(L) = \begin{cases} 1 & (0 < L \leq R) \\ 0 & (R < L). \end{cases} \quad (5)$$

また、一般の n に対して、 $0 < L \leq R$ のときも次の自明な式が成り立つ。

$$P_n(L) = 1 \quad (0 < L \leq R). \quad (6)$$

したがって、以下では $n \geq 1$ かつ $R < L$ の場合を考える。 n 個の頂点 X_1, \dots, X_n が I 上の区間 $Z = \{q | 0 \leq q \leq x\}$ 内に存在するときに $X_n \leq x$ となるので、 X_n の分布関数は次のように表せる。

$$F_n(x) = P_R\{X_n \leq x\} = \left(\frac{x}{L}\right)^n. \quad (7)$$

この式を微分することにより X_n の確率密度関数 $f_n(x)$ が次式のように求められる。

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{L^n}. \quad (8)$$

$X_n = x$ の条件のもとで、 X_0 と X_n が連結である確率は $P_{n-1}(x)$ 、 X_n と X_{n+1} が連結である確率は $P_0(L - x)$ である。したがって、両端の頂点 X_0 と X_{n+1} が連結である確率は次のような再帰的な式で表せる。

$$\begin{aligned} P_n(L) &= \int_0^L P_{n-1}(x)P_0(L-x)f_n(x)dx \\ &= \int_{L-R}^L P_{n-1}(x)f_n(x)dx. \end{aligned} \quad (9)$$

頂点 X_n と X_{n+1} の頂点間距離が R 以上、すな

わち, $0 \leq x < L - R$ のとき, 確率 $P_0(L - x)$ は 0 になるので, 式 (9) の積分区間のみを考えればよい. $f_n(x)dx$ は $X_n \in [x, x + dx]$ となる確率を表している. x の値によって場合分けした排反事象の和の確率を式 (9) の積分で表現している.

ここで長さの単位を R と考え, L のかわりに s, x のかわりに t という変数を導入する. すなわち,

$$L = sR, x = tR. \quad (10)$$

さらに, $P_n(L)$ のかわりに次の $T_n(s)$ を導入する.

$$T_n(s) = \frac{s^n}{n!} P_n(sR). \quad (11)$$

式 (9) を用いて, これを変形すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \frac{s^n}{n!} \int_{s-1}^s P_{n-1}(tR) f_n(tR) d(tR) \\ &= \frac{s^n}{n!} \int_{s-1}^s \frac{(n-1)!}{t^{n-1}} T_{n-1}(t) \frac{n(tR)^{n-1}}{(sR)^n} R dt \\ &= \int_{s-1}^s T_{n-1}(t) dt \quad (n \geq 1, s > 1). \end{aligned} \quad (12)$$

$0 < s \leq 1$, すなわち $0 < L \leq R$ のとき, 式 (6) より,

$$T_n(s) = \frac{s^n}{n!} \quad (n \geq 1, 0 < s \leq 1). \quad (13)$$

$n = 0$ のとき, 式 (5) より,

$$T_0(s) = \begin{cases} 1 & (0 < s \leq 1) \\ 0 & (1 < s). \end{cases} \quad (14)$$

式 (12), (13), (14) より, $T_n(s)$ を漸化的に求めることができる. 以下に例として $T_1(s), T_2(s)$ を求める.

• $n = 1$ のとき

$$T_1(s) = \int_{s-1}^s T_0(t) dt. \quad (15)$$

(1) $0 < s \leq 1$ のとき

式 (13) より,

$$T_1(s) = s.$$

(2) $1 < s \leq 2$ のとき

$0 < s - 1 \leq 1 < s$ なので, 式 (15) の積分区間 $[s - 1, s]$ 内に $t = 1$ が含まれ, 式 (14) から分かるように, その前後で $T_0(t)$ の式が異なることに注意して積分する.

$$\begin{aligned} T_1(s) &= \int_{s-1}^1 1 dt + \int_1^s 0 dt \\ &= 2 - s. \end{aligned}$$

(3) $2 < s$

$$T_1(s) = \int_{s-1}^s 0 dt = 0.$$

以上より,

$$T_1(s) = \begin{cases} s & (0 < s \leq 1) \\ 2 - s & (1 < s \leq 2) \\ 0 & (2 < s). \end{cases} \quad (16)$$

• $n = 2$ のとき,

$$T_2(s) = \int_{s-1}^s T_1(t) dt. \quad (17)$$

$T_1(t)$ は $t = 1, 2$ を境に式が変わることに注意して積分する.

(1) $0 < s \leq 1$ のとき

式 (13) より,

$$T_2(s) = \frac{1}{2} s^2.$$

(2) $1 < s \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} T_2(s) &= \int_{s-1}^1 t dt + \int_1^s (2 - t) dt \\ &= -\frac{3}{2} + 3s - s^2. \end{aligned}$$

(3) $2 < s \leq 3$ のとき

$$\begin{aligned} T_2(s) &= \int_{s-1}^2 (2 - t) dt + \int_2^s 0 dt \\ &= \frac{9}{2} - 3s + \frac{1}{2} s^2. \end{aligned}$$

(4) $3 < s$ のとき

$$T_2(s) = \int_{s-1}^s 0 dt = 0.$$

以上より,

$$T_2(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} s^2 & (0 < s \leq 1) \\ -\frac{3}{2} + 3s - s^2 & (1 < s \leq 2) \\ \frac{9}{2} - 3s + \frac{1}{2} s^2 & (2 < s \leq 3) \\ 0 & (3 < s). \end{cases} \quad (18)$$

3.1.2 $T_n(s)$ の特徴

式 (18) より, $T_2(s)$ は s に関して 2 次の区分多項式であること, s の区間の境界において連続であること, 微分可能であることが確かめられる. これは, 頂点数 n についても一般的にいえるので, 以下に示す. 定理 3.1. $s = 0, 1, \dots, n, n + 1$ を境界点とする s の各区間 $(0, 1], (1, 2], \dots, (n, n + 1]$ において, $T_n(s)$ は s の n 次多項式で表され, $n + 1 < s$ のときは $T_n(s) = 0$ である.

証明. 数学的帰納法により証明する.

$n = 0$ のときは式 (14) より自明である.

$n \geq 1$ のとき, $T_{n-1}(s)$ について定理が成り立つと仮定する. $0 < s \leq 1$ の区間では式 (13) より, $T_n(s)$

は s の n 次多項式になっている. $n + 1 < s$ の区間では, $n < s - 1 \leq t$ のとき, 仮定より $T_{n-1}(t) = 0$ であることから,

$$T_n(s) = \int_{s-1}^s T_{n-1}(t) dt = \int_{s-1}^s 0 dt = 0. \quad (19)$$

$i < s \leq i + 1 (i = 1, \dots, n)$ の区間では,

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \int_{s-1}^s T_{n-1}(t) dt \\ &= \int_{s-1}^i T_{n-1}(t) dt + \int_i^s T_{n-1}(t) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $T_{n-1}(t)$ は t の $n - 1$ 次多項式なので, その不定積分は t の n 次多項式となり, 右辺の定積分はいずれも s の n 次多項式となる. したがって, $T_n(s)$ は s の n 次多項式である. \square

定理 3.2. $T_n(s)$ は連続である ($n \geq 1$).

証明. 数学的帰納法により証明する.

$n = 1$ のときは, 式 (16) より $T_1(s)$ は連続である.

$n \geq 2$ のとき, $T_{n-1}(s)$ が連続だと仮定すれば, 式 (12) より $T_n(s)$ は $s > 1$ の範囲では明らかに連続である (連続関数 $T_{n-1}(t)$ を $s - 1$ から s まで積分しても連続).

また, 式 (13) より $s < 1$ の範囲でも, $T_n(s)$ は連続である.

残るのは $s = 1$ における連続性である. まず, s を左から 1 に近づけると, 式 (13) より,

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} T_n(s) = T_n(1) = \frac{1}{n!}. \quad (21)$$

また, 右から 1 に近づけると, 式 (12), (13) より,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1+0} T_n(s) &= \int_0^1 T_{n-1}(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &= \left[\frac{t^n}{n!} \right]_0^1 = \frac{1}{n!}. \end{aligned} \quad (22)$$

したがって,

$$\lim_{s \rightarrow 1} T_n(s) = \frac{1}{n!} = T_n(1). \quad (23)$$

\square

定理 3.3. $T_n(s)$ は $n - 1$ 階微分まで連続である ($n \geq 1$).

証明. 数学的帰納法により証明する.

$n = 1$ のとき, 式 (16) より $T_1(s)$ は連続関数なので, 0 階微分は連続である.

$n \geq 2$ のとき, $T_{n-1}(s)$ が $n - 2$ 階微分まで連続であると仮定する.

$s > 1$ のとき, 式 (12) を微分すると,

$$T'_n(s) = T_{n-1}(s) - T_{n-1}(s - 1). \quad (24)$$

右辺は連続関数の差なので, $T'_n(s)$ は連続である. 帰納法の仮定より, 右辺はさらに $n - 2$ 回まで微分が連続なので, $k - 2 (k = 2, 3, \dots, n)$ 回微分すると,

$$T_n^{(k-1)}(s) = T_{n-1}^{(k-2)}(s) - T_{n-1}^{(k-2)}(s - 1). \quad (25)$$

さきほどと同様に, $T_n^{(k-1)}(s)$ は連続であることが分かる.

$s < 1$ のときは, 式 (13) より,

$$T_n^{(k-1)}(s) = \frac{s^{n-k+1}}{(n-k+1)!} (k = 2, 3, \dots, n) \quad (26)$$

なので, 明らかに連続である.

残るのは $s = 1$ における連続性である. s を左から 1 に近づけると, 式 (13) より,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1-0} T_n^{(k-1)}(s) &= T_n^{(k-1)}(1) \\ &= \left[\frac{s^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \right]_{s=1} \\ &= \frac{1}{(n-k+1)!}. \end{aligned} \quad (27)$$

s を右から 1 に近づけると, 式 (25) と $T_{n-1}^{(k-2)}(s)$ の連続性から,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1+0} T_n^{(k-1)}(s) &= T_{n-1}^{(k-2)}(1) - T_{n-1}^{(k-2)}(0) \\ &= [T_{n-1}^{(k-2)}(s)]_0^1 \\ &= \left[\frac{s^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(n-k+1)!}. \end{aligned} \quad (28)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} T_n^{(k-1)}(s) &= \frac{1}{(n-k+1)!} \\ &= T_n^{(k-1)}(1). \end{aligned} \quad (29)$$

\square

補題 3.1. $j!(n-j)!a_{jk}^{(n,i)}$ が整数であるような適当な係数 $a_{jk}^{(n,i)}$ を用いて

$$T_{n,i}(s) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{jk}^{(n,i)} (s-k)^j \quad (30)$$

の形で表すことができる ($n \geq 0, 0 \leq i \leq n+1$).
ただし, $T_{n,i}(s)$ は s の区間 $[i, i+1]$ で $T_n(s)$ の多項式である.

証明. 証明は付録に示す. □

定理 3.4. $T_n(s)$ を構成する多項式のすべての係数の $n!$ 倍は整数である.

証明. 補題 3.1 より, $T_n(s)$ を構成する任意の多項式は

$$T_{n,i}(s) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{jk}^{(n,i)} (s-k)^j \quad (31)$$

と表すことができる. ここで $a_{jk}^{(n,i)}$ の $j!(n-j)!$ 倍は整数なので, それをさらに $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ 倍した $n!a_{jk}^{(n,i)}$ も整数である.

したがって,

$$n!T_{n,i}(s) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n (n!a_{jk}^{(n,i)}) (s-k)^j \quad (32)$$

は整数係数の多項式となる. これは, $(s-k)^j$ を展開して

$$T_{n,i}(s) = \sum_{j=0}^n C_{ij}^{(n)} s^j \quad (33)$$

の形に整理したときに $n!C_{ij}^{(n)}$ が整数となることを意味している. $C_{ij}^{(n)}$ は, 定理 3.1 より, 区間 $i < s \leq i+1 (0 \leq i \leq n)$ における $T_n(s)$ の $s^j (0 \leq j \leq n)$ の係数を表している. □

3.1.3 係数の漸化的表現

定理 3.1 の結果から, 区間 $i < s \leq i+1 (0 \leq i \leq n)$ における $T_n(s)$ の $s^j (0 \leq j \leq n)$ の係数を $C_{ij}^{(n)}$ と置いて,

$$T_n(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n C_{ij}^{(n)} s^j & (i < s \leq i+1, 0 \leq i \leq n) \\ 0 & (n+1 < s) \end{cases} \quad (34)$$

と表すことができる. ただし, 便宜上, $C_{n+1,j}^{(n)} = 0 (0 \leq j \leq n)$ と定義する.

定理 3.5. $C_{ij}^{(n)} (n \geq 0, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n)$ は次の関係を満たす.

$$C_{00}^{(0)} = 1. \quad (35)$$

$$C_{0j}^{(n)} = 0 \quad (n \geq 1, 0 \leq j < n). \quad (36)$$

$$C_{0n}^{(n)} = \frac{1}{n!} \quad (n \geq 1). \quad (37)$$

$$C_{i,j+1}^{(n)} = \frac{1}{j+1} [C_{ij}^{(n-1)} - \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} C_{i-1,k}^{(n-1)}] \quad (n \geq 1, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j < n). \quad (38)$$

$$C_{i0}^{(n)} = C_{i-1,0}^{(n)} + \sum_{j=1}^n [C_{i-1,j}^{(n)} - C_{ij}^{(n)}] i^j \quad (n \geq 1, 1 \leq i \leq n). \quad (39)$$

証明. $n=0$ のとき, 式 (14) より式 (35) を得る. 以下では, $n \geq 1$ とする.

$i=0$ のとき, $0 < s \leq 1$ なので式 (13) より式 (36), (37) を得る.

$1 \leq i \leq n$ のとき, $i-1 < s-1 \leq i < s$ に注意して式 (24) に式 (34) を代入する.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n s_{j-1}^n C_{ij}^{(n)} j s^{j-1} &= \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij}^{(n-1)} s^j - \sum_{j=0}^{n-1} C_{i-1,j}^{(n-1)} (s-1)^j. \end{aligned} \quad (40)$$

左辺は j を $j+1$ に置換し, 右辺の第 2 項は二項定理で

$$(s-1)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} s^k \quad (41)$$

と展開した後に, 和をとる順序を入れ換えて s^k で整理し, さらに j と k の変数名を交換する.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} C_{i,j+1}^{(n)} (j+1) s^j &= \sum_{j=0}^{n-1} C_{ij}^{(n-1)} s^j - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} C_{i-1,k}^{(n-1)} s^j. \end{aligned} \quad (42)$$

$s^j (0 \leq j < n)$ の係数を比較して式 (38) を得る.

最後に, $1 \leq i \leq n$ で $j=0$ のときは, $T_n(s)$ が $s=i$ において連続であることを利用する. すなわち, 右極限 = 左極限であることから,

$$\sum_{j=0}^n C_{ij}^{(n)} i^j = \sum_{j=0}^n C_{i-1,j}^{(n)} i^j. \tag{43}$$

左辺に $j = 0$ の項のみを残し, $1 \leq j \leq n$ の項を右辺に移項すると式 (39) を得る. □

この定理から, 任意の $C_{ij}^{(n)}$ を漸化的に計算することができる. すなわち,

- (1) $n = 0$ のときは式 (35) を使う.
- (2) $n \geq 1$ かつ $i = 0$ のときは, 式 (36), (37) を使う.
- (3) $n \geq 1$ かつ $i \geq 1$ のときは, 再帰的に $C_{ij}^{(n-1)} (1 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1)$ をすべて求めた後に, $i = 1, \dots, n$ の順に以下の処理を反復する.
 - (a) $C_{ij}^{(n)} (1 \leq j \leq n)$ を式 (38) から求める.
 - (b) $C_{i0}^{(n)}$ を式 (39) から求める.

ここで, もともと求めたかったものは,

$$P_n(L) = \frac{n!}{s^n} T_n(s) \tag{44}$$

であったので, これを

$$z = \frac{1}{s} = \frac{R}{L} \tag{45}$$

についての関数

$$P_n^*(z) = P_n\left(\frac{R}{z}\right) = z^n n! T_n\left(\frac{1}{z}\right) \tag{46}$$

として整理する. $P_n^*(z)$ は $\frac{R}{L} = z$ のときに, 区間の両端の頂点が連結である確率を表している. たとえば, $n = 2$ のときは式 (18) より,

$$P_2^*(z) = \begin{cases} z^2 2! \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z}\right)^2 & (0 < \frac{1}{z} \leq 1) \\ z^2 2! \left(-\frac{3}{2} + 3\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) & (1 < \frac{1}{z} \leq 2) \\ z^2 2! \left(\frac{9}{2} - 3\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) & (2 < \frac{1}{z} \leq 3) \\ 0 & (3 < \frac{1}{z}) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (1 \leq z) \\ -3z^2 + 6z - 2 & (\frac{1}{2} \leq z < 1) \\ 9z^2 - 6z + 1 & (\frac{1}{3} \leq z < \frac{1}{2}) \\ 0 & (0 < z < \frac{1}{3}). \end{cases} \tag{47}$$

$T_n(s)$ の s^j の係数は $P_n^*(z)$ においては, $n!$ 倍されて s^{n-j} の係数となることが分かる. また, $P_n^*(z)$ は $T_n(s)$ の次のような特徴をそのまま引き継いでいる.

- (1) $P_n^*(z)$ は, z に関して n 次区分多項式となる.
- (2) $P_n^*(z)$ は $n-1$ 階微分まで連続である.
- (3) $P_n^*(z)$ の z の係数および定数項はすべて整数となる.

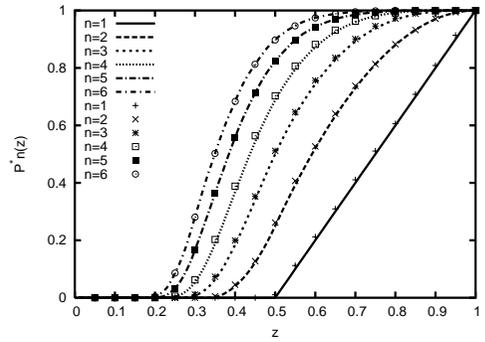


図 3 $P_n^*(z)$ の計算結果
Fig. 3 The results of $P_n^*(z)$.

解析結果の正しさを確認するために, 乱数を用いたモンテカルロ・シミュレーションを行った. その結果は, 解析結果とよく一致した. $P_n^*(z)$ の計算結果とシミュレーション結果を図 3 に示す. 図 3 の線が計算結果, 点がシミュレーション結果をそれぞれ表している.

3.2 固定半径自由直径ランダムグラフモデル

固定半径自由直径ランダムグラフが連結グラフである確率 $Q_n(L)$ を W が R 以内となる次のような確率で表すことができる.

$$Q_n(L) = Q_R\{W \leq R\} (n \geq 2). \tag{48}$$

頂点の位置 $X_i (1 \leq i \leq n)$ を確率変数として, 値の小さい順に並べかえたものを

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n \tag{49}$$

と表し, 順序統計量という. この順序統計量の最小値 X_1 , 最大値 X_n の存在範囲をそれぞれ $X_1 \in [x, x + dx]$, $X_n \in [y, y + dy]$ と仮定すると, $Q_n(L)$ は以下のように表せる.

$$Q_n(L) = \int_0^L \int_0^y P_{n-2}(y-x) f_{1,n}(x,y) dx dy. \tag{50}$$

$P_{n-2}(y-x)$ は, 前節の結果を用い, X_1 と X_n が連結である確率を示している. $f_{1,n}(x,y)$ は順序統計量の最小値 X_1 , 最大値 X_n の同時密度関数を表しており, 次のように表せる.

$$f_{1,n}(x,y) = n(n-1) f(x) f(y) (F(y) - F(x))^{n-2}. \tag{51}$$

式 (50) に式 (51) を代入して整理すると,

$$Q_n(L) = \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L \int_0^y P_{n-2}(y-x) (y-x)^{n-2} dx dy. \tag{52}$$

次に $\hat{Q}_n(*) = {}^*P_n(*)$ のように式 (52) を書き換えると,

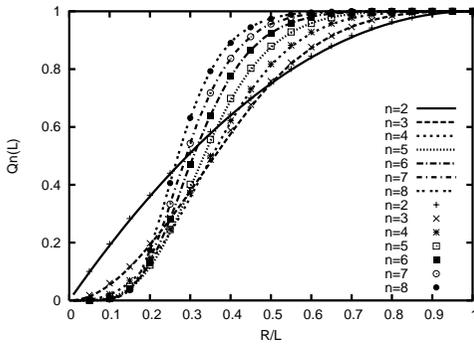


図4 $Q_n(L)$ の計算結果
Fig. 4 The results of $Q_n(L)$.

$$Q_n(L) = \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L \int_0^y \hat{Q}_{n-2}(y-x) dx dy. \quad (53)$$

ここで $w = y - x$ と置いて変数変換して、 x のかわりに w を用い、さらに和の順序を入れ換えると次のように二重積分を普通の（一重の）積分に変形できる。

$$\begin{aligned} Q_n(L) &= \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L \int_y^0 \hat{Q}_{n-2}(w) (-dw) dy \\ &= \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L \int_0^y \hat{Q}_{n-2}(w) dw dy \\ &= \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L \int_w^L \hat{Q}_{n-2}(w) dy dw \\ &= \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L (L-w) \hat{Q}_{n-2}(w) dw. \end{aligned} \quad (54)$$

以下に例として、 $Q_3(L)$ を示す。

$$Q_3(L) = \begin{cases} -6\frac{R^3}{L^3} + 6\frac{R^2}{L^2} & (0 < \frac{R}{L} \leq \frac{1}{2}) \\ 2\frac{R^3}{L^3} - 6\frac{R^2}{L^2} + 6\frac{R}{L} - 1 & (\frac{1}{2} < \frac{R}{L} \leq 1) \end{cases} \quad (55)$$

このモデルについても結果の正しさを確認するために、乱数を用いたモンテカルロ・シミュレーションを行った。その結果は解析結果とよく一致した。 $Q_n(L)$ の計算結果とシミュレーション結果を図4に示す。図4の線が計算結果、点がシミュレーション結果をそれぞれ表している。

4. おわりに

本論文では、固定半径固定直径ランダムグラフモデルを定義し、1次元空間において、そのグラフが連結グラフである確率を理論的に求めた。さらにその結果

を用いて、1次元空間における固定半径自由直径モデルのグラフが連結グラフである確率も求めた。

今後の課題として、まず頂点数 n が大きい場合のグラフが連結グラフである確率の特性について調査することを考えている。また、ランダムグラフの連結性に関して、グラフが連結グラフである確率が、あるパラメータ領域において急激に変化する相転移現象という現象が知られている^{8),9)}。しかし、その発生の原理やメカニズムは現在のところ不明な点が多く、ランダムグラフにおける相転移現象についても今後の課題として検討していきたい。

参考文献

- 1) Bollobás, B.: *Random Graphs*, Academic Press (1985).
- 2) Frieze (ed.), A.: *Random Graphs: Volume 2*, Wiley Interscience (1992).
- 3) Spencer, J.: *The Strange Logic of Random Graphs*, Springer Verlag (2001).
- 4) Dousse, O., Thiran, P. and Hasler, M.: Connectivity in ad-hoc and hybrid networks, *IEEE Infocom 2002* (2002).
- 5) Santi, P., Blough, D. and Vainstein, F.: A Probabilistic Analysis for the Range Assignment Problem in Ad Hoc Networks, *Mobihoc'2001*, Long Beach, California, pp.212-220 (2001).
- 6) Gupta, P. and Kumar, P.: Critical Power for Asymptotic Connectivity in Wireless Networks, *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*, pp.547-566 (1998).
- 7) Cheng, Y. and Robertazzi, T.: Critical Connectivity Phenomena in Multihop Radio Models, *IEEE Trans. Comm.*, pp.770-777 (1989).
- 8) Krishnamachari, B., Wicker, S. and Béjar, R.: Phase Transition Phenomena in Wireless Ad-Hoc Networks, *GlobeCom 2001* (2001).
- 9) Frank, J. and Martel, C.: Phase Transition in the Properties of Random Graphs, *Principles and Practice of Constraint Programming* (1995).

付 録

補題 3.1 の証明. n に関する数学的帰納法を用いる。
 $n = 0$ のときは明らかに成り立つ。

n のとき成り立つと仮定して、 $n + 1$ のときを考える。

$i = 0$ のときは $T_{n,0}(s) = \frac{s^n}{n!}$ より、 $j = n$, $k = 0$ に対する係数を $a_{n,0}^{(n,0)} = \frac{1}{n!}$ 、その他の係数を 0 とす

ればよい.

$i = n + 1$ のときは $T_{n,n+1}(s) = 0$ より自明.

$1 \leq i \leq n$ のとき

$$\begin{aligned} T_{n+1,i}(s) &= \int_{s-1}^s T_n(t) dt \\ &= \int_{s-1}^i T_{n,i-1}(t) dt + \int_i^s T_{n,i}(t) dt. \end{aligned} \tag{56}$$

実際にこの定積分を計算すると

$$\begin{aligned} T_{n+1,i}(s) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{a_{jk}^{(n,i-1)} - a_{jk}^{(n,i)}}{j+1} (i-k)^{j+1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{a_{jk}^{(n,i)}}{j+1} (s-k)^{j+1} \\ &\quad - \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{a_{jk}^{(n,i-1)}}{j+1} (s-(k+1))^{j+1}. \end{aligned} \tag{57}$$

$j+1 (j=0, \dots, n)$ を $j (j=1, \dots, n+1)$ と置きなおい, 第3項の $k+1 (k=0, \dots, n)$ を $k (k=1, \dots, n+1)$ と置きなおして整理する.

$$\begin{aligned} T_{n+1,i}(s) &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_{j-1,k}^{(n,i-1)} - a_{j-1,k}^{(n,i)}}{j} (i-k)^j \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{a_{j-1,0}^{(n,i)}}{j} s^j + \sum_{k=1}^n \frac{a_{j-1,k}^{(n,i)} - a_{j-1,k-1}^{(n,i-1)}}{j} (s-k)^j \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{j-1,n}^{(n,i-1)}}{j} (s-(n+1))^j \right]. \end{aligned} \tag{58}$$

ここで

$$a_{00}^{(n+1,i)} = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_{j-1,k}^{(n,i-1)} - a_{j-1,k}^{(n,i)}}{j} (i-k)^j. \tag{59}$$

$$a_{0k}^{(n+1,i)} = 0. \quad (k = 1, \dots, n+1) \tag{60}$$

$$a_{j0}^{(n+1,i)} = \frac{a_{j-1,0}^{(n,i)}}{j}. \tag{61}$$

$$a_{jk}^{(n+1,i)} = \frac{a_{j-1,k}^{(n,i)} - a_{j-1,k-1}^{(n,i-1)}}{j} \quad (k = 1, \dots, n). \tag{62}$$

$$a_{j,n+1}^{(n+1,i)} = -\frac{a_{j-1,n}^{(n,i-1)}}{j}. \tag{63}$$

と置く ($j = 1, \dots, n+1$) と,

$$T_{n+1,i}(s) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_{jk}^{(n+1,i)} (s-k)^j \tag{64}$$

と表すことができる.

あとは, $j!(n+1-j)a_{jk}^{(n+1,i)}$ が整数であることを確かめればよい. $a_{jk}^{(n+1,i)}$ には $\frac{a_{j-1,*}^{(n,*)}}{j}$ の形の分数が含まれているが, その $j!(n+1-j)!$ 倍は整数である. なぜなら

$$\begin{aligned} j!(n+1-j)! \frac{a_{j-1,*}^{(n,*)}}{j} &= (j-1)!(n-(j-1))! a_{j-1,*}^{(n,*)} \end{aligned} \tag{65}$$

であり, 数学的帰納法の仮定より, これは整数だからである. したがって, $j = 1, \dots, n+1$ に対して $j!(n+1-j)a_{jk}^{(n+1,i)}$ は整数である.

$$\binom{n}{j} j!(n-j)! a = n! a \tag{66}$$

も整数だからである. よって, $j = 0$ のときも $j!(n+1-j)a_{jk}^{(n+1,i)}$ は整数である. \square

(平成 16 年 11 月 19 日受付)

(平成 17 年 1 月 7 日再受付)

(平成 17 年 1 月 18 日採録)



能代 愛 (学生会員)

1981 年生. 2003 年北海道大学工学部情報工学科卒業. 2005 年同大学院工学研究科システム情報工学専攻修士課程修了. 現在, 同大学院情報科学研究科博士後期課程在学中. 数理情報科学の研究に従事. 電子情報通信学会学生会員.



吉川 毅（正会員）

1970年生．1993年北海道大学工学部情報工学科卒業．1995年同大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．2001年同大学院工学研究科システム情報工学専攻博士後期課程修了．現在，同大学院情報科学研究科コンピュータサイエンス専攻助手．博士（工学）．知能情報学，数理情報科学の研究に従事．日本応用数理学会会員．

現在，同大学院情報科学研究科コンピュータサイエンス専攻助手．博士（工学）．知能情報学，数理情報科学の研究に従事．日本応用数理学会会員．



栗原 正仁（正会員）

1955年生．1978年北海道大学工学部電気工学科卒業．1980年同大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．現在，同大学院情報科学研究科コンピュータサイエンス専攻教授．工学博士．人工知能およびソフトウェア科学における数理モデル等の研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会，米人工知能学会各会員．

工学博士．人工知能およびソフトウェア科学における数理モデル等の研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会，米人工知能学会各会員．
