

ティック頻度情報に基づいた外国為替市場構造の定量化

佐藤 彰 洋†

規格化パワースペクトルの Kullback-Leibler divergence により定義されるスペクトル距離を用い、外国為替市場で取引される 15 種類の通貨ペアの高頻度経済時系列データから抽出されるティック頻度時系列に対して通貨ペア間の類似度の分析を行った。本手法の分析から通貨ペア間の類似度は時間帯によって大きく異なることが確認された。本手法の妥当性を検証するために、 N 人の市場参加者が M 種類の通貨ペアを取り扱う金融市場のエージェントモデルを提案する。数値シミュレーションの結果、エージェントの情報の知覚と行動に係るパラメータの差異がティック頻度のスペクトル距離に反映していることを確認した。また、エージェントモデルの理論分析より、多変量 AR モデル (VAR) を通じて、エージェントのパラメータとスペクトル距離との関係を議論した。

Spectral Method to Quantify Dynamical Structure of the Foreign Exchange Market Based on the Tick Frequency

AKI-HIRO SATO†

The time series of the tick frequency extracted from the high frequency financial data for 15 kinds of currency pairs in the foreign exchange market are analyzed from a view point of similarity measured by the spectral distance defined by the Kullback-Leibler divergence between two power normalized spectra. By using the proposed method it is confirmed that the spectral distance matrix depends on the regional time zones. In order to understand the meaning of the proposed method we consider the agent-based model of a financial market that N market participants deal with M kinds of currency pairs. From the numerical simulation of this agent-based model it is found that the difference between parameters of the market participants (perception and decision) reflects the spectral distance matrix. Furthermore the vector autoregressive (VAR) model are approximately derived from the agent-based model in a theoretical manner and the relation between parameters of the market participants and the spectral distance is discussed.

1. はじめに

近年の情報通信技術 (Information and Communication Technology, ICT) の長足の進歩によって、社会の情報化が進展している。その結果、金融市場では高頻度金融時系列と呼ばれる、市場参加者の取引の記録あるいはそれに類する記録の膨大なデータが蓄積されるようになってきた。この膨大な取引の記録に関するデータを分析することにより、これまで感覚にたよっていた市場理解を、計算機を用いて定量化、可視化することができるようになりつつある^{1)~7)}。そして、高頻度経済時系列の分析結果を活用することによって、瞬時的な市場の状態を知ることにより注文のタイミング図ったり、リスク評価の精度を向上させる

ことができると期待される。

しかしながら、金融市場の自由度はきわめて高く、また、データの膨大さからこれを微視的レベルで理解しようとした場合、膨大なデータ量によって高速の計算機を利用したとしても処理しきれないほどのデータを扱う必要に直面する。あるいは、たとえ処理できたとしても、人間の認知能力を超えた情報量のために、情報を利用する人間が得られた結果を理解できないという事態が生じる。

これらを選けるために、情報の縮約を行う必要性が生じる。もし、膨大なデータから重要な特徴を見つけ、これを縮約し、我々が理解できる程度の情報を抽出できたとき、データは利用可能な情報となる。さらに、縮約された情報を用い巨視的レベルから情報間の関係性を知り特徴をつかむことができるようになれば、金融市場を巨視的観点から理解することができるようになると期待される。本稿では外国為替市場の高頻度金

† 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
Department Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University

融時系列から情報の縮約を行い、利用可能な情報を抽出する方法について議論する。

情報の抽出方法としてティック頻度に対する通貨ペア間のスペクトル距離を用いる。さらに本手法の妥当性を検証するために、Granovetter 型の閾値ダイナミクスを持つエージェントからなる金融市場のエージェントモデルを考察する。エージェントの通貨ペアに対する知覚と行動に関するパラメータの値が 2 種類の通貨ペアに対して一致している場合、ティック頻度のスペクトル距離行列は 0 となることを理論的に示す。さらに、理論の仮定を弱めたより現実に近い状況においても、モデルの数値シミュレーションからエージェントのパラメータとティック頻度のスペクトル距離との間に相関があることを示す。これらのことから、ティック頻度のスペクトル距離行列は市場参加者の知覚と行動に対する戦略の類似性を推定していると結論付ける。

本稿は以下の構成からなっている。2 章では、外国為替市場の高頻度時系列データから抽出される行動頻度時系列とその性質を示す。3 章では、抽出された行動頻度時系列間の類似度を定量化する手法として、規格化パワースペクトルの Kullback-Leibler divergence を計算する方法を提案する。4 章では行動頻度時系列間の類似度定量化手法の妥当性を検証するために、市場参加者の売買の素過程に基づいたエージェントモデルを考察する。エージェントモデルの分析を通じて、エージェントの行動パラメータと行動頻度との関係を理論的に示す。またモデルの直接数値シミュレーションを通じてより現実に近い状況においても、行動頻度時系列の類似度と行動パラメータとの間に相関関係があることを示す。5 章はエージェントシミュレーションを通じて示された、行動頻度の類似度とエージェントの行動パラメータとの相関関係を使って、2 章で計算された外国為替市場の市場参加者の状況を考察する。6 章は結論と今後の展望を記す。

2. ティック頻度

外国為替市場では市場参加者はブローキングシステムを利用することにより、取引可能な相手を探し出し、出会い、そして通貨の交換を行っている。かつて、ブローキングシステムは人間のブローカが円卓を囲んで行うボイスブローキングが主流であったが、1990 年代から登場した電子ブローキングシステムの利用が現在では主流となっており、大部分の取引は電子ブローキングシステムを介して行われている。電子ブローキングシステムはサーバと市場参加者が使用するコンピュータ端末とをコンピュータネットワークによって

表 1 分析対象とした 15 種類の通貨ペア
Table 1 Analyzed currency pairs.

USD/CHF	アメリカ合衆国ドル/スイスフラン
USD/JPY	アメリカ合衆国ドル/日本円
USD/NOK	アメリカ合衆国ドル/ノルウェークローネ
USD/SEK	アメリカ合衆国ドル/スウェーデンクローナ
AUD/USD	オーストラリアドル/アメリカ合衆国ドル
EUR/CHF	ユーロ/スイスフラン
EUR/GBP	ユーロ/イギリスポンド
EUR/JPY	ユーロ/日本円
EUR/NOK	ユーロ/ノルウェークローネ
EUR/SEK	ユーロ/スウェーデンクローナ
EUR/USD	ユーロ/アメリカ合衆国ドル
GBP/AUD	イギリスポンド/オーストラリアドル
GBP/CAD	イギリスポンド/カナダドル
NZD/USD	ニュージーランドドル/アメリカ合衆国ドル
USD/CAD	アメリカ合衆国ドル/カナダドル

直接結び付け、各コンピュータ端末から入力された建値の良いものいくつかを互いのコンピュータ端末に表示することにより、取引を促進する仕組みである。市場参加者が入力する注文情報はサーバに時々刻々記録され、取引可能な市場参加者が見つかったことなどが記録されている。このデータはティックデータまたは高頻度金融時系列データと呼ばれ、このデータを分析することにより市場参加者の行動に関する知見が得られるため、近年研究が進展している。

本分析では金融市場に建値を提示する頻度の分析を行う。建値頻度を用いる理由は大きく 2 つある。1 つは、一般に市場参加者の活動が活発な場合、ブローキングシステムの利用頻度は上昇するので、ブローキングシステムの利用頻度によって金融市場の活況度を定量化できるため、もう 1 つは、膨大なティックのデータを縮約することができるからである。

分析対象としたデータは、CQG 社が提供する外国為替市場の建値提示の記録データである⁸⁾。アメリカ合衆国ドル (USD)、ユーロ (EUR)、スイスフラン (CHF)、イギリスポンド (GBP)、ノルウェークローネ (NOK)、スウェーデンクローナ (SEK)、カナダドル (CAD)、ニュージーランドドル (NZD)、オーストラリアドル (AUD)、日本円 (JPY) を含む通貨ペアの分析を行った。表 1 に分析対象とした 15 種類の通貨ペアを示す。通貨を頂点とし、通貨ペアをそれらの頂点間を結ぶ直線によって表現したグラフによって記すと図 1 のようになる。

i 番目の通貨ペアの単位時間 Δt あたりの建値提示頻度を次式で定義する。

$$A_i(k) = \frac{1}{\Delta t} C(k\Delta t; (k+1)\Delta t). \quad (1)$$

ここで、 $C(t_1, t_2)$ は時刻 t_1 から t_2 までの売り建値

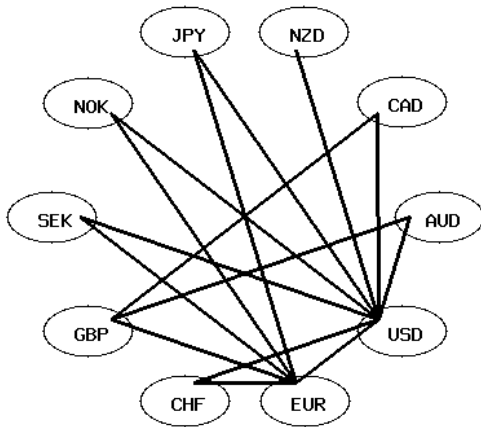


図 1 分析対象とした通貨ペア (USD/CHF, USD/JPY, USD/NOK, USD/SEK, AUD/USD, ERU/CHF, EUR/GBP, EUR/JPY, EUR/NOK, EUR/SEK, GBP/AUD, GBP/CAD, NZD/USD, USD/CAD, NZD/USD, USD/CAD) を表すグラフ. 通貨 (USD, ERU, CHF, GBP, NOK, SEK, CAD, NZD, AUD, JPY) を頂点として通貨ペアを頂点間を結ぶ直線によって図示した

Fig. 1 The graph to represent the analyzed currency pairs (USD/CHF, USD/JPY, USD/NOK, USD/SEK, AUD/USD, ERU/CHF, EUR/GBP, EUR/JPY, EUR/NOK, EUR/SEK, GBP/AUD, GBP/CAD, NZD/USD, USD/CAD, NZD/USD, USD/CAD). Each node (USD, ERU, CHF, GBP, NOK, SEK, CAD, NZD, AUD, JPY) represents a currency, and each edges a currency pair.

の累積提示回数を意味する．全分析を通じて，サンプリング間隔 Δt は 1 [min] と固定して分析を行った．図 2 に分析対象とした 15 種類の典型的なティック頻度時系列を示す．ティック頻度は地球上で昼間にあたる活動時間帯に対応する地域の市場参加者の活動の様子が有意に現れるため，通貨ペアごとに取引を行う主体が異なることによって異なるパターンを示す．

3. スペクトル距離行列

もし，2 種類の通貨ペアのティック頻度時系列が似ているならば，それらの通貨ペアを取り扱っている市場参加者は似通った動作パターンによって，コンピュータ端末を操作し，価格提示行動を生起していると推察される．そこで，ティック頻度時系列間の類似度によって外国為替市場の市場参加者の行動を定量化することを考える．

時系列の類似度を定量化する方法として，まず，相互相関関数を用いる方法が考えられる．しかしながら，相互相関関数を用いる方法は，時系列間のノイズの相互相関関数に強く依存してしまうため，ダイナミクスの比較を行うことが難しいという問題点があった．

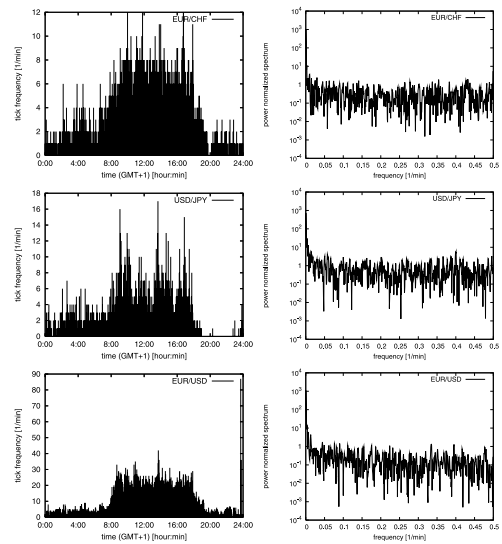


図 2 2000 年 9 月 4 日の EUR/CHF, USD/JPY, EUR/USD のティック頻度時系列とその規格化パワースペクトル

Fig. 2 The time series of tick frequency and the corresponding power normalized sprctra for EUR/CHF, USD/JPY, and EUR/USD on 4th September, 2000.

たとえば，平均 0 のノイズ $\xi_1(t), \xi_2(t)$ に駆動される 2 つの AR(1) モデル

$$x_1(t) = a_1 x_1(t-1) + \xi_1(t), \tag{2}$$

$$x_2(t) = a_2 x_2(t-1) + \xi_2(t). \tag{3}$$

から生成される時系列から，AR(1) モデルのパラメータの類似性を知るという問題を考える．式 (2) と式 (3) の相互相関関数は

$$\frac{\langle x_1 x_2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2 \rangle} \sqrt{\langle x_2^2 \rangle}} = \frac{\langle \xi_1 \xi_2 \rangle}{\sqrt{\langle \xi_1^2 \rangle} \sqrt{\langle \xi_2^2 \rangle}} \frac{\sqrt{1-a_1^2} \sqrt{1-a_2^2}}{1-a_1 a_2}, \tag{4}$$

となり，ノイズの相互相関関数の値に x_1 と x_2 の相互相関関数の値が依存している．もし，ノイズの相互相関関数が 0 であるとするとき式 (4) は 0 となるので， a_1 と a_2 の違いを相互相関関数から知ることはできず，ノイズ間の相互相関が弱い場合，パラメータの違いが見出しにくいという問題点があった．

しかしながら，両者のパワースペクトルを比較すれば，ノイズ間の相互相関の強弱にかかわらず，ノイズのパワースペクトルが同一であるという仮定のもとでは，パラメータの近さを時系列から比較することが可能である．なぜなら，パワースペクトルの形状の違いは AR モデルのパラメータの値の違いのみに依存するからである．

パワースペクトルの形状を比較するような方法をスペクトル距離と呼び様々な測度が提唱されてい

る⁹⁾．音声認識の分野では，スペクトル距離を計算する測度と人間の感性との相関が重要視される．その1つに，定常 Gauss 系列の仮定に基づき，多変量 Gauss 分布の Kullback-Leibler divergence をスペクトル近似した Itakura-Saito 距離が提案されている．しかし，時系列が定常 Gauss 系列であるという仮定は強すぎる仮定であるため，適用できる範囲が限られるという問題があった．特に，高頻度金融時系列は非ガウス分布に従うことが実証分析を通じて広く認められているため，高頻度金融時系列のダイナミクスの比較に Itakura-Saito 距離を用いることは，理論的に正当化が困難である．

本稿では，この問題を解決するために，規格化パワースペクトルの Kullback-Leibler divergence によるスペクトル距離の定量化および計算方法を提案する．この方法は，時系列の確率分布形状とパワースペクトルが表す時間構造とは独立であるという事実に立脚し，規格化パワースペクトルを周波数領域における確率密度関数と見なし，直接これらの Kullback-Leibler divergence を計算して時系列間のダイナミクスの類似度とする方法である．本提案方法は，定常ガウス系列の強すぎる仮定をおく必要がなくスペクトル距離を定義しているため，広く非ガウス時系列に対して適用可能な方法である．

また，金融時系列の時間的構造を見る手法として時系列のスペクトル情報を利用する方法を用いる方法は古くから研究されてきたが¹⁰⁾，低頻度時系列しか利用できなかったためあまり積極的に研究されてこなかった．近年，スペクトル解析に耐えられる大量の高頻度経済時系列が利用できるようになり，スペクトル分析は見直されつつある¹¹⁾．

ティック頻度時系列 $A_i(k)$ の区間 $[t, t + L - 1]$ におけるスペクトログラムを $A_i(k)$ の短時間フーリエ変換の絶対値の2乗として定義する．

$$P_i(n, t) = \frac{1}{L^2} \left| \sum_{k=0}^{L-1} w(k) A_i(k+t) e^{-2\pi i k \frac{n}{L}} \right|^2, \quad (5)$$

ここで， t は局所化窓の始点の時刻， L は窓関数の幅を表し， $w(k)$ は窓関数である．窓関数として Hanning 窓

$$w(k) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{L-1} \right) \right), \quad (6)$$

を用いた．また，ナイキスト周波数 $f_c = 1/(2\Delta t) = 0.5 [1/\text{min}]$ であるので，スペクトログラムの時間分解能は $2 [\text{min}]$ である．

そして，規格化されたスペクトログラム

$$p_i(n, t) = \frac{P_i(n, t)}{\sum_{n=1}^{L-1} P_i(n, t)}, \quad (7)$$

の Kullback-Leibler divergence (KL) を類似度とした．規格化を行う理由は KL が規格化された正值関数の汎関数として定義される量であるためである．また，スペクトルの直流成分を除去してスペクトルの形状の比較を行う定義を採用する．この操作は，ティック頻度の平均値を除去してから短時間フーリエ変換を計算することと同値である．スペクトル距離の定義の観点からは，スペクトログラムの $n = 0$ 成分を無視して規格化を行い，そのように計算された規格化されたスペクトログラムを用いて $n = 0$ を取り除いて KL を計算することに対応する．

$$K_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{L-1} p_i(n, t) \log \frac{p_i(n, t)}{p_j(n, t)}. \quad (8)$$

KL の定義より， $K_{ij}(t)$ はつねに非負値であり，

$$K_{ij}(t) \geq 0, \quad (9)$$

$p_i(n, t) = p_j(n, t)$ であるときのみ， $K_{ij}(t) = 0$ となる．また $K_{ij}(t)$ は反対称非類似度行列であり

$$K_{ij}(t) \neq K_{ji}(t), K_{ii}(t) = 0. \quad (10)$$

の性質を満足する．一般に反対称行列は $J_{ij}(t) = (K_{ij}(t) + K_{ji}(t))/2$ ， $I_{ij}(t) = (K_{ij}(t) - K_{ji}(t))/2$ とおくことにより，対称行列と反対称行列の和に分解することが可能である．

$$K_{ij}(t) = J_{ij}(t) + I_{ij}(t). \quad (11)$$

特に，

$$J_{ij}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} (p_i(n, t) + p_j(n, t)) \log \frac{p_i(n, t)}{p_j(n, t)}, \quad (12)$$

は対称 Kullback-Leibler 距離 (SKL) と呼ばれ， $J_{ij}(t) = J_{ji}(t)$ と $J_{ii}(t) = 0$ を満足する．また， $p_i(n, t) = p_j(n, t)$ のときのみ $J_{ij}(t) = 0$ が満足される．

図3に $L = 480 [\text{min}]$ として，15 通貨ペアに対する SKL $J_{ij}(t)$ をアジア時間帯 ($t=0:00$ (GMT+1))，ヨーロッパ時間帯 ($t=8:00$ (GMT+1))，アメリカ時間帯 ($t=16:00$ (GMT+1)) に分けて全結合ネットワークとして描いた図を示す．通貨ペアを頂点とし，通貨ペア間の SKL の値に応じて値が大きい場合に線を太く描いている．窓の幅を固定し， t を $1 [\text{min}]$ ごとに動かしていくと， $1 [\text{min}]$ ごとに $J_{ij}(t)$ が変化するのは数個の要素であり，残りはほとんど変化せず， $J_{ij}(t)$ の変化はゆっくりであることを確認した． $J_{ij}(t)$ の小さな変化の積み重ねが，長期間にわたって見た場

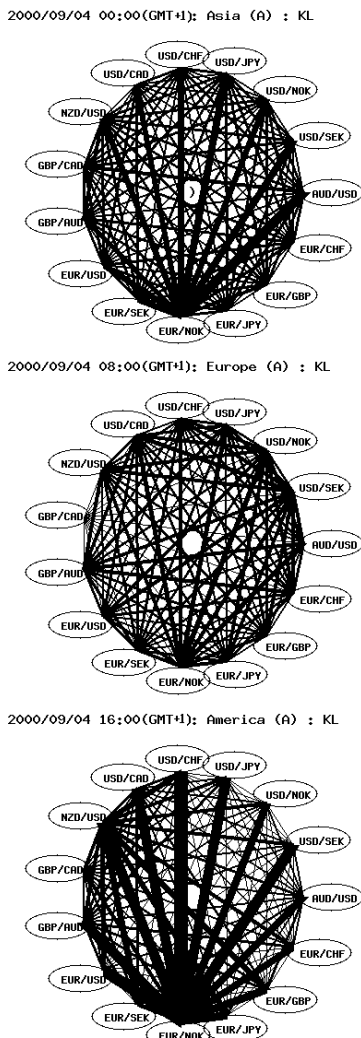


図 3 2000年9月4日における15通貨ペア間の対称化 Kullback-Leibler 距離 . アジア時間帯 ($t = 0:00$ (GMT+1))(上), ヨーロッパ時間帯 ($t = 8:00$ (GMT+1))(中央), アメリカ時間帯 ($t = 16:00$ (GMT+1))(下). 窓の幅は $L = 480$ として短時間離散フーリエ変換によりスペクトログラムを計算した . 各通貨ペアを頂点とし, 2つの通貨ペア間の細線/太線はスペクトログラムの類似性/非類似性を意味している

Fig. 3 The spectral distance network defined by the symmetric Kullback-Leibler distance for 15 kinds of currency pairs on 4th September, 2000 for $L = 480$. The Asian time zone ($t = 0:00$ (GMT+1)) (top), the European time zone ($t = 8:00$ (GMT+1)) (center), and the American time zone ($t = 16:00$ (GMT+1)) (bottom). Nodes represent currency pairs, and thick/thin lines a large/small distances between two currency pairs.

合, $J_{ij}(t)$ の大きな違いを生んでいる . 外国為替市場の構造の変化は小さな変化が積み重ねられることによって, 長期間にわたって見た場合, 大きな変化として認識されると考えられる .

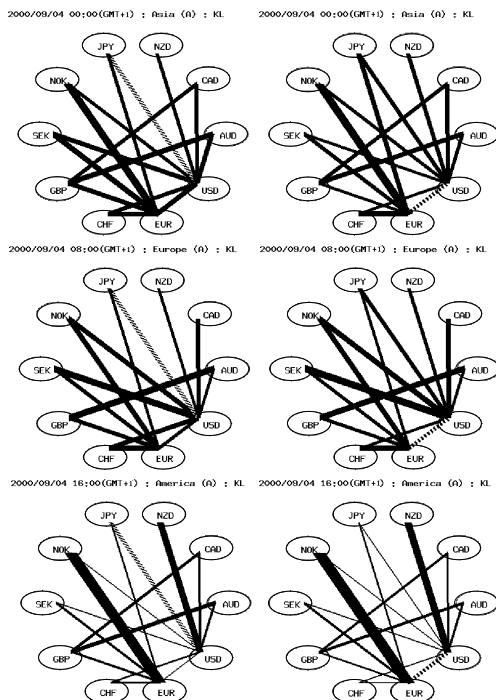


図 4 2000年9月4日における USD/JPY (EUR/USD) と他の通貨ペアとのスペクトル距離 . アジア時間帯 ($t = 0:00$ (GMT+1))(上段), ヨーロッパ時間帯 ($t = 8:00$ (GMT+1))(中段), アメリカ時間帯 ($t = 16:00$ (GMT+1))(下段). 窓の幅は $L = 480$ として短時間離散フーリエ変換によりスペクトログラムを計算した . 各通貨を頂点とし, 比較対象の通貨ペアは破線により描画している . 通貨間の細線/太線は比較対象の通貨ペアとの間のスペクトル距離の類似性/非類似性を意味している

Fig. 4 The spectral distance between the USD/JPY (EUR/USD) and other currency pairs for $L = 480$. The Asian time zone ($t = 0:00$ (GMT+1)) (top), the European time zone ($t = 8:00$ (GMT+1)) (center), and the American time zone ($t = 16:00$ (GMT+1)) (bottom). The nodes represents a currency, dashed line the focusing currency pair, and thick/thin lines a large/small distance between the dashed line and that currency pair.

$K_{ij}(t)$ の i 列成分を抜き出し, これを i 番目の通貨ペアの他の通貨ペアに対する類似度と考えることとした . 図 4 にこの方法で, EUR/CHF, EUR/USD, USD/JPY を図示した . アジア時間帯 ($t = 0:00$ (GMT+1)) では EUR/CHF と EUR/JPY, また, EUR/USD と USD/CHF の類似性が他の通貨ペアと比較すると高いが, 全体として通貨ペアの類似性は高くない . また, ヨーロッパ時間帯 ($t = 8:00$ (GMT+1)) では EUR/CHF と USD/CHF, また, EUR/USD と USD/CHF, EUR/JPY との類似性が比較的高く, USD/JPY と EUR/JPY も他の通貨ペアと比べると似通っている . アメリカ

時間帯 ($t = 16:00$ (GMT+1)) では EUR/CHF と EUR/GBP, EUR/SEK, EUR/JPY, EUR/USD, USD/JPY の類似度が高く, EUR/USD と USD/JPY, USD/NOK, USD/SEK, USD/CHF, EUR/CHF, EUR/GBP, EUR/SEK の類似度が高い, USD/JPY と USD/NOK, USD/SEK, USD/EUR, USD/CHF の類似度が高くなっている。アジア時間帯, ヨーロッパ時間帯では特に似通った振舞いをしている通貨ペアはないようであるが, アメリカ時間帯では USD, EUR, JPY との組となる通貨ペアで類似度が高まっていることが確認できる。通貨ペアまた時間帯によって類似度の高い通貨ペアの組が存在することが確認できる。分析対象とした期間 (2000年9月1日から2000年9月30日) でこの特徴は大きく変化しなかった。

4. エージェントモデル

本章では前節で提案したティック頻度間のスペクトル距離の妥当性をエージェントモデルを用いて検証する。一般にエージェントモデルを用いたモデル化手法は, パラメータ数がきわめて多く, 観測可能な変量に対して, 推定すべきパラメータ数のほうが多い不良設定問題を呈する。さらに, 金融市場では, エージェントのパラメータは学習と忘却に基づく行動規則の変化にともなって変化が生じており, 観測可能な変量の瞬値からパラメータを推定する必要がある。パラメータの推定に利用できる観測量の標本数とパラメータ推定の精度との間には不確実性関係が存在しているので, エージェントモデルをパラメータ推定を通じて観測量の再現に用いようとした場合, パラメータ推定精度に対して様々な困難性に直面する。

本章では, 金融市場が有する観測可能量の制限とパラメータ推定の不確実性の問題を直接議論することは避け, 不良設定問題に対して, パラメータの具体的値に直接依存しない, モデル構造が有するパラメータと観測可能変量との依存性を統計的観点から調べる。そしてティック頻度間のスペクトル距離とエージェントの知覚と行動とを決定付けるパラメータの差異との相関関係に着目する。

議論するモデルは, 図5に示すような, N 人の市場参加者が M 種類の通貨ペアを取引する外国為替市場の数理モデルである。市場参加者はそれぞれ異なるパラメータを持つ異質のエージェントとする。さらに, エージェント間の相互作用はほぼ無視できるものとし, エージェントは市場価格の変化と外部からの情報源からの情報を知覚し, その情報に基づき行動を生起すると仮定する。さらに, 市場参加者の行動から需

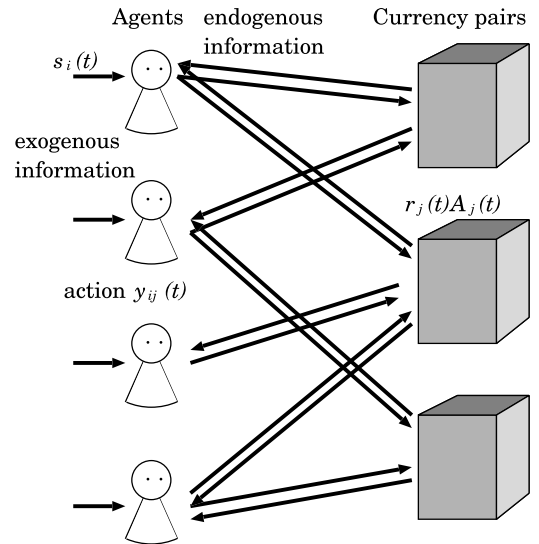


図5 モデルの概念図。 N 人の市場参加者が M 種類の通貨ペアを交換する

Fig. 5 A conceptual illustration of the agent-based model of a financial market. N market participants deal with M currency pairs.

給が生じ, この需給に基づき為替レートが決まると考える。 N 人の市場参加者はそれぞれ区別可能であるとし, $\alpha = 1, \dots, N$ と番号付けを行う。また, M 種類の通貨ペアに番号を付け, $\beta = 1, \dots, M$ と記述する。

4.1 市場参加者のモデル

市場参加者のモデル化を行うために, 市場参加者が情報を知覚し, その情報に基づいて行動に至る過程をモデル化する必要がある。このモデルを考えるために市場参加者に対する以下の5つの事柄を基礎仮説として議論を始める。

- 1 同じ環境状態であってもエージェントによって異なる解釈がなされる。
- 2 同じ環境状態であっても同一のエージェントに対してさえ時間が異なると異なる解釈がなされる。
- 3 同じ環境状態に基づき同じ解釈を行っていても, 異なる行動が誘発される。
- 4 行動の発現はあるかないかのデジタル的である。
- 5 市場参加者が行うことのできる行動は買う, 売る, 待つ の3つだけである。

また, 行動から知覚に至る内部状態の変化のモデルとして Virginia Satir の7段階モデル¹²⁾に基づき, 情報の知覚から行動の生起までを以下のような7段階に分割して考え, 防御を無視してモデルを構築する。

- 情報の知覚
- 解釈
- 感情

- 感情についての感情
- 防御
- 行動規則
- 行動

4.1.1 情報の知覚

α 番目の市場参加者は環境から時刻 $t (t = 1, 2, \dots)$ に環境状態に関する情報 $x_\alpha(t)$ を知覚する．情報はスカラー量とし，この値が大きければ買いの投資行動をとりやすく，反対に小さければ売りの投資行動をとりやすいとする．

4.1.2 解釈

知覚した情報 $x_\alpha(t)$ の解釈を行う．基本仮説 1 と 2 に基づくと解釈には個人差が大きく，また同一のエージェントにおいても時間とともに解釈の変化が生じる．よって，解釈はエージェント α と時刻 t の関数 $\Xi_\alpha(x_\alpha(t), t)$ となる．単純化のため，解釈は情報の線形関数であると仮定し，変数 $\xi_\alpha(t)$ を導入して $\Xi_\alpha(x_\alpha(t), t) = x_\alpha(t) + \xi_\alpha(t)$ と仮定する．そして， $x_\alpha(t) + \xi_\alpha(t)$ が大きいと情報からエージェントは買いの投資行動をとりやすい解釈を行うとする．反対に，この値が小さいとエージェントは売りの投資行動をとりやすい解釈をする．

4.1.3 感情

解釈 $x_\alpha(t) + \xi_\alpha(t)$ に対して行動を律するための感情が生じると考える．感情は，解釈に対して一意に決まると仮定し， $x_\alpha(t) + \xi_\alpha(t)$ を感情と同一視する．

4.1.4 感情に対する感情

基礎仮説 3 に従うと，同じ解釈に基づき行動を生起していても，異なる行動を生じうる可能性が存在している．このことは解釈に基づく感情そのものによって行動が生起していると考えられるよりは，感情に対するなんらかの評価がエージェントの行動選択に重要な要因であると考えた方が，整合性がよい．これを説明する 1 つの仮説として，Virginia Satir の 7 段階モデルでは解釈より生起した感情に対する自己評価が行動を律する仮説を提案している．解釈より生起した感情に対する自己評価をここでは「感情の感情」と呼ぶことにする．市場参加者はしばしば過去の経験（成績）に基づき，自信過剰となったり，反対に自信喪失となったりすることにより，自己の直感的判断を自己評価に基づく感情によって変更しうるということが知られている．この感情の感情はこのような自己感情を表現している．しかも，感情の感情は解釈に反することもありうるし，同一のエージェントにおいても時間的に学習を通じて変化しうる．これを表現するために，感情の感情 $\Phi_{\alpha\beta}(t)$ を感情に正負の値を取る変数 $a_{\alpha\beta}(t)$ を乗

算的に作用させることによって表現する．

$$\Phi_{\alpha\beta}(t) = a_{\alpha\beta}(t)(x_\alpha(t) + \xi_\alpha(t)), \quad (13)$$

4.1.5 行動規則

基礎仮説 4 に従うと市場参加者がとりうる行動は一般に買い，売り，待ちの 3 種類の行動のみである．市場参加者 α が通貨ペア β に対して，時刻 t において投資行動 $y_{\alpha\beta}(t)$ を生起するとする．ここで，買い ($y_{\alpha\beta}(t) = 1$)，売り ($y_{\alpha\beta}(t) = -1$)，待ち ($y_{\alpha\beta}(t) = 0$) と符号化を行う．

4.1.6 行動

基礎仮説 5 に従うと行動の表出はエージェントの内部状態がある値を超過する場合に非線形的に表出すると理解される．この行動を決定する内部状態をエージェントの自己評価である感情の感情であると仮定する．そして，市場参加者 α の通貨ペア β に対する行動は，この感情の感情の値が閾値を超えた場合に生じるとする．このようなエージェントの行動がエージェントの内部状態の閾値ダイナミクスとして決まるモデルとして，Granovetter によって社会学の文脈で定式化された閾値ダイナミクスがある¹³⁾．これは，内部変数の値が閾値を超えた場合に，行動が非線形的に発生するルールである．

$$y_{\alpha\beta}(t) = \begin{cases} 1 & (\Phi_{\alpha\beta}(t) \geq \theta_{\alpha\beta}^B(t)) \\ 0 & (\theta_{\alpha\beta}^B(t) > \Phi_{\alpha\beta}(t) > \theta_{\alpha\beta}^S(t)) \\ -1 & (\Phi_{\alpha\beta}(t) \leq \theta_{\alpha\beta}^S(t)) \end{cases}. \quad (14)$$

ここで， $\theta_{\alpha\beta}^B(t)$ は市場参加者 α の通貨ペア β に対する時刻 t における買いを判断する閾値であり， $\theta_{\alpha\beta}^S(t)$ は市場参加者 α の通貨ペア β に対する時刻 t における売りを判断する閾値である．

さらに，市場参加者 α が時刻 t において知覚する情報は対数収益率の移動平均値とニュースなどの外因性の情報 $s_\alpha(t)$ であるとする．ここで外因性の情報 $s_\alpha(t)$ は大きな/小さな値であれば，買い/売りの行動を生起させやすい情報とする．この値は対数収益率の移動平均値が持つ行動の生起のさせやすさを基準として定量化される量とする．

$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta'=1}^M \left\{ c_\alpha(\theta_{\alpha\beta'}^B(t), \theta_{\alpha\beta'}^S(t)) \times \frac{1}{T_{\alpha\beta'}(t)} \sum_{\tau=1}^{T_{\alpha\beta'}(t)} r_{\beta'}(t - \tau\Delta t) \right\} + s_\alpha(t). \quad (15)$$

ここで， $c_\alpha(\theta_{\alpha\beta'}^B(t), \theta_{\alpha\beta'}^S(t))$ は市場参加者 α の通

貨ペア β に対する注目度合とする．注目度合は閾値の絶対値が大きい，すなわち，大きな情報でなければ反応しないほど小さくなるので， $c_{\alpha\beta'}(x, y)$ は x, y の絶対値の単調減少関数であると仮定する．

4.2 市場メカニズムのモデル

エージェントのモデルに対して，市場のメカニズムを考える必要がある．ここでは，需要と供給のバランスとして市場価格が変化する古典的な市場動学を用いる．そして，上述の Virginia Satir の 7 段階モデルでモデル化される市場参加者が N 人集まり， M 種類の通貨ペアを交換している市場を考える．

通貨ペア β のレートは市場参加者の思惑によって変動する．古典的市場動学において，レートは需要（買いたい市場参加者の総和）と供給（売りたい市場参加者の総和）の均衡に従って変動すると考えられる．ここでは，単純化のため通貨ペア β の対数収益率が超過需要に比例するという Challet らの定義¹⁴⁾を採用し，超過需要は市場参加者の投資態度の総和 $N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha\beta}(t)$ に比例すると仮定する．

$$r_{\beta}(t) = \gamma N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha\beta}(t). \quad (16)$$

ここで， γ は超過需要の対数収益率への影響の度合いを表す正の定数である．そして，この超過需要が正（負）値の場合，市場価格 S_{β} は現在の市場レートより上昇（下降）する．

$$r_{\beta}(t) = \log S_{\beta}(t + \Delta t) - \log S_{\beta}(t). \quad (17)$$

このとき，通貨ペア β の建値提示頻度は市場参加者の投資態度の絶対値の総和によって決まる．

$$A_{\beta}(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha=1}^N |y_{\alpha\beta}(t)|. \quad (18)$$

このモデルにおいてエージェントの知覚と行動を決めるパラメータ $a_{\alpha\beta}(t)$ ， $\theta_{\alpha\beta}^S(t)$ ， $\theta_{\alpha\beta}^B(t)$ を行動パラメータと呼ぶことにする．1 エージェントあたり行動パラメータは $3M$ 個存在しているので，エージェントモデル全体では $3NM$ 個の行動パラメータが存在する．

4.3 理論的考察

本節ではエージェントのパラメータの類似性がティック頻度のスペクトル距離行列に反映されることを理論的に示す．そのために， β_1 番目の通貨ペアと β_2 番目の通貨ペアに対する市場参加者の知覚と判断のパラメータがすべての市場参加者に対して一致していた場合， β_1 番目の通貨ペアと β_2 番目の通貨ペアに対するパワースペクトルは一致し，その結果スペクトル距

離は 0 となることを示す．

理論的考察を行うために，以下の仮定をおく．

- 1 エージェントのパラメータの変化はなく観測期間内で一定である．
- 2 エージェントの知覚する情報の値は閾値の値に対して十分小さい．

α 番目の市場参加者が通貨ペア β に対して行動 $y_{\alpha\beta}(t)$ を時刻 t において生起する確率 $Q_{\alpha\beta}(y; t)$ を考える．単純化のため解釈のゆらぎ $\xi_{\alpha}(t)$ は独立なガウス分布からサンプルされる変数とし，以下の確率密度関数に従うと仮定する．

$$p_{\xi}(\xi_{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi_{\alpha}^2}{2\sigma^2}\right). \quad (19)$$

ここで， $\sigma (> 0)$ は不確実性の標準偏差を意味する．すると，情報 $x_{\alpha}(t)$ を知覚しているもとでの $Q_{\alpha\beta}(y; t)$ は

$$Q_{\alpha\beta}(1; t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t) - x_{\alpha}(t)}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad (20)$$

$$Q_{\alpha\beta}(-1; t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_{\alpha}(t) - \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t)}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad (21)$$

$$Q_{\alpha\beta}(0; t) = 1 - Q_{\alpha\beta}(1; t) - Q_{\alpha\beta}(-1; t) \quad (22)$$

となる．また， $\operatorname{erfc}(x)$ は余誤差関数であり次式で定義される．

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (23)$$

この行動を生起する確率 $Q_{\alpha\beta}(y; t)$ は心理物理学的測定方法の 1 つである恒常法により計測される心理測定関数 (psychometric function) に対応するものと考えられる．実験的に測定される心理測定関数は刺激の強さ（ここでは $x_{\alpha}(t)$ に対応）に対して S 字カーブを描くことが知られており，余誤差関数によく適合することが知られている．

この行動の生起確率を用いると，市場の巨視的変数である対数収益率 $r_{\beta}(t)$ と行動頻度 $A_{\beta}(t)$ はそれぞれ式 (42) と式 (43) から，以下の非線形漸化式によって近似される（導出の詳細は付録 A.1 を参照）．

$$r_{\beta}(t) = \gamma N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N f\left(x_{\alpha}(t); \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t)\right) + \eta_{\beta}(t), \quad (24)$$

$$A_{\beta}(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha=1}^N g\left(x_{\alpha}(t); \right)$$

$$\theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \Big) + \epsilon_{\beta}(t). \quad (25)$$

仮定 1 に基づき上式を Taylor 展開し α 番目のエージェントが受け取る情報 $x_{\alpha}(t)$ が $\theta_{\alpha\beta}^{S/B}(t)/a_{\alpha\beta}(t)$ に対して十分に小さいという仮定と移動平均の期間がエージェントによらず一定 ($T_{\alpha\beta'} = T$) という仮定のもとで、 $|x_{\alpha}(t)|$ の 2 次以上の項を無視すると、式 (24)、式 (25) は時変係数を持つ多変量自己回帰モデル (Vector Autoregressive Model, VAR モデル) に帰着される¹⁵⁾ (AR 係数行列とエージェントモデルの行動パラメータとの関係については付録 A.2 参照)。

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{\tau=1}^T \mathbf{G}_{\tau}(t)\mathbf{r}(t - \tau\Delta t) + \eta'(t), \quad (26)$$

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{\tau=1}^T \mathbf{D}_{\tau}(t)\mathbf{r}(t - \tau\Delta t) + \epsilon'(t). \quad (27)$$

仮定 2 に基づき、閾値 $\theta_{\alpha\beta}^{S/B}(t)$ および感情に対応する変数 $a_{\alpha\beta}(t)$ は一定値 $\theta_{\alpha\beta}^{S/B}$ および $a_{\alpha\beta}$ であるとし、これらのパラメータによって決まる式 (26) と式 (27) の AR 係数行列をそれぞれ \mathbf{G}_{τ} 、 \mathbf{D}_{τ} と記述すると、 $A_{\beta}(\Lambda)$ のパワースペクトル $P_{\beta}(\Lambda)$ は

$$P_{\beta}(\Lambda) = \sum_{\beta'=1}^M |h_{\beta'\beta}(\Lambda)|^2 \psi_{\beta'}^2 + \phi_{\beta}^2 \quad (\Lambda \neq 0), \quad (28)$$

と計算できる (導出の詳細は付録 A.3 を参照)。ここで、 $h_{\beta'\beta}(\Lambda)$ は

$$\left(\sum_{\tau=1}^T \mathbf{D}_{\tau} \exp[-i\tau\Lambda] \right) \left(\mathbf{I} - \sum_{\tau=1}^T \mathbf{G}_{\tau} \exp[-i\tau\Lambda] \right)^{-1} \quad (29)$$

の β' 、 β 成分である。また、 $P_{\beta}(0) = 0$ とおき直流成分の除去を行う。

その結果、規格化パワースペクトルは

$$p_{\beta}(\Lambda) = \frac{P_{\beta}(\Lambda)}{\int_{-\pi}^{\pi} P_{\beta}(\Lambda) d\Lambda}, \quad (30)$$

となるので、 $p_{\beta}(\Lambda)$ は明らかに $\theta_{\alpha\beta}^S$ 、 $\theta_{\alpha\beta}^B$ 、 $a_{\alpha\beta}$ 、 $c_{\alpha\beta}$ と T の関数である。よって、 β_1 番目の通貨ペアと β_2 番目の通貨ペアとの間のスペクトル距離

$$K_{\beta_1\beta_2} = \int_{-\pi}^{\pi} p_{\beta_1}(\Lambda) \log \frac{p_{\beta_1}(\Lambda)}{p_{\beta_2}(\Lambda)} d\Lambda, \quad (31)$$

はすべてのエージェントのパラメータ $\theta_{\alpha\beta}^B$ 、 $\theta_{\alpha\beta}^S$ 、 $a_{\alpha\beta}$ 、 $c_{\alpha\beta}$ および T の関数となる。ある $\beta_1 \neq \beta_2$ に対してすべての α について $\theta_{\alpha\beta_1}^B/a_{\alpha\beta_1} = \theta_{\alpha\beta_2}^B/a_{\alpha\beta_2}$ かつ $\theta_{\alpha\beta_1}^S/a_{\alpha\beta_1} = \theta_{\alpha\beta_2}^S/a_{\alpha\beta_2}$ かつ $c_{\alpha\beta_1} = c_{\alpha\beta_2}$ ならば、

$(\mathbf{G}_{\tau})_{\beta_1\beta'} = (\mathbf{G}_{\tau})_{\beta_2\beta'}$ かつ $(\mathbf{G}_{\tau})_{\beta'\beta_1} = (\mathbf{G}_{\tau})_{\beta'\beta_2}$ 、および、 $(\mathbf{D}_{\tau})_{\beta_1\beta'} = (\mathbf{D}_{\tau})_{\beta_2\beta'}$ かつ $(\mathbf{D}_{\tau})_{\beta'\beta_1} = (\mathbf{D}_{\tau})_{\beta'\beta_2}$ となる。そのとき、 $h_{\beta'\beta_1}(\Lambda) = h_{\beta'\beta_2}(\Lambda)$ がすべての β' に対して成り立つので (付録 A.4 参照)、 $P_{\beta_1}(\Lambda) = P_{\beta_2}(\Lambda)$ となり、 $K_{\beta_1\beta_2} = 0$ となる。すなわち、 α 番目のエージェントの β_1 番目の通貨ペアと β_2 番目の通貨ペアに対する知覚と行動を表すパラメータが等しい場合、スペクトル距離は 0 となる。

これは、 β_1 番目の通貨ペアと β_2 番目の通貨ペアの取引に参加するエージェントの情報の知覚の仕方と行動の仕方の差異がティック頻度のスペクトル距離に反映していると解釈できる。

4.4 数値シミュレーション

理論分析を行ううえで仮定した仮定 1、2 は現実の金融市場に対して用いるには強すぎる仮定である。実際にはエージェントの行動パラメータは各種学習を通じて変化しているので、仮定 1 のパラメータは時間的に変化している。また、実証分析により現実の金融市場では価格変動は 3σ を超えるような大きな変動も観測されているので、理論的考察で仮定した仮定 2 のエージェントが知覚する情報 $x_i(t)$ が閾値に対して十分小さいという仮定は強すぎる。

ここでは、理論を展開するためにおいた各種の強い仮定を緩めた状況においても、エージェントの行動パラメータと行動頻度のスペクトル距離との間に相関関係が見出されることをエージェントモデルを用いた直接数値シミュレーションによって示す。

感情の感情 $a_{\alpha\beta}(t)$ は市場参加者に共有される成分と市場参加者独自のものとに分解されると仮定し、

$$a_{\alpha\beta}(t) = a(t) + a'_{\alpha\beta}(t), \quad (32)$$

と書けるとする。さらに、単純化のため、 $a(t)$ および $a'_{\alpha\beta}(t)$ はそれぞれ平均 \bar{a} 、 \bar{a}' 、分散 σ_a^2 、 $\sigma_{a'}^2$ のガウス分布からサンプルされる確率変数と仮定する。また、市場参加者の注目度合を表す、 $c_{\alpha\beta}$ は $\theta_{\alpha\beta}^B$ 、 $\theta_{\alpha\beta}^S$ の単純な単調減少関数として、

$$c_{\alpha\beta} = c(\theta_{\alpha\beta}^B, \theta_{\alpha\beta}^S), \quad (33)$$

として与えた。ここで、 $c(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ である。また外因性の情報 $s_{\beta}(t)$ はランダムノイズによって決まるとし、平均 0 分散 $\sigma_s (= 0.1$ に固定) のガウス分布からサンプルされる確率変数とした。

$N = 500$ 、 $M = 15$ 、 $T = 50$ 、 $\sigma = 0.2$ 、 $\bar{a} = 0.0$ 、 $\bar{a}' = 0.0$ 、 $\sigma_a = 0.315$ 、 $\sigma_{a'} = 0.315$ 、 $\gamma = 0.1$ とし、 $\theta_{\alpha\beta}^B(t)$ を $[\Lambda, 2\Lambda]$ 、 $\theta_{\alpha\beta}^S(t)$ を $[-2\Lambda, -\Lambda]$ ($\Lambda = 0.3$) の一様乱数で与え、時刻によらず一定とした。

図 6 に 15 の通貨ペアのうち代表的なもの 3 つの対数収益率に対応する量 $r_{\beta}(t)$ と確率密度関数 $f_{\beta}(r)$ に

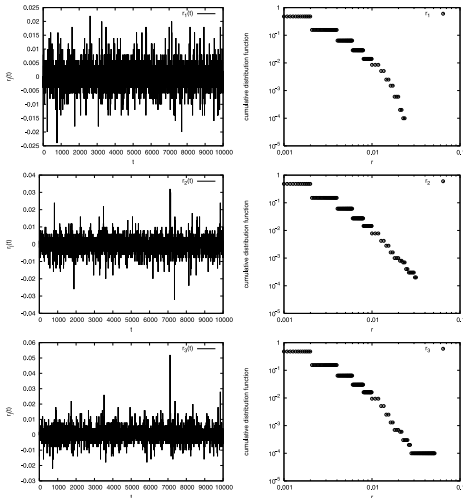


図 6 数值シミュレーションから得た代表的な通貨ペアの収益率とその累積分布関数の log-log プロット

Fig.6 Typical examples of time series of log returns and the correspondig cumulative distribution functions in log-log scales.

対応する累積分布関数

$$F_{\beta}(\geq |x|) = \int_{-\infty}^{-|x|} f_{\beta}(x')dx' + \int_{|x|}^{\infty} f_{\beta}(x')dx', \tag{34}$$

を示す．対数収益率の確率密度関数が実証論的に確認されている裾野の広い分布関数であることが確認することができる．実証論的には，

$$F_{\beta}(\geq |x|) \propto |x|^{-\kappa}, \quad (\kappa > 0) \tag{35}$$

が提案されている．ここで， κ は証券インデックスでは 3 程度¹⁶⁾，外国為替市場では 2.5 程度¹⁷⁾ と見積もられている．

エージェント数 N を 100 から 2,000 まで変更し数值シミュレーションを行ったところ裾野の広がり具合に対する N 依存性は確認されなかった．また，パラメータの値によって，収益率と行動頻度の時系列の様子は大きく変化した．ここで示したパラメータの組合せは，それらのパラメータの組合せの中で，収益率の確率密度関数が現実の金融市場で確認されている式 (35) の関係を満足するパラメータ空間中の 1 点である．

式 (5) より， $A_{\beta}(t)$ のパワースペクトルを計算し，式 (8) を用いてスペクトル距離を計算したところ，図 7 を得た．市場参加者のパラメータをすべて一様乱数で与えているため，通貨ペア間のスペクトル距離に差異はなくどれもほぼ同じ値となっている．

次に，2 番目の通貨ペアに対する市場参加者の判断を決める閾値パラメータを $\theta_{\alpha 2}^B(t) = 2\Lambda$ ， $\theta_{\alpha 2}^S(t) = -2\Lambda$

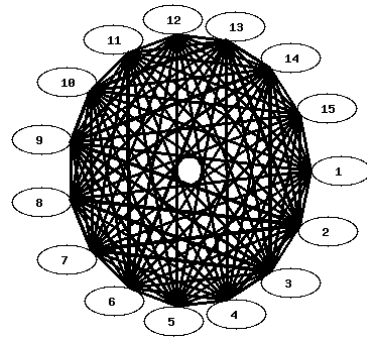


図 7 $N = 500, M = 15, T = 50, \sigma = 0.2, \bar{a} = 0.0, \bar{a}' = 0.0, \sigma_{\alpha} = 0.315, \sigma_{\alpha'} = 0.315, \Lambda = 0.3$ とし，エージェントモデルの数値シミュレーションから得られたティック頻度に対して対称化 Kullback-Leibler 距離・通貨ペア番号を頂点とする全結合ネットワークとしてスペクトル距離行列を描いた．太線/細線はスペクトル距離が大きい/小さいことを表す

Fig.7 The spectral distance network defined by the symmetric Kullback-Leibler distance between tick frequencies for two currency pairs obtained from numerical simulations of the agent-based model at $\sigma_{\alpha} = 0.315, \sigma_{\alpha'} = 0.315$. A thick/thin line represents a large/small distance between two currency pairs.

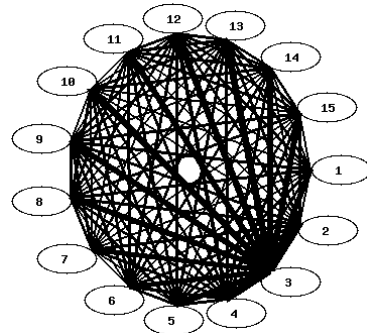


図 8 2 番目の通貨ペアに対するエージェントのパラメータを特異な値に設定した場合の対称化 Kullback-Leibler 距離．2 番目の通貨ペアとの関係だけが大きな値となっている

Fig.8 The symmetric Kullback-Leibler distance network for the case that parameters for agents to deal with the 2nd currency pair are set at particular values.

と固定し，2 つめの通貨ペアに対する振舞いのみを特殊化した場合の対称化 Kullback-Leibler 距離行列を図 8 に示す．2 番目の通貨ペアと他の通貨ペアとのスペクトル距離のみが太線で表されることが確認される．すなわち，2 番目の通貨ペアの振舞いが他の通貨ペアと特に異なって振る舞っていることを表している．

さらに，2 番目と 8 番目の通貨ペアに対するエージェントのパラメータを一致させ， $\theta_{\alpha 2}^B(t) = \theta_{\alpha 8}^B(t)$ ， $\theta_{\alpha 2}^S(t) = \theta_{\alpha 8}^S(t)$ ， $a_{\alpha 2}(t) = a_{\alpha 8}(t)$ とおいた場合の対称化 Kullback-Leibler 距離行列を図 9 に示す．2 番

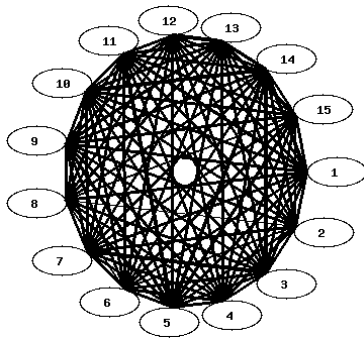


図9 2番目の通貨ペアと8番目の通貨ペアに対するエージェントのパラメータを同じ値に設定した場合の対称化 Kullback-Leibler 距離. 2番目と8番目の通貨ペアの関係が特に小さな値となっている

Fig.9 The symmetric Kullback-Leibler distance network for the case that parameters for agents to deal with the 2nd currency pair and 8th currency pair are set at the same values.

目と8番目を結ぶ直線が他の通貨ペア間を結ぶ直線より細く表されることが確認される。すなわち、2番目の通貨ペアと8番目の通貨ペアとは似通った振舞いをしていることを意味している。

このように、提案したエージェントモデルにおいてエージェントの通貨ペアに対するパラメータが類似している場合、スペクトル距離は小さくなり、反対に、エージェントの通貨ペアに対するパラメータが異なる場合、スペクトル距離は大きくなる傾向にある。このことから、ティック頻度のスペクトル距離行列はエージェントパラメータの値の差異に対応していると予想される。このことから逆に、ティック頻度のスペクトル距離行列の類似性からその通貨ペアを取り扱うエージェントパラメータの類似度合を推し量ることができると考えられる。

5. 考 察

エージェントモデルの理論分析および数値計算シミュレーションの結果、エージェントの行動パラメータの類似性と行動頻度のスペクトル距離との間に相関関係があることが見出された。この相関関係から、2節で計算した外国為替市場のティック頻度時系列の類似性分析の結果を考察する。

外国為替市場のティック頻度時系列の類似性の高い通貨ペアと低い通貨ペアが各活動時間帯によって異なることから、現実の外国為替市場では市場参加者の行動パラメータの分布が時間的に構造的変化を生じていると考えられる。図3において、アジア活動時間帯では EUR/NOK に対するエージェントの行動パラメー

タが特に際立って異なっていると推察される。一方、ヨーロッパ活動時間帯ではその違いは消え全体的に類似性が高まっている。BIS Triennial Central Bank Survey 2001¹⁸⁾ によると外国為替市場においてこの時期最も活発に様々な通貨を取引しているのは、ヨーロッパ活動時間帯の市場参加者であったので、このような行動パターンがティック頻度時系列の全体的な類似性の上昇に寄与していると推察される。アメリカ活動時間帯では NZD/USD および EUR/NOK の行動パターンに顕著な違いが確認される。しかしながら、それ以外の通貨ペア間の類似度は非常に高い。このことから、アメリカ活動時間帯の市場参加者は多くの通貨ペアを同時に取り扱う、たとえば裁定取引のような取引を短時間に行う行動パターンを持っていると考えられる。

6. ま と め

15種類の通貨ペアのティック頻度時系列に対して規格化スペクトルの Kullback-Leibler divergence に基づいたスペクトル距離による外国為替市場構造の定量化を行った。本分析によって、活動時間帯により、大きく類似度構造が変化することを確認した。このことは、低頻度時系列の分析ではとらえることができない、外国為替市場構造の活動時間帯依存性を示唆する結果である。

本手法の妥当性を検証するために、 N 人の市場参加者が M 種類の通貨ペアを取引する外国為替市場のエージェントモデルを定式化し、数値シミュレーションにより実証的に認められる裾野の広い収益率の分布が得られること確認した。また、エージェントのパラメータの類似性とティック頻度時系列のスペクトル距離との間に関連があることを数値シミュレーションにより示した。さらに、理論的考察から提案手法が通貨ペアを取引する市場参加者間の情報の知覚と行動のパラメータの類似度を定量化していることを示した。すなわち、取引に参加する市場参加者の情報の知覚から行動に至る戦略が似通っているとき、ティック頻度間のスペクトル距離は小さくなると結論付ける。

近年の人工市場の研究の発展によって多くの金融市場のエージェントモデルが提案され分析されている^{20)~24)}。ここで得られたエージェントの知覚と判断に関する戦略とティック頻度のスペクトル距離との間の関連は他の金融市場のエージェントモデルにおいて同様に見出される性質と予想する。本稿で提案したエージェントモデル同様、先行研究で提案されてきたエージェントモデルのパラメータ数は一般にきわめて

多い。現象の説得性を高めるために、より多くの説明因子を導入し、モデルパラメータを増やす方向にモデルは拡張されていく傾向がある。一方でパラメータ数の増加はオッカムの剃刀（ある現象を説明するためのモデル選択においては、パラメータ数の少ないモデルが優れている）の観点から、不適切な方向である。モデルの説得性を高めるために、説明因子を増加させることと、モデルの可解性や分析可能性、可読性との間にはトレードオフの関係が存在していると思われる。モデルの複雑性と現象を記述するモデルの説得性とのトレードオフのフロンティアを、金融市場の数理モデル化を行ううえで前進させる努力を今後も続けていく必要がある。提案モデルの複雑性を増加させず、説得性を増加させる方向に拡張することが今後の課題である。

金融市場に関する高頻度データから意味のある特徴を見出し、これを可視化する方法はますます重要になると予想される。そして、これをエージェントモデルと連動させることは、定量化手法の解釈と妥当性の検証に有効である。

今後の課題として、スペクトル距離行列の可視化手法の開発、分析結果と金融実務家の直感的理解との比較、大規模で網羅的な世界金融の全容調査への適用があげられる。

謝辞 本研究は文部科学省科学研究費補助金若手研究 (B) 17760067 の交付を受けて行われたものです。

参 考 文 献

- 1) Dacorogna, M.M., Gençay, R., Müller, U., Olsen, R.B. and Pictet, O.V.: *An introduction to high-frequency finance*, Academic Press, San Diego (2000).
- 2) Mantegna, R. and Stanley, H.: *An Introduction to Econophysics — Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- 3) 高安秀樹, 高安美佐子: エコノフィジックス—市場に潜む物理法則, 日本経済新聞社 (2001).
- 4) 相馬 亘: 経済における複雑系ネットワーク, 人工知能学会誌, Vol.20, No.3, pp.289–295 (2005).
- 5) Strozzi, F. and Zaldívar, J.M.: Non-linear forecasting in high-frequency financial time series, *Physica A*, Vol.353, pp.463–479 (2005).
- 6) Aste, T. and Matteo, T.D.: Dynamical network from correlations, *Physica A*, Vol.370, pp.156–161 (2006).
- 7) Sato, A.-H. and Oshiro, J.: Quantifying similarity between markets with application to high frequency financial data, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.75, p.084005 (2006).
- 8) The data are provided by CQG Inc.
- 9) Veldhuis, R. and Klabbers, E.: On the computation of the Kullback-Leibler measure for spectral distance, *IEEE Trans. speech and audio processing*, Vol.11, pp.100–103 (2003).
- 10) Granger, C.W.J. and Hatanaka, M.: *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton University Press, Princeton (1964).
- 11) Brooks, C. and Hinich, M.J.: *Journal of the Royal Statistical Society C*, Vol.55, p.241 (2006).
- 12) Weinberg, J.: *Becoming a Technical Leader*, Dorset House Publishing, New York (1986).
- 13) Granovetter, M.: Threshold models of collective behavior, *The American Journal of Sociology*, Vol.83, pp.1420–1443 (1978).
- 14) Challet, D. and Marsili, M.: Criticality and market efficiency in a simple realistic model of the stock market, *Physical Review E*, Vol.68, p.036132 (2003).
- 15) 赤池弘次, 北川源四郎 (編): 時系列解析の実際 II, 朝倉書店 (1995).
- 16) Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V. and Stanley, H.E.: A theory of power-law distributions in financial market fluctuations, *Nature*, Vol.423, pp.267–270 (2003).
- 17) Mizuno, T., Kurihara, S., Takayasu, M. and Takayasu, H.: Analysis of high-resolution foreign exchange data of USD-JPY for 13 years, *Physica A*, Vol.324, pp.296–302 (2003).
- 18) Triennial Central Bank Survey 2001, BIS.
- 19) Sato, A.-H. and Takayasu, H.: Dynamical models of stock market exchanges: from microscopic determinism to macroscopic randomness, *Physica A*, Vol.250, pp.231–252 (1998).
- 20) Aoki, M.: *New Approaches to Macroeconomics Modeling: Evolutionary Stochastic Dynamics, Multiple Equilibria, and Externalities as Field Effect*, Cambridge University Press, New York (1996).
- 21) Lux, T. and Marchesi, M.: Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market, *Nature*, Vol.397, pp.498–500 (1999).
- 22) Challet, D., Marsili, M. and Zhang, Y.-C.: Modeling market mechanism with minority game, *Physica A*, Vol.287, pp.493–506 (2000).
- 23) 和泉 潔: 人工市場, 森北出版 (2003).
- 24) Sato, A.-H.: Characteristic time scales of tick quotes on foreign currency markets: An empirical study and agent-based model, *The European Physical Journal B*, Vol.50, pp.137–140 (2006).

付 録

A.1 市場の巨視的変量の発展方程式

式 (20), 式 (21), および式 (22) より

$$\langle y_{\alpha\beta}(t) \rangle = Q_{\alpha\beta}(1;t) - Q_{\alpha\beta}(-1;t), \quad (36)$$

$$\langle |y_{\alpha\beta}(t)| \rangle = Q_{\alpha\beta}(1;t) + Q_{\alpha\beta}(-1;t). \quad (37)$$

を得る. さらに, 式 (16) と式 (18) から $r_\beta(t)$ と $A_\beta(t)$ のアンサンブル平均は

$$\langle r_\beta(t) \rangle = \gamma N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \langle y_{\alpha\beta}(t) \rangle, \quad (38)$$

$$\langle A_\beta(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha=1}^N \langle |y_{\alpha\beta}(t)| \rangle, \quad (39)$$

で近似される. それゆえ, 式 (36) と式 (37) を式 (38) と式 (39) に代入すると

$$\langle r_\beta(t) \rangle = \gamma N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N f \left(x_\alpha(t); \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right), \quad (40)$$

$$\langle A_\beta(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha=1}^N g \left(x_\alpha(t); \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right), \quad (41)$$

を得る. ここで,

$$f(x; a, b) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{a-x}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-b}{\sqrt{2}\sigma} \right), \quad (42)$$

$$g(x; a, b) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{a-x}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-b}{\sqrt{2}\sigma} \right), \quad (43)$$

と定義した.

さらに, $r_\beta(t)$ と $A_\beta(t)$ はアンサンブル平均値の周りでゆらいでいると仮定し, それぞれ分散 $\psi_\beta^2, \phi_\beta^2$ の独立な白色ノイズ $\eta_\beta(t)$ および $\epsilon_\beta(t)$ を用いて, $r_\beta(t) = \langle r_\beta(t) \rangle + \eta_\beta(t)$, $A_\beta(t) = \langle A_\beta(t) \rangle + \epsilon_\beta(t)$ と表記できるとする.

$$r_\beta(t) = \gamma N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N f \left(x_\alpha(t); \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right) + \eta_\beta(t), \quad (44)$$

$$A_\beta(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha=1}^N g \left(x_\alpha(t); \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right) + \epsilon_\beta(t). \quad (45)$$

となる.

A.2 多変量 AR モデルの係数と行動パラメータとの関係

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\tau(t)_{\beta_1\beta_2} &= \frac{\gamma}{NT} \sum_{\alpha=1}^N f' \left(0; \theta_{\alpha\beta_1}^B(t)/a_{\alpha\beta_1}(t), \theta_{\alpha\beta_1}^S(t)/a_{\alpha\beta_1}(t) \right) \\ &\quad \times c_{\alpha\beta_2} \left(\theta_{\alpha\beta_2}^B(t), \theta_{\alpha\beta_2}^S(t) \right), \\ (\mathbf{D}_\tau(t))_{\beta_1\beta_2} &= \frac{1}{T\Delta t} \sum_{\alpha=1}^N g' \left(0; \theta_{\alpha\beta_1}^B(t)/a_{\alpha\beta_1}(t), \theta_{\alpha\beta_1}^S(t)/a_{\alpha\beta_1}(t) \right) \\ &\quad \times c_{\alpha\beta_2} \left(\theta_{\alpha\beta_2}^B(t), \theta_{\alpha\beta_2}^S(t) \right), \\ \eta'_\beta(t) &= \sum_{\alpha=1}^N \{ f \left(0; \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right) \\ &\quad + f' \left(0; \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right) s_\alpha(t) \} \\ &\quad + \eta_\beta(t), \\ \epsilon'_\beta(t) &= \sum_{\alpha=1}^N \{ g \left(0; \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right) \\ &\quad + g' \left(0; \theta_{\alpha\beta}^B(t)/a_{\alpha\beta}(t), \theta_{\alpha\beta}^S(t)/a_{\alpha\beta}(t) \right) s_\alpha(t) \} + \epsilon_\beta(t). \end{aligned}$$

ここで, $f(x; a, b)$ と $g(x; a, b)$ は式 (42) と式 (43) で表現され, それぞれの x での微分係数の 0 点は

$$\begin{aligned} f'(0; a, b) &= 1/\sqrt{(2\pi)\sigma} \\ &\quad \times \{ \exp[-a^2/2\sigma^2] + \exp[-b^2/2\sigma^2] \}, \\ g'(0; a, b) &= 1/\sqrt{(2\pi)\sigma} \\ &\quad \times \{ \exp[-a^2/2\sigma^2] - \exp[-b^2/2\sigma^2] \} \end{aligned}$$

である.

A.3 行動頻度のパワースペクトル

$A_\beta(t)$ の形式的 Fourier 級数を次式で定義すると,

$$Z_\beta(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} A_\beta(t) e^{-it\Lambda} \quad (-\pi \leq \Lambda \leq \pi). \quad (46)$$

$A_\beta(t)$ の自己相関関数 $R_\beta(\tau)$ から定義されるスペクトル密度

$$P_\beta(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_\beta(\tau) e^{-i\tau\Lambda}, \quad (47)$$

は,

$$\langle \overline{Z_\beta(\Lambda)} Z_\beta(\Lambda') \rangle = \delta(\Lambda - \Lambda') P_\beta(\Lambda), \quad (48)$$

と書ける．一方，式 (26) と式 (27) の両辺に $e^{-it\Lambda}$ を掛け， t について和をとると，

$$\begin{aligned} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t) \exp[-it\Lambda] &= \left(\mathbf{I} - \sum_{\tau=1}^T \mathbf{G}_\tau \exp[-i\tau\Lambda] \right)^{-1} \\ &\quad \times \sum_{t=-\infty}^{\infty} \eta'(t) \exp[-it\Lambda], \\ \sum_{t=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) \exp[-it\Lambda] &= \left(\sum_{\tau=1}^T \mathbf{D}_\tau \exp[-i\tau\Lambda] \right) \\ &\quad \times \sum_{t=-\infty}^{\infty} \epsilon'(t) \exp[-it\Lambda], \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\Lambda) &= \left(\sum_{\tau=1}^T \mathbf{D}_\tau \exp[-i\tau\Lambda] \right) \\ &\quad \times \left(\mathbf{I} - \sum_{\tau=1}^T \mathbf{G}_\tau \exp[-i\tau\Lambda] \right)^{-1} \\ &\quad \times \sum_{t=-\infty}^{\infty} \eta'(t) \exp[-it\Lambda] \\ &\quad + \sum_{t=-\infty}^{\infty} \epsilon'(t) \exp[-it\Lambda], \end{aligned} \quad (49)$$

を得る．これを，式 (48) に代入し， $\epsilon_j(t)$ ， $\eta(t)$ が白色ノイズであることおよび $s_\alpha(t) = 0$ の条件を用いると，

$$P_\beta(\Lambda) = \sum_{\beta'=1}^M |h_{\beta'\beta}(\Lambda)|^2 \psi_{\beta'}^2 + \phi_\beta^2 \quad (\Lambda \neq 0), \quad (50)$$

を得る．

A.4 行 列

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\gamma}{NT} f'(0; \theta_{\alpha\beta}^B/a_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta}^S/a_{\alpha\beta}), \quad c_{\alpha\beta'} =$$

$c_{\alpha\beta'}(\theta_{\alpha\beta'}^B, \theta_{\alpha\beta'}^S)$ とおくと， $g_{\beta\beta'} = (\mathbf{G}_\tau)_{\beta\beta'} = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta'}$ となる．ここで，すべての α に対して $f_{\alpha l} = f_{\alpha m}$ ， $c_{\alpha l} = c_{\alpha m}$ ($l \neq m$) とすると，

$$\begin{aligned} g_{l\beta'} - g_{m\beta'} &= \sum_{\alpha=1}^N (f_{\alpha l} - f_{\alpha m}) c_{\alpha\beta'} = 0 \\ g_{\beta l} - g_{\beta m} &= \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha\beta} (c_{\alpha l} - c_{\alpha m}) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので， $g_{l\beta'} = g_{m\beta'}$ であり， $g_{\beta l} = g_{\beta m}$ である．同様に $d_{\beta\beta'} = (\mathbf{D}_\tau)_{\beta\beta'}$ に対しても， $d_{l\beta'} = d_{m\beta'}$ かつ $d_{\beta l} = d_{\beta m}$ が成立する．

$q_{\beta_1\beta_2} = (\mathbf{I} - \sum_{\tau=1}^T \mathbf{G}_\tau \exp[-i\tau\Lambda])_{\beta_1\beta_2}$ とおき，その逆行列を $r_{\beta_1\beta_2}$ とすると， $l \neq m$ に対して， $r_{\beta_1 l} = r_{\beta_1 m}$ が成り立ち $r_{ll} = r_{mm}$ ， $r_{lm} = r_{ml}$ である．その結果，

$$\begin{aligned} h_{\beta l} - h_{\beta m} &= \sum_{k=1}^M d_{\beta k} (r_{kl} - r_{km}) \\ &= d_{\beta l} (r_{ll} - r_{lm}) + d_{\beta m} (r_{ml} - r_{mm}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

となり，すべての β に対して $h_{\beta l} = h_{\beta m}$ が成り立つ．

(平成 18 年 12 月 4 日受付)

(平成 19 年 5 月 30 日再受付)

(平成 19 年 9 月 14 日再々受付)

(平成 19 年 9 月 26 日採録)

佐藤 彰洋



昭和 50 年生．平成 12 年から 13 年にかけて日本学術振興会特別研究員．平成 13 年東北大学大学院情報科学研究科博士後期課程修了．同年 4 月より京都大学大学院情報科学研究科数理工学専攻助手．平成 19 年 4 月より同助教．現在に至る．エージェントモデルに立脚した市場数理モデルの開発と確率過程の研究に従事．博士 (情報科学)．