1N-2

焦げたパンケーキグラフにおける内素な経路問題

澤田　直樹[†]　　鈴木　康斗[†]　　金子　敬一[†]
東京農工大学工学部[†]

1　はじめに

節点間の互いに素(内素)な経路問題は，並列計算機における重要な問題の1つである．

本研究では，焦げたパンケーキグラフ[1]の任意の2節点に対して，次数の多項式時間で，次数と同じ本数の内素な経路を作成する算法を提案する．この算法では，互いに素な部分グラフに，高々1つの構成を割り当てることによって内素な経路を実現する．算法により得られる経路長の総和と算法の時間計算量の平均値を，計算機実験によって調べた．

2　諸定義

［定義1］ n 個の数字1, 2, ..., n および n 個の符号 $b_i \in \{-1,+1\}$ $(1 \le i \le n)$ からなる ような 順列 $u = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, ..., a_n \times b_n)$ を n 個 の 数字 1, 2, ..., n からなる符号付順列という．

［定義2］ n 個の数字1,2,...,n からなる任意の符号付順列 $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ に対して，前置反転操作 $u^{(i)}$ を以下で定義する．

$$u^{(i)} = (-u_i, -u_{i-1}, ..., -u_1, u_{i+1}, u_{i+2}, ..., u_n)$$

以下では場所を節約するために，符号は上部に付加し，$\overline{u_i}$ のように表記することとする．

［定義3］次数 n の焦げたパンケーキグラフ B_n は，それぞれ固有な n 個の数字1, 2, ..., n からなる符号付順列の1つをラベルとする $n! \times 2^n$ 個の節点を持つ．ラベル $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ を持つ節点は，集合 $\{u^{(i)} \mid 1 \le i \le n\}$ の要素をラベルとして持つ各節点とのみ隣接する．

B_n において，ラベルの最後の数字 k を固定することで導出される部分グラフは，次数 $n-1$ の焦げたパンケーキグラフ となる．したがって，B_n は $2n$ 個の B_{n-1} からなる．ラベルの最後の数字 k を固定することで導出される部分グラフを $B_{n-1}k$ で表す． B_n における 2 つの節点間の経路選択には，文献［2］の多項式算法を用いる．

3　算法

次数 n の焦げたパンケーキグラフ の 2 節点 s，d 間の n 本の内素な経路 $r_i (1 \le i \le n)$ を作成する算法を提案する． $n = 2$ の場合， B_n における 2 頂点間の内素な経路問題に対する解は自明である．したがって，以下では $n \ge 3$ であると仮定する． $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ と表すこととし， B_n の対称性から $d = (1, 2, ..., n)$ と固定する．

任意 の i $(1 \le |i| \le n-1)$ に 対 し て ， $t_i = (\overline{|i|+1}, \overline{|i|+2}, ..., \overline{n}, |1|, |2|, ..., |i|-1, i)$ とする．

場合Ⅰ　$s_n = n$

r_n の構成：

$s \to s^{(n)} \to s^{(n,j)} \to s^{(n,j,n)} \to^* t_{-1} \to^* d$.

ただし， j は $|s_{n-j+1}| = 1$ を満たす．また，多項式経路算法による経路選択を $\to^*$ で表す．

$r_i (1 \le i \le n-1)$ の構成：

$B_{n-1}n$ において，算法を再帰的に呼び出して，$s - d$ 間の内素な $n-1$ 本の構成を作成する．

場合Ⅱ　$s_1 \ne \pm n$　かつ　$s_n \ne \pm 1, n$

$r_i (2 \le i \le n-1)$ の構成：

$s_i < 0$ ならば, $s \to s^{(i)} \to s^{(i,1)} \to s^{(i,1,n)} \to^* t_{s_i} \to^* d$，さもなくば， $s \to s^{(i)} \to s^{(i,n)} \to^* t_{s_i} \to^* d$.

r_1 の構成：

$s_1 > 0$ ならば， $s \to s^{(1)} \to s^{(1,n)} \to^* t_{s_1} \to^* d$，
さもなくば， $s \to s^{(1)} \to s^{(1,n)} \to s^{(1,n,1)} \to s^{(1,n,1,n)} \to^* t_{s_1} \to^* d$.

r_n の構成：

$s_1 > 0$ ならば, $s \to s^{(n)} \to s^{(n,1)} \to s^{(n,1,n)} \to^* t_{s_n} \to^* d$，　さもなくば, $s \to s^{(n)} \to^* t_{s_n} \to^* d$.

場合Ⅲ　$|s_1| = n$　かつ　$s_n \ne \pm 1$

$s_1 = n$ ならば $j = 1$，さもなくば $j = n$ とする．

An algorithm for node-disjoint paths in burnt pancake graphs
†Naoki Sawada, Yasuto Suzuki, Keiichi Kaneko
†Faculty of Technology, Tokyo Univ. of Agri. and Tech.

r_j の構成：

$j=1$ ならば，$s \to s^{(1)} \to s^{(n)} \to^* d$，
さもなくば，$s \to s^{(n)} \to^* d$.
r_j における d の直前の節点 v のラベルの最初の数を v_1 とする.

$r_i\ (1 \le i \le n, i \ne j, s_i \ne v_1)$ の構成：

場合Ⅱの $r_i (1 \le i \le n)$ と同様に構成する.

$r_k\ (s_k = v_1)$ の構成：

$s \to s^{(k)} \to s^{(k,n)} \to s^{(k,n,1)} \to s^{(k,n,1,n)} \to^* t_{\overline{s_n}} \to^* d$.

場合Ⅳ $s_1 \ne \pm n$ かつ $|s_n| = 1$

多項式算法[2]により $s - t_{s_n}$ 間の経路を作る. s の直後の節点 u のラベルの最初の数を u_1 とする.

$r_{|u_1|}$ の構成：

$s \to^* t_{s_n} \to^* d$.

$r_i (1 \le i \le n, i \ne u_1)$ の構成：

場合Ⅱの $r_i (1 \le i \le n)$ と同様に構成する.

場合Ⅴ $|s_1| = n$ かつ $|s_n| = 1$

$s_1 = n$ ならば $j = 1$，さもなくば $j = n$ とする. 多項式算法[2]により $s - t_{s_n}$ 間の経路を作る. s の直後の節点 u のラベルの最初の数を u_1 とする.

r_j の構成：

場合Ⅲの r_j と同様に構成する.

$r_{|u_1|}\ (|v_1| \ne 1, n)$ の構成：

$s \to^* t_{s_n} \to^* d$.

$r_{n+1-j}\ (s_1 \ne |u_1|)$ の構成：

$j=1$ ならば，$s \to s^{(n)} \to s^{(n,1)} \to s^{(n,1,n)} \to^* t_{\overline{s_n}} \to^* d$，さもなくば，$s \to s^{(1)} \to s^{(1,n)} \to s^{(1,n,1)} \to s^{(1,n,1,n)} \to^* t_{\overline{s_n}} \to^* d$.

$r_i\ (2 \le i \le n-1, i \ne |u_1|, s_i \ne v_1)$ の構成：

場合Ⅱの $r_i (1 \le i \le n)$ と同様に構成する.

$r_k\ (s_k = v_1, k \ne |u_1|)$ の構成：

場合Ⅲの r_k と同様に構成する.

４　計算機実験

算法の平均性能を評価するために，以下のような手順で計算機実験を行った． n を2から50まで変化させて，各々の n に対して次の1, 2を100,000回繰り返す.

(1) $d = (1, 2, ..., n)$ とし，s を無作為に選択

（2）算法を適用し，実行時間と経路長を測定

図１および図２に，平均時間計算量と経路長の総和の平均を示す．これらの図より，平均時間と経路長の総和の平均が n の多項式オーダであり，それぞれ $O(n^{2.5})$，$O(n^{2.07})$ 程度となることがわかる.

５　結論

本論文で，我々は B_n における任意の２節点間に内素な経路問題を解く算法を提案した．また，この算法の平均時間計算量が $O(n^{2.5})$ であること，得られる経路長の総和平均が $O(n^{2.07})$ であることを示した．今後の課題として，算法の正しさの証明や理論的な性能評価が必要である.

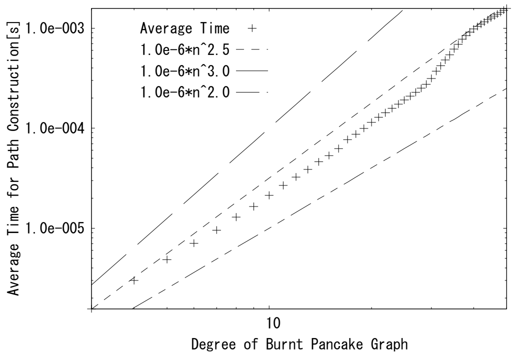

図1. 経路構成のための平均時間

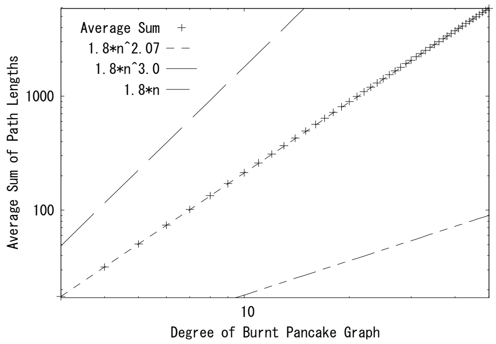

図2. 経路長総和の平均

参考文献

[1] W. H. Gates et *al.* : Bounds for sorting by prefix reversal, Discrete Math., Vol. 27, pp. 47-57, 1979.

[2] K. Kaneko: An algorithm for node-to-set disjoint paths problem in burnt pancake graphs, IEICE Trans. Info. & Sys., Vol. E86-D, pp. 2588-2594, 2003.