Minority Gameにおける富のダイナミクス

戸田 皓治† 中村 泰之†

2値モデルの一類として提唱されたMinority Gameは，単純ながらもその振舞いは複雑であり，現実の経済現象との関連も強い．本研究では，Minority Gameにおける富について注目し，現実世界との比較を行ったところ，オリジナルのモデルでは現実の富の性質を反映しているとはいい難い結果が得られた．これはオリジナルのMinority Gameがきわめて単純なモデルのためと考えられる．そこで，富に関してより現実的なモデルになるよう拡張を行った．その結果得られた富の振舞いは，オリジナルのMinority Gameにおけるそれとは異なり，現実の富の性質を反映するものとなった．

The Dynamics of Wealth in Minority Game

Koji Toda† and Yasuyuki Nakamura†

Minority game is recently proposed as one of the binary models. In spite of its simplicity, the behavior is so rich and complex, and then it has strong relations with the real-world economic phenomena. In this work, we concentrate on the wealth of agents in the minority game and compare its properties with the real world's. As a result, however, there is little reflection of the real-world natures of wealth in the original minority game. This would descend from the extreme simplicity of the model. So we extend the model to be more realistic. As a consequence, we find the behavior that is not only quite a bit different from the one of original minority game, but also reflects the characters of wealth in the real world.

1. 導 入

El Farol Bar Problem [1] を発端とし，Challetらにより提唱されたMinority Game（MG）[2),7)] は，金融市場の非常に単純なモデルとして考えることができる．MGと現実の経済現象との関連についてのアプローチは様々な観点から行われており，これまでに多くの関連性が発見されている[3),7)]．しかしながら，MGの単純なルールでは再現できない現実の性質も多く，修正の余地は多々ある．そのため，最近の研究では，より現実的なモデルになるよう，拡張の研究もさかんである[6),7)]．

またMGは，スピン系としても記述することが可能で，ゲームの予測が可能な相と不可能な相との間で二次相転移が発生することが示されている[5)]．このことからも，MGは，経済学の分野のみでなく，統計力学の分野においても非常に興味深いものであるといえる．

さて，MGはその単純な構造にもかかわらず，その振舞いは決して平凡なものではなく，現実世界における市場の様々な原理を再現していることは先に述べた．そこで今回はその一環として，これまであまり扱われてきていないMGにおける“富”に注目し，その振舞いなどを調べることで，現実世界における富の性質とどの程度類似しているかを検証する．2章でMGの概要を説明し，3章ではMGにおける富を複数の観点から分析し，現実世界におけるそれとの比較を行う．また，4章ではMGに関する拡張を行い，5章でそのモデルにおける富の性質を検証する．最後に6章でこの研究のまとめを記す．

2. MGの概要

いま，奇数人のプレーヤからなる集団を考える．それぞれのプレーヤは，各タイムステップで，与えられた共通の2つの選択肢（売る，買うなど）のうちどちらか一方を独立に選ぶ．その結果，少数側の選択肢を選んだプレーヤの勝ちとなり，富の単位を1つ，報酬としてもらう．プレーヤの人数が奇数のため，引き分けはない．この操作を繰り返し行うゲームがMGである．

さて，プレーヤが2つの選択肢のうち，どちらか一方を選ぶ過程はランダムではない．それぞれのプレーヤは，過去 M 回のゲームの結果を履歴として持っている．これは，たとえば2つの選択肢を0，1とおく

† 名古屋大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻
Graduate School of Information Science, Nagoya University

表 1　$M = 2$ における全戦略 $s_1, s_2, \cdots, s_{16}$
Table 1　All strategies $s_1, s_2, \cdots, s_{16}$ in the case of $M = 2$.

履歴	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
00	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
01	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
10	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
11	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1

と，少数派の選択肢をゲームの結果として，0，1 の列で表され，全部で 2^M 通りある．そして，そのそれぞれの履歴に対し，次の行動（0，1 のどちらを選ぶか）を指定する戦略というものを持つ．例として，$M = 2$ における全戦略を**表 1** に示す．戦略の総数は 2^{2^M} 個であり，それぞれのプレーヤはこのうち S 個を所持することになる．戦略は，ゲーム開始前に与えられ，それ以降変更することはない．各プレーヤはこの S 個の戦略のうち最もパフォーマンスが良いものを選び，次の選択肢とする．具体的には，少数派の選択肢を正しく予想した戦略にはポイントを加算していき，各時間ステップでこのポイントの累積値が最も高い戦略を採用することになる（累積値が等しいときはランダムで採用）．

3. MG における富

今回注目するものは，プレーヤの富である．MG におけるプレーヤの富は，1. ゲーム開始前では全プレーヤが 0，2. 勝てば +1，負ければそのままというきわめて単純なルールに基づき振る舞う．

このルールから，すべてのプレーヤの富は単調増加であることが分かるが，それぞれのプレーヤのより詳細な富の振舞いはどのようになっているのであろうか．それを調べるために，時刻 $t = 10000$ で所持する富が，最も多い 3 プレーヤと最も少ない 3 プレーヤに注目し，それらのプレーヤの $t = 0$ から $t = 10000$ までの富の推移を**図 1** に示す．なお，ここでは各時刻において，それぞれのプレーヤの富から，全プレーヤの富の平均値を差し引いている．これから分かることは，上位のプレーヤと下位のプレーヤの富の差が，線形的に増加しているということである．すなわち，裕福なプレーヤは裕福な状態が，貧しいプレーヤは貧しい状態が一貫して続く．しかしながら，注意すべきは，これによりプレーヤ間の貧富の差が拡大していくというわけではないということである．なぜなら，ある時刻でのプレーヤ間の富の差は，時間が経つに従って，そのときプレーヤが所持する富に対して小さくなり，相対的にみてほとんど無視できるようになるためである．すなわち，最終的にはプレーヤの富は平等な

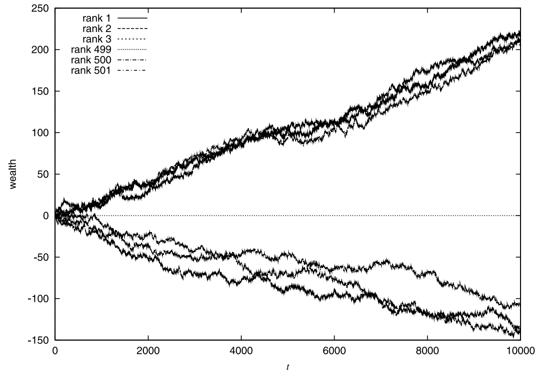


図 1　MG における上位および下位プレーヤの富の推移（$N = 501$，$M = 6$，$S = 4$）
Fig. 1　Time evolution of the wealth of 3 best and 3 worst players in MG ($N = 501$, $M = 6$, $S = 4$).

状態に向かっていくことが分かる．このことは，5 章で定量的に扱うことにより説明される．

次に，MG におけるプレーヤの所得について考え，MG における富の性質と現実世界におけるそれが，どの程度関連性を持っているかを調べる．そのための指標として，ここでは Pareto 則を用いた．Pareto 則は，上位 20%の高額所得者が全体の所得の 80%を占める，という法則であり，このときの所得 x の確率密度関数 $P(x)$ が高額側において，$P(x) = x^{-\mu-1}$ という冪乗側に従うというものである．μ は Pareto 指数と呼ばれるもので，この値が大きいほど所得の分布が平等，逆に小さいほど不平等として理解することができ，平等さの目安となっている．いま，所得の定義を，ある一定時間の間にプレーヤが得た報酬の合計とし，$t = 0$ から $t = 10000$ までの所得の累積確率分布を，対数表示で**図 2** に示す（$t = 10000$ での結果を示したことの理由は，5 章で後述する）．なお，ここで所得という量を新たに定義したが，MG においては，ゲームに負けても富が減ることはないため，$t = 0$，すなわちゲーム開始時からある時刻 t までの所得を考えたとき，これは時刻 t におけるプレーヤの富に一致することを注意しておく．まず，プレーヤの所得の累積確率分布は高額側で直線状になっており，すなわち，所得の確率密度関数が冪乗則に従っていることが分か

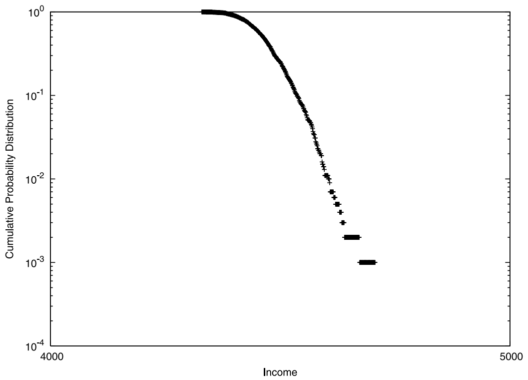


図 2 MG における所得の累積確率分布
($N = 501$, $M = 6$, $S = 4$)
Fig. 2 Cumulative probability distribution of income in MG ($N = 501$, $M = 6$, $S = 4$).

る．しかしながら，上位 20%の高額所得者に注目したとき，彼らが所有する所得は全体のほぼ 20%．これは，所得が全プレーヤを通してほぼ平等であることを意味する．実際に所得分布の幅は，$[4305, 4683]$ の区間に収まっており，平均所得 4438 に対して，標準偏差は 53 と，相対的にみてきわめて小さい．以上から，MG における所得の分布は Pareto 則に従っていないことが分かる．なお，MG における Pareto 指数は，$\mu \approx 107.07$ であった．現実世界との比較として，日本における Pareto 指数を例にあげると，その値は $\mu \approx 2$ のあたりで揺らいでいる[4)]．このことから，オリジナルのモデルにおける Pareto 指数は現実ではありえない，非常に高い値をとっていることが分かった．すなわち，MG における平等性はあまりにも高すぎるのである．

これは，MG の戦略，履歴，富に関する平等性によると考えられる．プレーヤが所持する戦略および履歴の数 M，S は等しく，戦略の良し悪しはない．そして，全プレーヤが富の量が等しい状態でゲームを開始する．以上のように，プレーヤはまったく同じ条件でゲームに参加しているため，富の量にはほとんど差がつかないのである．したがって，この 3 つの要素のいずれかについて，その完全な平等性をなくしてやれば，MG における高すぎる平等性を崩すことができるだろう．M，S の変更は，MG のシステムを根本から変えることになり，プレーヤの振舞いにも影響を与えることになるため，ここでは富に関するルールを変えることで，その平等性における変化を期待する．

4. 富に関する MG の拡張

MG における富のルール 1，2 を次のように拡張する．

(1) 初期状態のプレーヤの富に差をつける，
(2) プレーヤが投資する富の量を，それぞれが所持する富の量に対応させ，それに応じてもらえる報酬を決める．

(1) の意味は明確だが，実際の差のつけ方は 1 通りではない（ランダムで決める場合や，ある分布に従って決める場合など無数の方法が存在する）．次に，(2) は時刻 t でのプレーヤ i の富を $w_i(t)$ とすると，時刻 t でプレーヤ i が投資する富の量 $w_i^I(t)$ を次で定義する．

$$w_i^I(t) = r \times w_i(t-1), \quad 0 < r < 1 \tag{1}$$

そして，時刻 t での投資された富の合計値を $w^S(t) = \sum_i w_i^I(t)$ と，このとき少数派の選択肢を選んだプレーヤ，すなわち，勝ち側のプレーヤの投資した富の合計値を $w^M(t) = \sum_{winner} w_i^I(t)$ とおき，プレーヤ i の報酬を，

$$w_i^R(t) = \begin{cases} w^S(t) \times w_i^I(t)/w^M(t) & \text{（勝ち側）} \\ 0 & \text{（負け側）} \end{cases} \tag{2}$$

で定義する．つまり，それぞれのプレーヤは自分が持つ富に応じて投資し，その投資した富の量に応じて報酬をもらうことになる．また，以上から時刻 t でのプレーヤの富は，

$$w_i(t) = w_i(t-1) - w_i^I(t) + w_i^R(t) \tag{3}$$

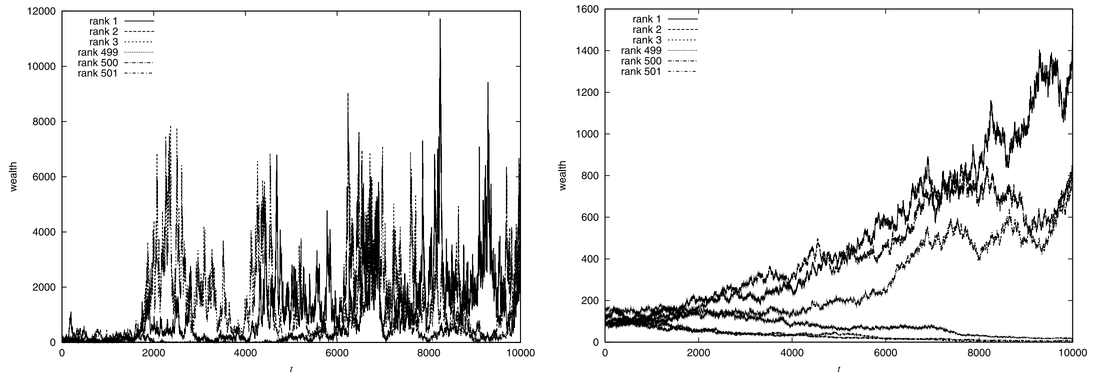
となる．

ここで，富と所得の違いを簡潔にまとめる．富とはストックであり，初期設定で与えられた量 $w_i(0)$ を出発点として，各ターンでのプレーヤの投資により減少し，報酬により増加する，最も基本となる量である．富が大きければ大きいほど，投資する富の量 w_i^I は大きくなり，それによる報酬 w_i^R も大きくなる．これに対して，所得とは各ターンでプレーヤが得る報酬の，ある一定時間内の合計 $\sum_t w_i^R(t)$ である．

5. 結　　果

それでは，4 章で行った拡張の結果，どのような変化が得られたかをみていく．なお，ここでゲーム開始前のプレーヤの富は，平均 110，分散 1000 の正規分布に従うように決めた．

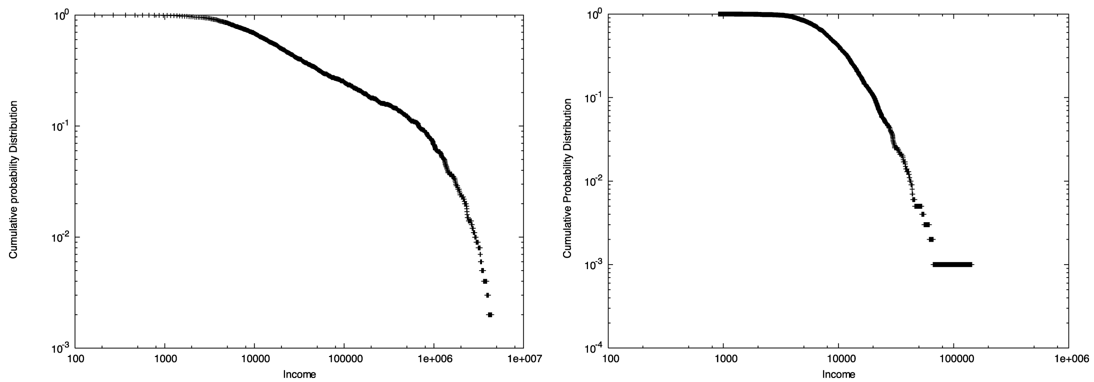
また，統計結果は $t = 10000$ を基準として示す．これは，後述の Gini 係数の計算から，$t = 4000$〜5000 のあたりで特定のプレーヤに富が集中しているような，安定期に入ったと考えられ，それから十分時間の経過した $t = 10000$ で考察を行うためである．まずは，$t = 10000$ で所持する富の上位 3 および下位 3 プレー



$r = 0.1$　　　　$r = 0.01$

図 3　拡張したモデルにおける上位および下位プレーヤの富の推移
($N = 501,\ M = 6,\ S = 4$)

Fig. 3　Time evolution of the wealth of 3 best and 3 worst players in the extended MG ($N = 501,\ M = 6,\ S = 4$).



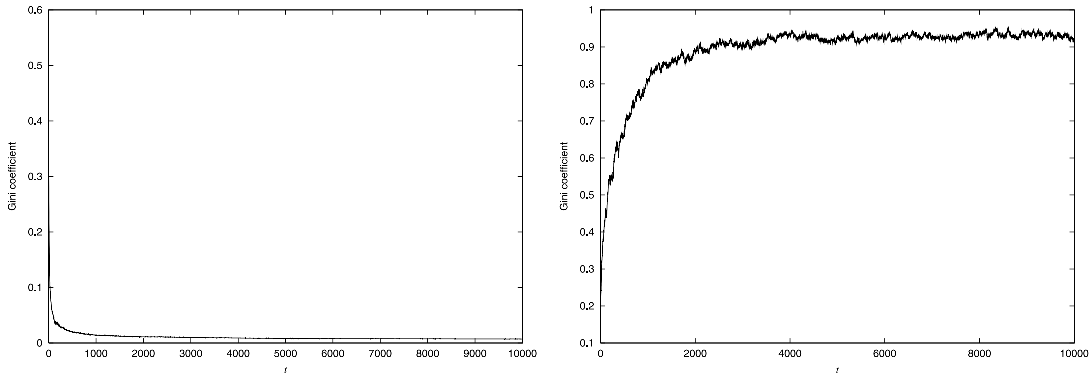
$r = 0.1$　　　　$r = 0.01$

図 4　拡張したモデルにおける所得の累積確率分布
($N = 501,\ M = 6,\ S = 4$)

Fig. 4　Cumulative probability distribution of income in the extended MG ($N = 501,\ M = 6,\ S = 4$).

ヤの富の推移を調べる．投資率 r に関しては，その大きさにより，後で見るように富の推移の様子が大きく異なるため，代表的な値として，$r = 0.1$，0.01 の 2 通りの結果を**図 3** に示す．なお，このモデルでは富の合計は変化しないため，それぞれの富から全体の富の平均値を引くという操作はしていない．これから分かることは，オリジナルの MG の富と比べて（図 1），プレーヤの富の変動が激しいということである．$r = 0.1$ の場合も $r = 0.01$ の場合でも，ゲーム開始後しばらくしてから上位のプレーヤの富の揺らぎが激しくなっている．これは次のような理由による．ゲーム開始前にはプレーヤ間の富の差はそれほどなく，それぞれが所持する富も少ない．しかし，下位のプレーヤはゲーム開始後変動しながらも富は減少し，最終的にはほとんど 0 となる．それにともない，上位のプレーヤは富を増やし，最終的に上位層の富の独占が続く．これにより，所持する富が非常に大きいため，収支も大きく，そのため激しく変動を繰り返すようになる．なお，r が大きい方が投資額と所持額との比率が大きく，富の揺らぎは大きい．

次に，$t = 0$ から $t = 10000$ までの所得の累積確率分布を**図 4** に示し，その特徴を**表 2** にまとめる．これも，MG の場合と同様に高額側で冪乗則に従っていることが分かる．しかし，注目すべきは分布の幅である．MG では全体の所得の分布が，$[4305, 4683]$ の非常に狭い区間に収まっていたのに対して，今回提案したモデルでは，$r = 0.1$，0.01 のどちらも MG と比べて非常に幅広く分布している．また，標準偏差が大き



オリジナルの MG　　拡張したモデル（$r = 0.1$）

図 5　オリジナルの MG と拡張したモデルでの Gini 係数の時間変化
（$N = 501,\ M = 6,\ S = 4$）
Fig. 5　Time evolution of Gini index in MG and the extended MG ($N = 501,\ M = 6,\ S = 4$).

表 2　図 4 の特徴
Table 2　Characteristics in Fig. 4.

	$r = 0.1$	$r = 0.01$
分布の幅	$[166, 4407966]$	$[908, 143758]$
平均所得	110204	11020
標準偏差	298782	8762
上位 20%の富の所有率	90%	40%
μ	2.35	2.81

くばらつきが大きい．富の分布に偏りができ，Pareto 指数は MG と比べて非常に小さく，平等さの違いは明らかである．加えて，これはきわめて現実的な値である．

最後に，プレーヤ間の富における平等性がどのように変化していくかを見るため，Gini 係数について調べる．Gini 係数とはいわゆる不平等度を測るものであり，次のように定義される．時刻 t における i 番目のプレーヤの富を $w_i(t)$ で表すとき，その平均差 $\overline{|w_i(t) - w_j(t)|}$ と富の平均 $\overline{w_i(t)}$ を用いて，

$$G = \frac{\overline{|w_i(t) - w_j(t)|}}{2\overline{w_i(t)}} \tag{4}$$

で得られる．Gini 係数は，完全に平等のとき，$|w_i(t) - w_j(t)| = 0\ (\forall i, j)$ より最小値 $G = 0$ をとり，逆に，1 人のプレーヤが全富を独占する完全不平等のとき，最大値 $G = (N-1)/N$ をとる．よって，$0 \leq G < 1$．この G の時間変化を追い，オリジナルの MG と拡張したモデルの $r = 0.1$ の場合との比較を行ったものが**図 5** である．MG ではゲーム開始後 G は急激に減少し，0 に収束している．それに対して，拡張したモデルではゲーム開始後に急激に増加し，最終的には 0.9 から 1 の間で揺らいでいる．なお，$r = 0.01$ では，$r = 0.1$ の場合と比べて G の増加する速度は遅いものの，最終的には同じ値で揺らぐ．したがって富の分布は，MG では平等な状態へと向かうことが，逆に拡張したモデルでは不平等な状態へと向かうことが分かった．

6. ま と め

今回の研究を通して，MG における富のダイナミクスを追い，その性質を調査した．MG における富の性質と，現実世界におけるそれとの比較をいくつかの観点から行った結果，顕著な関連性は見られなかった．これは MG における富の定義，あるいはその他のルールの単純さゆえ，現実世界における富の性質を再現できないのであると考えられる．

実際に，富に関して MG を拡張することにより富の振舞いは明らかに変化し，現実世界との関連性を得られるようになった．MG にはまだまだ拡張の余地が見受けられ，それらの拡張を行っていったときの変化はきわめて興味深いものである．

また，今回は投資活動を全プレーヤに対して導入したが，現実は高額所得者層に特徴的な行動と考えられている．今後，より現実を反映したモデル化も課題である．

参 考 文 献

1) Arthur, W.B.: *Am. Econ. Assoc. Papers* and *Proc. 84*, pp.406–411 (1994).
2) Challet, D. and Zhang, Y.C.: *Physica A 246*, pp.407–418 (1997).
3) Challet, D., Marsili, M. and Zhang, Y.C.: *Physica A 276*, pp.284–315 (2000).
4) 青山秀明，相馬　亘，藤原義久：数理科学，No.472, pp.44–50 (2002).

5) Challet, D. and Marsili, M.: *Phys. Rev. E 60*, R6271-6274 (1999).
6) Andersen, J.V. and Sornette, D.: *Eur. Phys. J. B 31*, pp.141–145 (2003).
7) The Minority Game's web page. http://www.unifr.ch/econophysics/minority/

(平成 16 年 12 月 15 日受付)
(平成 17 年 4 月 27 日再受付)
(平成 17 年 6 月 10 日採録)

戸田　皓治

昭和 56 年生．平成 16 年名古屋大学情報文化学部自然情報学科卒業．同年同大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻多自由度システム情報論講座博士課程前期課程入学，現在に至る．情報処理全般に興味を持ち，Minority Game を中心とした幅広い研究を行っている．

中村　泰之（正会員）

平成 7 年京都大学大学院工学研究科数理工学専攻博士後期課程修了．同年名古屋大学情報文化学部自然情報学科助手．平成 15 年同大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻助手を経て平成 16 年同助教授．統計力学，教育工学の研究に従事．博士（工学）．