

並列二閾値素子系による市場のモデル化とそのべき則性

小崎元也[†] 佐藤彰洋[†]

金融市場の価格時系列は、価格変動の間欠性と価格変動の分布のべき則性という特徴的な性質を有することが知られている。この2つの特徴を説明する数理モデルとして、並列二閾値素子系モデルを提案する。まず、このモデルの数値シミュレーションを実行して価格時系列の統計的性質がある程度再現されることを確認し、さらに価格変動の分布のべき指数（揺らぎの激しさの尺度）がモデルのパラメータに依存することを示す。次に、系のサイズが十分大なときに価格変動が従う時間発展方程式を導出し、価格変動の間欠性とべき則性の存在がこの時間発展方程式によって説明できることを示す。最後に、この時間発展方程式が近似的に乗算ノイズと加算ノイズの両方を持つ線形な確率過程で表せることを示し、べき指数とモデルのパラメータとの関係を理論的に明らかにする。

Modeling Financial Markets Based on the Arrayed Bithreshold Noisy Devices and Their Power-law Scaling

MOTOYA KOZAKI[†] and AKIHIRO SATO[†]

In this paper, we propose a mathematical agent-based model of financial markets, an arrayed bithreshold noisy devices model, which has two important statistical properties of markets: intermittency of price changes and power-law scaling in distributions of price changes. First, we performed numerical simulations of the agent model and confirmed that the statistical features of the model are similar to empirical ones. Second, we derived an equation of the price changes which is valid for efficiently large system size and found that the equation can explain both the intermittent behaviour and the power-law scaling of the distributions. Finally, by linear approximation of the equation, we clarified a relation between power-law exponents and model parameters.

1. 緒 論

統計物理学の分野では、これまで相互作用する多体系の研究に関心がはらわれてきた。磁性体や液体論、近年では自己組織化臨界やカオスなどがその一例である。近年、これらの研究で得られた知見を生物システム、社会システムに適用する研究が活発に行われている。特に社会システムの領域において、金融市場は、市場の電子化により取引記録のデータベースが整備され統計的分析に耐えうる量のデータの蓄積が可能になったことから、多くの研究者の関心を集めている。

近年の研究で、統計的手法を用いたデータ解析がなされた結果、価格時系列が以下の統計的性質を持つことが明らかになった^{1),2)}。

- (1) 価格の収益率（または対数差分）の確率密度関数の裾野が、べき則に従う。
- (2) 価格変動の絶対値（Volatility）には長期の相関、

すなわちいったん激しい価格変動が起こると長期間にわたって比較的大きな価格変動が続くことが知られており、“Volatility Clustering”と呼ばれている。この現象は、カオス³⁾の on-off 間欠性^{4),5)}との類似性から、変動の小さな区間（laminar phase）中に断続的に短期間の激しい変動が続く区間（chaotic burst）が現れるものと見ることができる。

これら金融市場に特徴的な統計的性質を説明する数理モデルとして、これまでに以下のようなモデルが提唱されてきた。

Ising モデル⁶⁾⁻⁹⁾ エージェントを (+1, -1) の2方向を持つスピンで表現し、エージェントの方向の総和を超過需要に対応付け、価格変動を表現するモデル。エージェントの方向は、他のエージェントの方向の影響を受けながら確率的に決定される。

決定論的ディーラモデル¹⁰⁾ 過去の市場価格の影響を受けながら、決定論的に売買価格を決めるエージェントからなるモデル。売買が成立したエージェント間の取引価格が市場価格になる。

マイノリティゲーム¹¹⁾ 少数派の売買行動をとった

[†] 京都大学情報学研究科数理工学専攻
Department of Applied Mathematics and Physics,
Graduate School of Informatics, Kyoto University

エージェントが利得を得る市場において、過去一定期間の市場価格の履歴に基づく戦略を用いるエージェント同士が利得を競うゲーム。

これらのモデルの多くでは、エージェントは「買い」または「売り」いずれかの状態をとるとし、主に市場の価格変動に着目している。しかし、市場の統計的性質を分析するうえでは、価格変動だけでなく、市場の活況度も重要視される。市場の活況度に着目した場合、「買い」「売り」だけでなく、取引をしない「待ち」という状態も考慮する必要がある。「待ち」を考慮したモデルについては、これまでマイノリティゲームを拡張したモデルが提案されているが¹²⁾、解析的に扱いやすいモデルは少ない。

本稿では、買い、売り、待ちの3状態を考慮し、外部からの入力がある閾値を超えたときに売買行動を起こすエージェントからなる市場モデルを考察する。市場価格は、Isingモデルと同様、エージェントの行動の総和（超過需要）によって決まるとし、エージェントは市場外からの情報と、市場価格のフィードバックの下で行動を決めるとする。このようなモデルを、時間変化するフィードバックを持つ並列二閾値素子系によって実現する。なお並列（二）閾値素子系は、アナログ-デジタル変換器（ADC）や、生物の感覚器などのモデルとして考えられ、主に確率共鳴の分野で研究されている体系である¹³⁾。

2. 市場の並列二閾値素子系モデル

本章では、まず市場のモデルを構築するうえで前提となる市場の基本原則といくつかの仮定を、経済学の観点を交え導入する。そのうえで、次章以降考察の対象となる並列二閾値素子系による市場のモデル化の方法を述べる。

2.1 市場の基本原則と仮定

N 人のエージェントが参加する市場を考える。簡単のため、本稿で考察する市場では単一の資産（証券、為替など）のみが取引されているものとする。この市場において、各エージェントは時刻 $t = 1, 2, \dots$ に買い、売り、待ちのいずれかの投資行動をとるものとする。

古典的な経済理論によれば¹⁴⁾、市場における資産の価格は、市場参加者の資産に対する需要と供給により決定される。特に価格変動に関しては、一般に、時刻 t における「買い」（需要）の総数を $D(t)$ 、「売り」（供給）の総数を $S(t)$ とすると、単位時間後の収益 $R(t) \equiv [P(t + \Delta t) - P(t)]/P(t)$ は超過需要 $D(t) - S(t)$ に比例する、すなわち

$$R(t) \equiv \frac{\Delta P(t)}{P(t)} \propto D(t) - S(t). \quad (1)$$

あるいは価格の対数の差は超過需要に比例する、すなわち

$$\log P(t + \Delta t) - \log P(t) \propto D(t) - S(t) \quad (2)$$

なる関係が成立するとされている。この関係を用いて、「市場価格」をエージェントの超過需要によって変動するものと定義する。

市場に参加するエージェントの行動は、(i) 市場の価格変動、(ii) 市場外部の経済・社会状況、(iii) エージェントの心の揺らぎ、に支配されていると考え、それ以外の要素は考えない。以下で、これらの要素について詳しく説明する。

まず、現実の市場では保有資産の値上がり（値下がり）に対して利益（損失）確定の売りをしたり、現在の資産価格は実際の資産価値より安いと考えて資産を買うなど、市場参加者の投資行動は資産価格の動きに応じて決まるものと見るのが自然である。本稿ではこの最も単純な場合として、直前の価格変動に影響を受けて投資行動を決定するエージェントからなる市場を考えていく。

次に、市場における資産の価値は、単に市場内部の力学のみによって決定するものではなく、株式であれば企業そのものの健全性や成長性、あるいは当該産業を取り巻く政治・経済状況など市場外部の要素にも大きく左右される。市場のモデル化に際しても、一般にはこのような外的要素を無視することはできない。ただし、金融市場のモデルを定性的に解析する場合には、定常状態の市場を考えれば十分であるため、外的要素はしばしば無視される。これから定式化するモデルにおいても、定性的な議論を進める際には、外的要素を無視して解析を進めることにする。

最後に、個々の市場参加者の意思決定は、一定のルールに従いながらも、情報の不確実性や判断の不確実性によってある程度の揺らぎを内包するものと考えられる。そのような各エージェントに固有の判断揺らぎは、互いに独立で無相関なノイズによって表すことにする。

2.2 並列二閾値素子系によるモデル化

以上の議論を基に、並列二閾値素子系を用いた市場のモデルを構築する。図1に並列二閾値素子系のブロック線図を示す。この系は並列に配置された N 個の二閾値素子からなり、各素子には共通の信号 $s(t)$ が入力される。並列配置された二閾値素子は、互いに独立に3つの投資行動のいずれかを行うエージェントに対応し、それらに対し共通の信号が入力されることは、エージェントが市場外部から同一の情報を受け取るこ

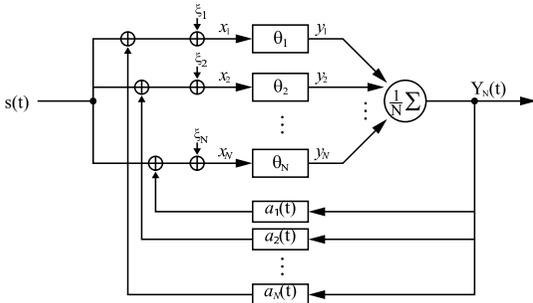


図 1 並列二閾値素子系のブロック線図

Fig.1 A system of arrayed bithreshold devices

とに対応する。

各素子は、固有のノイズ源 $\xi_i(t)$ (エージェント固有の判断の揺らぎ) および系全体の出力からのフィードバック $z_i(t)$ (価格変動に対するエージェントの応答) を有する。したがって、素子 i への入力、入力信号 $s(t)$ とそれらの和

$$x_i(t) = s(t) + \xi_i(t) + z_i(t) \tag{3}$$

で表される。ここで、ノイズ源は全素子で独立同分布かつ時間的に無相関な確率変数 $\xi_i(t) \sim N(0, \sigma^2)$ と仮定する。

入力 $x_i(t)$ に対する素子 i の出力は、閾値 θ_i に対して、

$$y_i(t) = \begin{cases} +1, & x_i > \theta_i \\ 0, & -\theta_i \leq x_i \leq \theta_i \\ -1, & x_i < -\theta_i \end{cases} \tag{4}$$

で与えられる。素子の出力はエージェントの投資行動に対応し、 y_i の値 $+1, 0, -1$ は、それぞれ「買い」「待ち」「売り」の投資行動を表す。

系全体の出力は、素子の出力の算術平均

$$Y_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t) \tag{5}$$

である。これは個々のエージェントの投資行動の平均であるから、市場における需要と供給の差、すなわち超過需要を表している。したがって、式 (1) あるいは式 (2) により、 $Y_N(t)$ は価格変動に比例する量である。

素子 i へのフィードバックは、

$$z_i(t) = a_i(t) Y_N(t - 1) \tag{6}$$

で与えられる。これは、前節で議論した市場参加者の行動が過去の価格変動に影響を受けることを表現している。エージェントは価格変動、すなわち超過需要に秩序化されると考えている (Y_N は秩序化パラメータの 1 つといえる)。また、係数 $a_i(t)$ が時間依存であるのは以下の理由による。

市場の雰囲気を表した強気相場、弱気相場という言葉が示すように、市場参加者間で共有された市場状況に対する評価次第で、市場参加者の価格変動に対する評価は変化する。つまり、異なる時点で同量の価格変動が起こったとしても、その時点での市場状況が異なれば、エージェントが平均的に異なる振舞いを示すことが予想される。したがって、エージェントにとっての価格変動の重みは、時間依存する変数と見なすことができる。

実際には、この重みは市場内外のさまざまな要素に依存した量と考えられるが、時間変化の極限的状况として、ある種の単純な確率過程と見なすことは意味があると考え、ここでは以下のように仮定する。

$$a_i(t) = a\zeta(t) + b_i\eta_i(t), \quad i = 1, \dots, N \tag{7}$$

ここで $\zeta(t)$ および $\eta_i(t), i = 1, \dots, N$ は、互いに独立で区間 $(-1, 1)$ の一様分布に従う、時間的に無相関な確率変数とする。また、 a はエージェントに共通の揺らぎ (エージェント間の相互作用に起因するものと考え) の強度、 b_i はエージェント i の共通の揺らぎからのずれの強度を表現している。

3. 数値シミュレーション

前章で定式化した市場のモデルを計算機上に実装し、数値シミュレーションを行った。

3.1 時系列標本

はじめに、少数エージェント ($N = 50$) と多数エージェント ($N = 5000$) の場合それぞれにおける、モデルの価格変動 $Y_N(t)$ の時系列標本を図 2 に示す。モデルのパラメータは、 $\sigma = 1.0, a = 4.0, b_i = 4.0$ ($i = 1, \dots, N$), $s(t) \equiv 0$ とした。またエージェントの閾値 θ_i は、すべて 1 に規格化した。

少数エージェントの場合 (図 2 (上)) は、つねに乱雑に振動する $Y_N(t)$ の時系列が得られたのに対し、多数エージェント (図 2 (中)) の時系列では、 $|Y_N| \ll 1$ での微弱な振動が続く状態の間に断続的に激しい振動が突発するという、Volatility Clustering に似た顕著な間欠性が観測された。

この間欠性の出現は、エージェント数 N とエージェントの不均質性の程度 ($b_i (i = 1, \dots, N)$ により表される) に依存する。 N が小さいほど、間欠的な振動は恒常的なノイズの中に埋没してしまう。またエージェントの不均質性 b_i が高いほど、間欠的な振動の強さは小さくなる (図 2 (下))。 $O(N) \approx 10^3$ 程度に N を大きくすると、恒常的なノイズは間欠的な振動に比べて十分小さくなり、間欠性が明瞭に観察されるようになることが分かった。

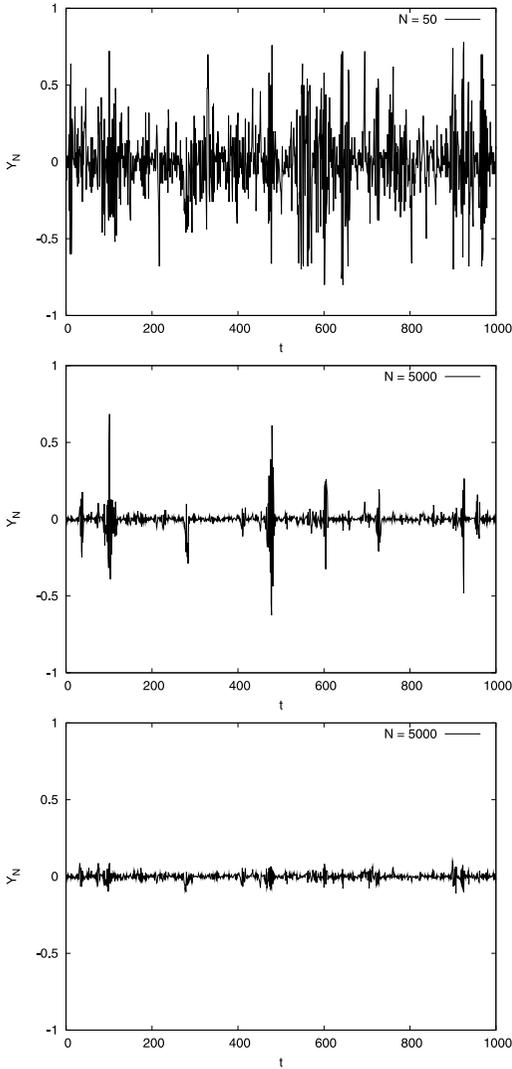


図2 価格変動の時系列標本 (上: $N = 50$, $b_i = 4.0$, 中: $N = 5000$, $b_i = 4.0$, 下: $N = 5000$, $b_i = 40.0$)
 Fig.2 Samples of time series of Y_N (above: $N = 50$, $b_i = 4.0$, middle: $N = 5000$, $b_i = 4.0$, below: $N = 5000$, $b_i = 40.0$).

3.2 確率密度関数

次に、多数エージェント ($N = 5000$) の場合の価格変動の確率密度関数 (度数分布) および累積分布を計算した。ただし、確率密度関数が $\rho(x)$ するとき、

$$P(\geq |x|) \equiv \int_{-\infty}^{-|x|} \rho(x') dx' + \int_{|x|}^{\infty} \rho(x') dx' \quad (8)$$

を x の累積分布関数と呼ぶ。

計算の結果を図3に示す。図中の分布は、下から $a = 3.6(+, \beta = 1.8)$, $a = 4.2(\times, \beta = 0.9)$, $a = 5.8(*, \beta = 0.2)$ の場合である (その他のパラ

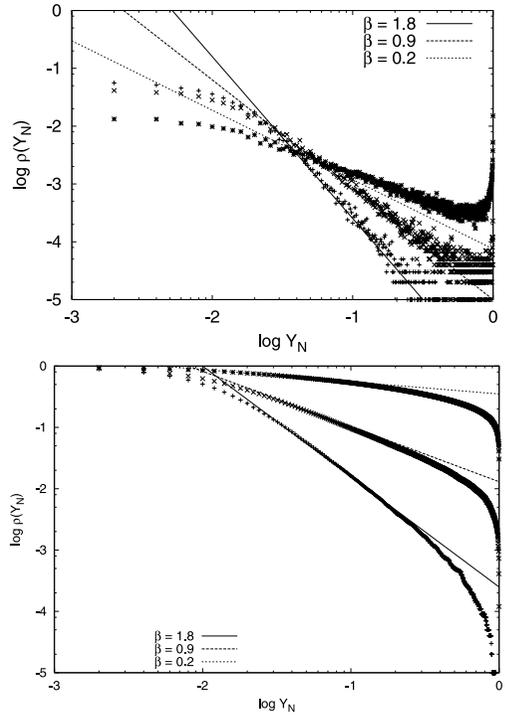


図3 価格変動の度数分布 (上) と累積分布 (下)
 Fig.3 A histogram (above) and a cumulative distribution (below) of price changes.

メータは、図2(中)と同じとした)。いずれの場合も、おおよそ $Y_N \approx 10^{-2}$ から 1 の範囲で、分布がベキ則

$$P(\geq |Y_N|) \propto Y_N^{-\beta} \quad (9)$$

に従うことが分かる。ただし、 $Y_N(t)$ の値は $(-1, 1)$ に制限されているため、裾野が非常に厚い場合 (図3では $\beta = 0.2$)、 $|Y_N| \approx 1$ において確率密度が高くなり、ベキ則から外れる。

4. 価格の時間発展方程式

前章では、並列二閾値素子系による金融市場のモデル化を行い、数値シミュレーションによって、モデルの価格変動の性質を調べた。本章では、 N が十分大なときの価格変動を記述する時間発展方程式を導出し、その時間発展方程式と On-off 間欠性との類似性について検討する。

なお、以下のような理由から、本章ではエージェントの均質性を仮定して議論を進める。シミュレーションでは、不均質性の強さ b_i を大きくすると、間欠性が消滅することが確かめられた。しかし、現実の市場で間欠性が観測されることから、現実の市場参加者の間には、ある程度の均質性があると考えられる。また、

エージェントの不均質性に対して、間欠性は比較的頑健な現象であることも確かめられた．そのため、均質性の仮定はそれほど厳しい制約とはならない．

4.1 時間発展方程式の導出

エージェントはすべて均質な性質を持ち、 $\theta_i \equiv \theta$ 、 $a_i(t) \equiv a\zeta(t)$ 、 $i = 1, \dots, N$ であると仮定する．今、フィードバックを考えない入力 $x_i(t) = s(t) + \xi_i(t)$ が素子 i に入力したとき、 i の出力 $y_i(t)$ が $+1$ 、 -1 、 0 である条件付き確率は、それぞれ以下ようになる (付録 A.1)．

$$P(+1|s) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta - s}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (10)$$

$$P(-1|s) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta + s}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (11)$$

$$P(0|s) = 1 - P(+1|s) - P(-1|s) \quad (12)$$

したがって、

$$\langle y \rangle \equiv \langle y_i | s \rangle \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta - s}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta + s}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (14)$$

ところで、系全体の出力 $Y_N(t)$ について、

$$\langle Y_N(t) \rangle = \langle y \rangle \quad (15)$$

$$\sigma_{Y_N}^2 = \frac{1}{N} (\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2) \quad (16)$$

であるから、 N が十分大きければ $Y_N(t) \approx \langle y \rangle$ と見なせる．改めてフィードバックを考慮し、 $s(t) \rightarrow s(t) + a\zeta(t)Y_N(t-1)$ と置き換えることで、 $Y_N(t)$ に関する時間発展方程式

$$Y_N(t) = f(s(t) + a\zeta(t)Y_N(t-1)) \quad (17)$$

を得る．ただし、

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta - x}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta + x}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (18)$$

である．

4.2 近似の有効性

$Y_N(t)$ の時間発展方程式 (17) が、元のモデルの出力を近似していることを確認するため、数値計算を実行した．

図 4 に、式 (17) の時系列標本を示す．パラメータは $\theta = 1.0$ 、 $\sigma = 1.0$ 、 $a = 4.0$ 、入力信号は $s(t) = h\chi(t)$ とした ($\chi(t)$ は区間 $(-1, 1)$ の時間的に無相関な一樣乱数、 $h = 0.02$)．

ここで、 $s(t) \neq 0$ としたのは以下の理由による．式 (17) の近似では、エージェント数を $N \rightarrow \infty$ とするために、 N が有限ならば必ず残るはずのエージェントの不確実性に起因する揺らぎが消失してしまう．ところが、エージェントの加算的な揺らぎが消失すると、モデルの性質が質的に変化してしまう¹⁵⁾ ため、式 (17)

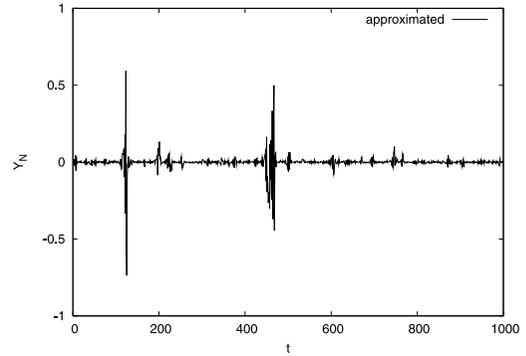


図 4 価格変動の時系列標本 (近似)

Fig. 4 A sample time series of Y_N (approximated).

の下では加算ノイズの $s(t)$ を入力することが不可欠である．

図 4 と数値シミュレーションの時系列標本 (図 2 (中)) と比較すると、式 (17) の時系列は、 N が十分大なときのモデルの価格変動をうまく近似していることが分かる．

次に、この時系列の Y_N の度数分布を示す (図 5)．図 3 (下) と図 5 について、パラメータ σ 、 a が等しい分布どうしを比較すると、ほぼ同じベキ指数になることが確認できる．

なお、図 5 (a) はエージェントの揺らぎの大きさを $\sigma = 1.0$ に固定して a と h を変化させたときの度数分布の変化を見た図、図 5 (b) は、フィードバック係数 a を固定して、 σ を変化させた図である．両図から、ベキ指数はパラメータ σ と a どちらにも依存して変化することが分かる．

4.3 On-off 間欠性との類似性

図 4 に見られる、長時間の静的な状態と断続的な短いバーストからなる時系列の振舞いは、カオスの研究で on-off 間欠性として知られる現象に非常によく似ている．ここでは時系列のダイナミクスを支配する 1 次元写像に着目して、この類似性について考察する．

On-off 間欠性を示す最も単純な系は、以下の 1 次元写像で記述される．

$$y(t+1) = z(t)f(y(t)) \quad (19)$$

ここで、 f は $f(0) = 0$ 、 $\partial f(y)/\partial y|_{y=0} \neq 0$ を満たす有界な関数、 $z(t)$ は $y(t)$ に依存しないカオス過程または確率過程である⁵⁾．式 (17) の場合、 $y(t+1) = f(z(t)y(t))$ の形をしているが、これは式 (19) と同系の写像であることが示せる (付録 A.2)．式 (18) は $f(0) = 0$ を満たし、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} \left[e^{-\frac{(\theta-x)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\theta+x)^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (20)$$

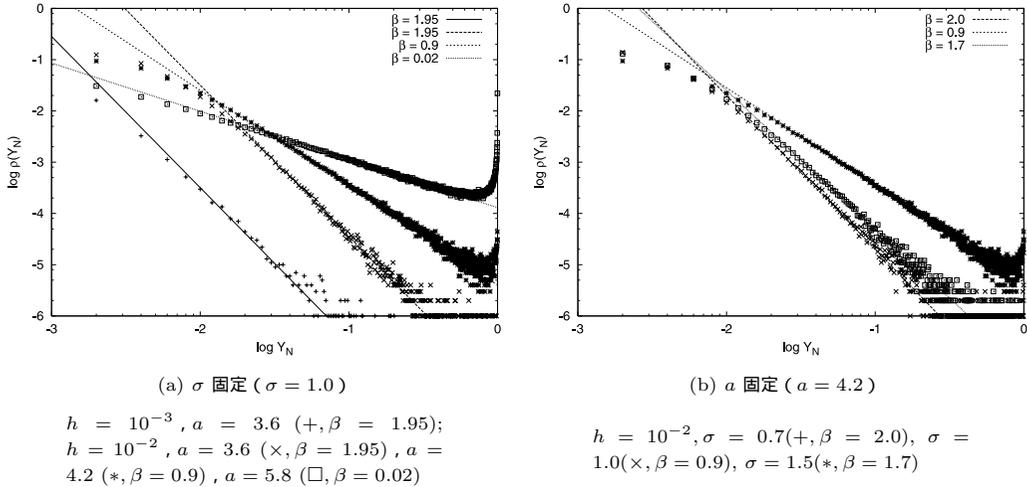


図 5 価格変動の度数分布 (近似)
Fig. 5 Histograms of price chages (approximated).

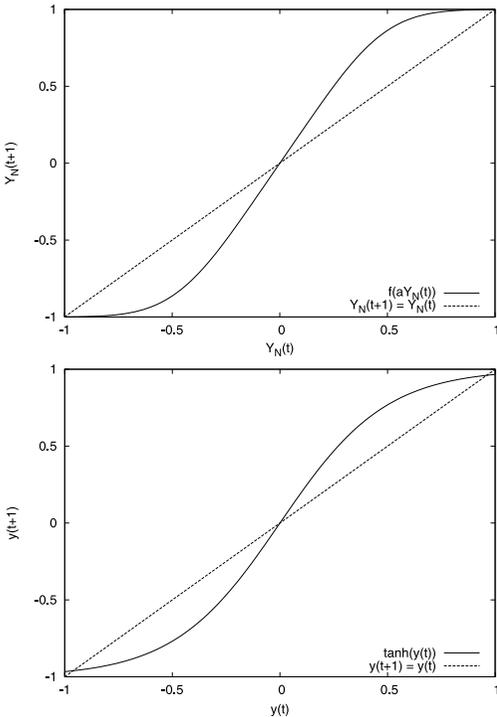


図 6 1次元写像の比較 (上: $f(aY_N(t))$, 下: $\tanh y(t)$)
Fig. 6 1-dimensional map of $f(aY_N(t))$ (above) and $\tanh y(t)$ (below). Beware of similarity between the two maps.

より $\partial f/\partial x|_{x=0} \neq 0$, また単調性と $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1$ より有界性も明らかであるから, 式 (17) は on-off 間欠性に属する 1次元写像系である. また, Holyst らの Ising モデル⁷⁾ の 1次元写像

$$y(t+1) = \tanh [a\xi(t)y(t) + h\zeta(t)] \quad (21)$$

と, 式 (18) の写像 $f(x)$ とを, ある適当なパラメータ

の下で比較すると, よく似た形をしていることが分かる (図 6). 両者はいずれも $|y| \ll 1$ で線形, $|y| \approx 1$ で飽和状態を持つ写像系であり, その時系列は, on-off 間欠性を示すだけでなく, 時系列の累積分布の裾野の部分 (図 5 参照) がベキ則性を持つという特徴を有している.

5. ベキ指数のパラメータ依存性

5.1 線形近似によるベキ指数の導出

4.2 節後半で, 時間発展方程式 (17) の出力 $Y_N(t)$ の累積分布の裾野がベキ則に従うこと, ベキ指数が系のパラメータ a, σ に依存することを確認した. このベキ指数とパラメータ a, σ の関係を, ランダム乗算過程の手法を用いて明らかにする.

$|a\zeta(t)Y_N(t-1) + s(t)| \ll 1$ なるとき, $Y_N(t)$ の時発展方程式 (17) を $Y_N(t-1) = 0$ の周りで展開し, 次の線形化方程式を得る.

$$\begin{aligned} Y_N(t) &= af'(0)\zeta(t)Y_N(t-1) + f'(0)s(t) \\ &\quad + O(Y_N^2(t-1)) \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} \zeta(t)Y_N(t-1) \\ &\quad + S(t) \end{aligned} \quad (22)$$

ただし, $S(t)$ は $Y_N(t)$ の 2 次以上の項と $s(t)$ の項をまとめたもので, 仮定より $S(t) \ll 1$ である.

式 (22) は, ランダム乗算過程と呼ばれる以下の形の離散型 Langevin 方程式と同型である.

$$x(t+1) = b(t)x(t) + f(t) \quad (23)$$

ランダム乗算過程は, 非線形系の解析にたびたび現れる確率過程であり, 次のような性質が知られている.

(i) 一般に, 分布の裾野がベキ則に従う, (ii) ベキ指数

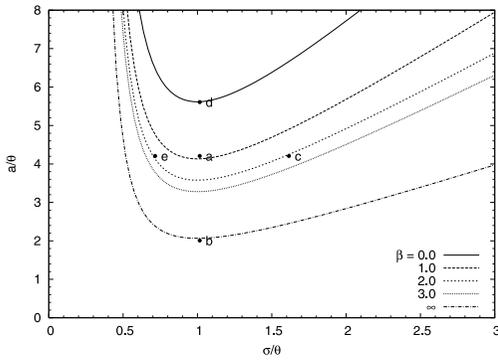


図 7 β -等高線

Fig. 7 β -Contour on σ - a plane.

の値は乗算ノイズの統計的性質によって決まり、加算ノイズにはよらない。

式 (23) のランダム乗算過程が定常分布を持つ場合に、乗算ノイズとベキ指数の間に以下の関係が成り立つことが知られている (付録 A.3)。

もし $x(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で定常分布を有するならば、そのベキ指数 β は、

$$\langle |b(t)|^\beta \rangle = 1, \quad 0 < \beta < 2 \quad (24)$$

で与えられる。

今の場合 $b(t) \equiv \sqrt{2/\pi}(a/\sigma) \exp(-\theta^2/2\sigma^2)\zeta(t)$ であるから、

$$\langle |b(t)|^\beta \rangle = 1 \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} \right]^\beta \langle |\zeta(t)|^\beta \rangle = 1 \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} = (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (27)$$

を得る。

5.2 β -等高線図

式 (27) で得られたベキ指数とパラメータ σ, a の関係から、 β を σ, a の関数と見て σ - a 平面上に等高線で示したのが、図 7 である。

この等高線図の有効性を検証するため、図 7 中に示した点 a, b, c, d, e それぞれにおける度数分布と累積分布を調べた (図 8)。図中の実線は、式 (27) から求めたベキ則 $P(\geq |Y_N|) \propto Y_N^{-\beta}$ を描いたものである。これを見ると、点 a~d では線形近似により求めたベキ指数が、実際の累積分布のそれと高い精度で一致することが分かる。ところが、点 e では数値シミュ

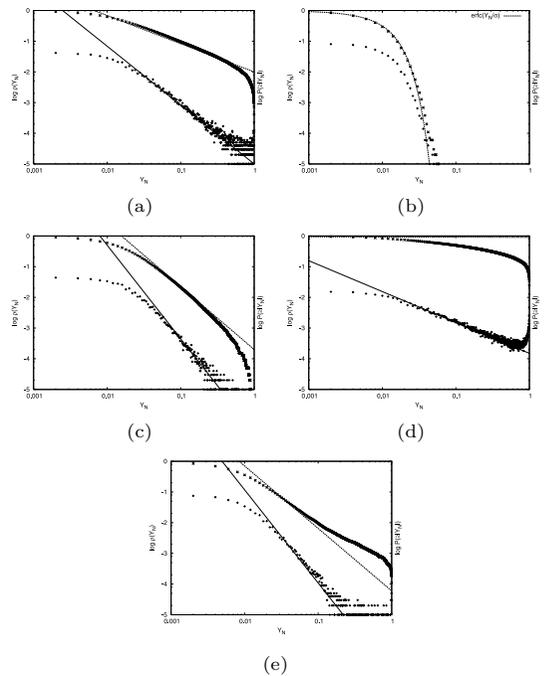


図 8 β -等高線図上の点における実際の度数分布。(a) $\sigma = 1.0, a = 4.2$, (b) $\sigma = 1.0, a = 2.0$, (c) $\sigma = 1.6, a = 4.2$, (d) $\sigma = 1.0, a = 5.6$, (e) $\sigma = 0.7, a = 4.2$

Fig. 8 Histograms of price changes by numerical simulations at the points (a) ~ (e) on β -contour map.

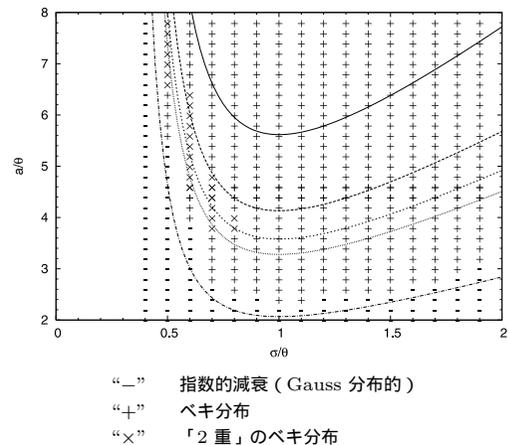


図 9 線形近似の適用可能範囲

Fig. 9 The applicable region of the linear approximation.

レーション結果は 2 つのベキを持つような累積分布を示しており、線形近似によるベキ則とは一致しない。

5.3 線形近似の適用可能範囲

図 8(e) のような 2 つの傾きを持つ分布は、 σ が 1 より小さい領域で現れることが予想される。これを確かめるため、実際の数値シミュレーションから求めた累積分布と、ランダム乗算過程に近似して求めたベキ指数との

ただし、ベキ則性を示す領域の外側にあたる点 b では、適当にスケールした Gauss 分布をあてはめた。

一致が成り立つ条件を, $0.3 < \sigma < 1.9, 2.0 < a < 7.8$ の範囲で調べた. なお, ここではエージェントは均質的であるとしている ($b_i = 0 (i = 1, \dots, N)$) が, 不均質性を導入しても結果に相違は見られなかった.

図 9 にその結果を示す. 図中の “x” で示した点が, 2 つの傾きを持ついわば「2重」のベキ則性を示す分布を観測した点である. これに着目すると, $\sigma < 0.8, 1 < \beta < 3$ の領域で 2 つの傾きを持ったベキ分布が観測されることが分かる.

6. 議論

本章では, モデルのベキ則性に関して 2 つの議論を行う. すなわち, (i) on-off 間欠性とベキ則性の関係について議論し, (ii) シミュレーション結果と線形近似によって求めたベキ指数の差異の原因について考察する.

6.1 On-off 間欠性とベキ則性の関係

まず, 4.3 節で述べた on-off 間欠性と前章のベキ則性との関係について述べる.

On-off 間欠性は, 系の安定性パラメータが何らかの変数によって揺らぐことで, 断続的にバーストが起こるという系であった. バーストが起こるためには, パラメータを支配する変数の揺らぎの平均的強さがある臨界点を超えなければならない.

式 (17) のような

$$y(t+1) = f(z(t)y(t)) \quad (28)$$

という形の 1 次元写像形の場合, 系の臨界点は

$$\langle \ln z \rangle > 0 \quad (29)$$

で与えられ, $z(t)$ がこの統計的性質を満たすならば, 式 (28) の系は on-off 間欠性を示す (付録 A.2).

今の場合, $\zeta(t)$ は区間 $(-1, 1)$ の一様乱数であるから, $\langle \ln z \rangle = \ln(a f'(0)) - 1$. すなわち, 系が不安定性を示す (間欠性を示す) パラメータの臨界点は,

$$a f'(0) = e = 2.71828 \dots \quad (30)$$

ところが, 本文では $s(t) \neq 0$ としているため, 厳密には加算ノイズを持った on-off 間欠性の系になっている. このような系においては, 臨界点が $a f'(0) = 1$ となることが知られている¹⁵⁾. 式 (27) と

$$(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \rightarrow 1, \quad \beta \rightarrow \infty \quad (31)$$

より, $a f'(0) = 1$ なる条件は図 7 における $\beta \rightarrow \infty$ の漸近線に等しく, Y_N が間欠性を示すのは, この漸近線より上側の領域になる.

このように間欠性が現れる領域と分布のベキ則性が見られる領域とが一致するという結果は, 一般の 1 次元写像系で成り立つことではなく, 式 (17) 特有の性

質である. この性質が成立するためには, 式 (28) において

$$(i) \quad f(0) = 0, \quad (32)$$

$$(ii) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \neq 0, \quad (33)$$

$$(iii) \quad O\left(\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=0}\right) \ll 1, \quad (34)$$

$$(iv) \quad s(t) \neq 0. \quad (35)$$

という 4 つの条件が少なくとも必要であると考えられる.

6.2 線形近似の限界

前章では, 4.2 節で見たベキ指数のパラメータ依存性を, (i) 時間発展方程式 (17) をランダム乗算過程と近似的に見なしてベキ指数とパラメータの関係式を導出し, (ii) σ - a 平面上のベキ指数等高線を描いた. 図 7 は, ベキ指数はフィードバックの強さと素子に加えるノイズの両方に依存することを示している.

式 (17) をランダム乗算過程と見なして求めたベキ指数は, 広い範囲でモデルのシミュレーション結果から得られたベキ指数に一致する. しかしながら, 5.3 節で述べたように, β -等高線図上には, 理論上のベキ指数が数値シミュレーションの結果と一致しないような領域も存在する. この領域では, 両対数グラフ上で 2 つの傾きを持つ特徴的な累積分布が観測された. 以下で, この領域および分布の性質について考察する.

式 (27) の写像形の一例を図 10 に示す. このうち, 上は図 9 の 2 つの傾きを持つ分布の領域での写像形, 下はベキ則に従う領域での写像形である. 図中の実線は写像 $Y_N(t+1) = f(aY_N(t))$ を, 破線は $Y_N(t+1) = f(aY_N(t))$ の $Y_N = 0$ 近傍での線形近似を表す. この図から, 図 9 の “+” で表した領域では $Y_N = 0$ まわりの線形近似が大域的な写像の良い近似となっていることが分かる. 一方, “x” で表した領域では $Y_N = 0$ まわりの線形近似が時間発展方程式の局所的な近似にしかなくておらず, 大域的な写像の形と一致しないことが見てとれる. このことから, 線形近似によって導出したベキ指数がシミュレーション結果と一致しないのは, 図 10 に見られるような線形近似の限界によるものと考えられる.

7. 結論

本稿では, 「買い」と「売り」に加えて「待つ」という行動を考慮に入れた市場のエージェントモデルについて考察した.

いくつかの市場に関する仮定の下, 市場の並列二閼値素子系モデルを導入し, 数値シミュレーションと理

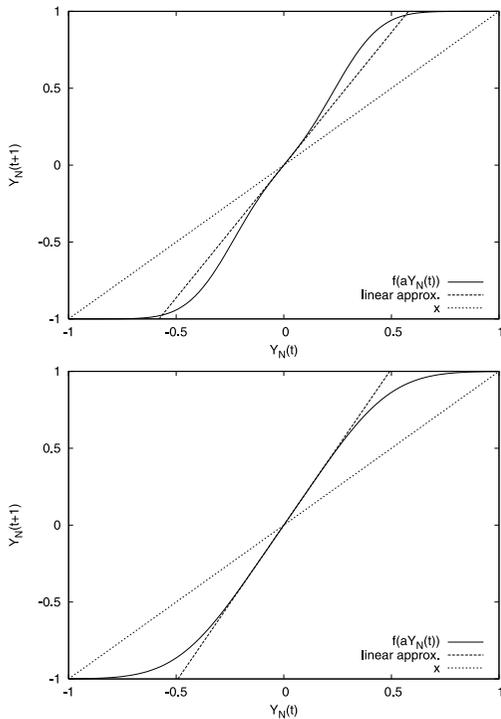


図 10 時間発展方程式の写像形 (上: $\sigma = 0.7, a = 4.2$, 下: $\sigma = 1.0, a = 4.2$)

Fig. 10 Difference between the maps producing power-law tails (above; $\sigma = 0.7, a = 4.2$) and double-sloped power-law tails (below: $\sigma = 1.0, a = 4.2$)

論的解析とによって、このモデルの価格時系列が閾欠性を有し、その分布の裾野がベキ則性を有することを示した。

さらに、この双方の統計的性質が存在するための必要条件を示した。それは以下のものである。

- フィードバックループが存在し、フィードバックの強さが時間変化すること。
- 内性因子による不確実性あるいは外性因子による不確実性のいずれかが少なくとも存在する。

本稿で定式化した単純なエージェントモデルを、現実の市場に適用できるかは議論の余地があるが、金融市場のベキ則揺らぎはフィードバックの強さだけでなく、エージェントの意思決定の揺らぎの強さにも依存している可能性がある。

また、時間変化するフィードバックを持つ並列二閾値素子系は、金融市場のモデルだけでなく神経ネットワーク、ベキノイズ発生器などにも応用可能な系である。したがって、5章で明らかにした系のパラメータとベキ指数の関係は、これら並列二閾値素子系で記述できるさまざまな系に対しても示唆に富む結果であると考えられる。

謝辞 最後になりましたが、本研究を遂行するうえで多くのご指導とご助言を賜りました、京都大学情報学研究科数理工学専攻物理統計学分野の宗像豊哲教授、五十嵐顕人助教授に深甚な感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Mantegna, R.N. and Stanley, H.E.: *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press (1999). 中嶋真澄 (訳): 経済物理学入門 ファイナンスにおける相関と複雑性, エコノミスト社 (2001).
- 2) Liu, Y., Gopikrishnan, P., Cizeau, P., Meyer, M. and Peng, C-K.: Statistical Properties of the Volatility of Price Fluctuations, *Phys. Rev. E*, Vol.60, No.2, pp.1390-1400 (1999).
- 3) 井上政義, 秦 浩起: カオス科学の基礎と展開—複雑系の理解に向けて, 共立出版 (1999).
- 4) Fujisaka, H. and Yamada, T.: Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems, *Prog. Theor. Phys.*, Vol.69, No.1, pp.32-47 (1983).
- 5) Heagy, J.F., Platt N. and Hammel, S.M.: Characterization of On-Off Intermittency, *Phys. Rev. E*, Vol.49, No.2, pp.1140-1150 (1994).
- 6) Kaizoji, T.: Speculative Bubbles and Crashes in Stock Markets: An Interacting-agent Model of Speculative Activity, *Physica A*, Vol.287, pp.493-506 (2000).
- 7) Krawiecki, A., Holyst, J.A. and Helbing, D.: Volatility Clustering and Scaling for Financial Time Series due to Attractor Bubbling, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.89, No.15, pp.158701-1-158701-4 (2002).
- 8) Iori, G.: Avalanche Dynamics and Trading Friction Effects on Stock Market Returns, *Int. J. Mod. Phys. C*, Vol.10, No.6, pp.1149-1162 (1999).
- 9) Bornholdt, S.: Expectation Bubbles in a Spin Model of Markets: Intermittency from Frustration across Scales, *Int. J. Mod. Phys. C*, Vol.12, No.5, pp.667-674 (2001).
- 10) Takayasu, H., Miura, H., Hirabayashi, T. and Hamada, K.: Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements—the Case of Market Price, *Physica A*, Vol.184, pp.127-134 (1992).
- 11) Zhang, Y-C.: Evolving Models of Financial Markets, *Europhys. News*, Vol.29, pp.51-54 (1998).
- 12) Johnson, N.F., Hart, M., Hui, P-M. and Zheng, D.: Trader Dynamics in a Model Mar-

ket, *Int. J. Theo. App. Fin.*, Vol.3, No.3, pp.443–450 (2000).

- 13) Sato, A-H., Ueda, M. and Munakata, T.: Signal Estimation and Threshold Optimization using an Array of Bithreshold Elements, *Phys. Rev. E*, Vol.70, pp.021106-1–021106-5 (2004).
- 14) McCauley, J.L.: *Dynamics of Markets: Econophysics and Finance*, Cambridge University Press (2004).
- 15) Platt, N., Hammel, S.M. and Heagy, J.F.: Effects of Additive Noise on On-Off Intermittency, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.72, No.22, pp.3498–3501 (1994).
- 16) Takayasu, H., Sato, A-H. and Takayasu, M.: Stable Infinite Variance Fluctuations in Randomly Amplified Langevin Systems, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.79, No.6, pp.966–969 (1997).

付 録

A.1 相補誤差関数

相補誤差関数は以下で定義される：

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (36)$$

本文 4.1 節における素子の出力の条件付き確率は、以下のように求められる¹³⁾。素子 i に $x_i(t) = s(t) + \xi_i(t)$ が入力したとする。ただし、 $\xi_i(t)$ は標準偏差 σ の Gauss 分布に従う時間的に無相関な確率変数である。このとき、素子 i が y_i を出力する条件付き確率 $P(y_i|s)$ は、以下のように表すことができる：

$$\begin{aligned} P(+1|s) &= \int_{\theta-s}^{\infty} \rho(\xi_i) d\xi_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\theta-s}^{\infty} e^{-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}} d\xi_i \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta-s}{\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} P(-1|s) &= \int_{-\infty}^{-\theta-s} \rho(\xi_i) d\xi_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\theta+s}^{\infty} e^{-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}} d\xi_i \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta+s}{\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$P(0|s) = 1 - P(+1|s) - P(-1|s). \quad (39)$$

A.2 時間発展方程式からの on-off 間欠性の導出

本文 4.1 節の時間発展方程式 (17), (18) が 1 次元写像系

$$y(t+1) = z(t)f(y(t)) \quad (40)$$

と同じクラスの on-off 間欠性に属することは、以下の

ようにして分かる。

今、 $s(t) \equiv 0$ として式 (17) を式 (40) の表式にあわせて

$$y(t+1) = f(a\zeta(t)y(t)) \quad (41)$$

と書く。これを $Y_N = 0$ の近傍で展開すると

$$\begin{aligned} y(t+1) &= f'(0)a\zeta(t)y(t) + \frac{f'''(0)}{3!}(a\zeta(t)y(t))^3 + \dots \\ & \quad (42) \end{aligned}$$

f の写像形から明らかのように、固定点 $y = 0$ の安定性は、たかだか 1 次の項にのみ左右される。そのため、Heagy らが式 (40) の場合に固定点 $y = 0$ の安定性を論じたのと同じ手法を用いることができる⁵⁾。

$z(t) = af'(0)\zeta(t)$ とおく。式 (42) における高次の項を無視した場合の解は

$$y(t) = y_0 \prod_{s=0}^{t-1} z(s) \quad (43)$$

である。したがって $y(t)$ の漸近的挙動は

$$P(t) = \prod_{s=0}^{t-1} z(s) \quad (44)$$

によって決まる。この両辺の対数をとって、

$$\ln P(t) = \sum_{s=0}^{t-1} \ln z(s) \sim t \langle \ln z \rangle. \quad (45)$$

ただし、最後は大数の法則によって成り立つとした。これより、式 (43) の漸近的な解は

$$y(t) \sim e^{n \langle \ln z \rangle} y_0 \quad (46)$$

である。

$\langle \ln z \rangle > 0$ ならば、この解は平均的に見れば指数的に発散するため、 $y = 0$ は「平均的に」不安定固定点となる。すなわち、 $y = 0$ は一時的には安定たりうるが、その近傍に有限時間以上とどまることができず、いずれは不安定な状態に遷移して指数的に発散する（しかし f の有界性によって $y(t)$ は 0-近傍に引き戻され、長時間観察すると、この系は断続的にパーストが発生する系になる）。

A.3 ランダム乗算過程

離散型 Langevin 方程式

$$x(t+1) = b(t)x(t) + f(t) \quad (47)$$

について、 x の定常分布がベキ則性 $P(\geq |x|) \propto x^{-\beta}$ を示すことが知られている。また、そのベキ指数 β について以下が成り立つ。

$$\langle |b(t)|^\beta \rangle = 1 \quad (48)$$

ここでは、特性関数を用いた証明を述べる¹⁶⁾：

$b(t)$, $f(t)$ の密度関数をそれぞれ $W(b)$, $U(f)$ とし、時間に独立と仮定する。 $x(t)$ の特性関数は、 $x(t)$ の密度関数 $p(x, t)$ に対し

$$Z(\rho, t) = \langle e^{i\rho x(t)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho x(t)} p(x, t) dx \quad (49)$$

であるから、式 (47) の Fourier 変換より、

$$\begin{aligned} Z(\rho, t+1) &= \langle e^{i\rho b(t)x(t)} \rangle \langle e^{i\rho f(t)} \rangle \\ &= \Phi(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} W(b) Z(b\rho, t) db \quad (50) \end{aligned}$$

を得る。 $\rho = 0$ 近傍で、定常分布の低次の項が

$$Z(\rho) = 1 - \gamma|\rho|^\beta + \dots \quad (0 < \beta < 2) \quad (51)$$

の形 (Lévy 安定分布) に展開できると仮定する。このとき、 $f(t)$ の分散が有限かつ $\Phi(\rho)$ が ρ の整ベキに展開できるとすると、

$$\begin{aligned} Z(\rho) &= \Phi(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} W(b) Z(b\rho) db \\ &= (1 + c_1\rho + \dots) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} W(b) (1 - \gamma|b\rho|^\beta + \dots) db \quad (52) \end{aligned}$$

式 (51) と式 (52) の係数を比較して、式 (48) を得る。

(平成 18 年 10 月 5 日受付)

(平成 19 年 1 月 25 日再受付)

(平成 19 年 2 月 27 日再々受付)

(平成 19 年 3 月 19 日採録)



小崎 元也

昭和 57 年生。京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻修士課程在籍。統計物理学的手法を応用した市場リスクの計量化に関心を持つ。



佐藤 彰洋

昭和 50 年生。平成 13 年 3 月東北大学大学院情報科学研究科博士課程修了。平成 12 年 1 月から 13 年 3 月まで日本学術振興会特別研究員。平成 13 年 4 月より京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻助手。平成 19 年 4 月より同助教。エージェントモデルに立脚した市場数理モデルの開発と確率過程の研究に従事。金融市場の状態定量化手法の開発とその応用に関心を持つ。博士(情報科学)。

これは $\rho(x) \propto |x|^{-(1+\beta)}$ 、すなわち x の確率密度関数がベキ則に従うことを意味する。